



ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

ADOPTADOS PARA SUS PUBLICACIONES POR LA

ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

DIRECTOR: EMILIO REBUELTO

ENERO 1938. — ENTREGA I. — TOMO CXXV

SUMARIO

BUENOS AIRES
CALLE SANTA FÉ 1145
1938

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

ADVERTENCIA. — Los colaboradores de los Anales son personalmente responsables de la tesis sustentada en sus escritos. Tienen derecho a la corrección de dos pruebas. Los que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos, deben solicitarla por escrito. Los manuscritos, correspondencia, etc., se enviarán a la sede social, Santa Fe 1145.

Impreso en los Talleres Gráficos "TOMAS PALUMBO" - La Madrid 321-325 - Buenos Aires

SUR CERTAINES QUESTIONS DE CALCUL INTEGRAL

PAR J. HADAMARD

Les sujets dont je me propose de m'occuper ici soulèvent l'un et l'autre les mêmes observations d'ordre pédagogique. Dans les deux cas, le mode de démonstration qui s'offre comme naturellement lié à la nature de la question a dû être rejeté, au moins dans les Traités classiquement mis entre les mains des étudiants, en raison des objections bien connues auxquelles il se heurte au point de vue de la rigueur, de sorte que le problème est abordé par des voies assez détournées et tout à fait artificielles.

J'ai moi-même suivi ces voies dans mon *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique* tel qu'il a été publié; mais dans l'enseignement que j'ai donné à cette Ecole cette année, j'ai pu surmonter la difficulté: je vais indiquer ici comment j'y suis parvenu.

I

1. Il s'agit, dans les deux cas, d'intégrales multiples. Une remarque préliminaire s'impose à cet égard. Pour traiter en toute rigueur de pareilles intégrales, on sait qu'il faut commencer par préciser, avec Jordan, la forme des domaines sur lesquels elles peuvent porter. Pour l'intégrale double, par exemple, il faut que le domaine d'intégration D soit quarrable au sens de Jordan-Lebesgue: ceci signifie qu'on doit pouvoir lui inscrire des polygones (ou ensembles de polygones) p_i et lui circonscrire des polygones (ou ensembles de polygones) p_e de manière que la différence $p_e - p_i$ des aires d'une figure polygonale circonscrite et d'une figure polygonale inscrite puisse être rendue aussi petite que l'on veut; de même, le domaine D auquel sera étendue une intégrale triple devra être tel qu'on puisse tracer à son intérieur des figures polyèdrales p_i et le comprendre à l'intérieur de figures polyèdrales p_e de manière que la différence $p_e - p_i$ entre les volumes inscrits et circonscrits soit arbitrairement petite; etc.

Ces propriétés sont présupposées dans la définition même de l'intégrale multiple : soit qu'on les admette implicitement, soit qu'on juge utile de les préciser, elles doivent être considérées, et nous les considérons, comme acquises au moment où on aborde les deux sujets qui vont nous occuper.

Nous pourrons même supposer que p_i et p_e sont des ensembles de rectangles ayant leurs côtés parallèles aux axes, ou de parallélépipèdes rectangles ayant leurs faces parallèles aux plans coordonnés, etc. ; cette hypothèse n'est pas en réalité plus restrictive que la précédente, et l'une se ramène sans difficulté à l'autre (comme on le voit en opérant d'abord sur un triangle).

L'aire ou le volume, définis comme limites communes de p_i et de p_e, possèdent évidemment la propriété classique d'être dans une homothétie, multipliés par une puissance du rapport de similitude.

2. Parlons d'abord du *changement de variables dans les intégrales multiples*. La véritable origine de la formule obtenue est dans le fait que le jacobien d'une transformation ponctuelle, pris en valeur absolue, représente le rapport de deux aires infiniment petites correspondantes, ou, s'il s'agit d'intégrales triples, de deux volumes infiniment petits correspondants. Dans le plan, par exemple, soient

$$X = f(x, y) \quad , \quad Y = g(x, y)$$

la transformation ponctuelle ; $m(x, y)$, $M(X, Y)$, deux points correspondants ; $m'(x + dx, y + dy)$, $m''(x + \delta x, y + \delta y)$, deux points voisins de m, ayant pour images respectives

$$M'(X + dX, Y + dY) \quad , \quad M''(X + \delta X, Y + \delta Y)$$

En supposant les fonctions f, g pourvues de dérivées premières continues, la formule des accroissements finis donne

$$dX = A\,dx + B\,dy + \eta_1 l_1 \quad , \quad dY = C\,dx + D\,dy + \eta'_1 l_1$$

$$\delta X = A\,\delta x + B\,\delta y + \eta_2 l_2 \quad , \quad \delta Y = C\,\delta x + D\,\delta y + \eta'_2 l_2 \qquad [1]$$

où A, B, C, D sont les valeurs des dérivées partielles en m; l_1 , l_2 les longueurs $\overline{mm'}$, $\overline{mm''}$ et où

$$\eta_1 = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{x_1 = x + \theta_1 dx, y_1 = y + \theta_1 dy} - \frac{\partial f}{\partial x}\right] \frac{dx}{l_1} + \left[\frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{\partial f}{\partial y}\right] \frac{dy}{l_1} , \eta'_1 , \eta_2 , \eta'_2$$

tendent vers zéro (¹) avec l_1, l_2. Ces formules montrent, du moins si le parallélogramme $mm'm''m'''$ ne s'aplatit pas indéfiniment, que le rapport

$$\frac{dX\,\delta Y - dY\,\delta X}{dx\,\delta y - dy\,\delta x}$$

de ce parallélogramme à celui qui a pour côtés MM', MM'' tend vers j lorsque l_1 et l_2 tendent simultanément vers zéro.

3. Le résultat précédent conduit évidemment à écrire la formule classique pour le changement de variables sous le signe $\int\int$. Il n'en constitue pas cependant une démonstration satisfaisante, au moins au premier abord, et l'on a, jusqu'ici, présenté la démonstration autrement. Deux méthodes sont connues: l'une (²) consistant à faire successivement un changement de variable sur x seul et un changement de variable sur y seul; l'autre (³) dans laquelle on obtient l'aire S de l'image d'une portion s du premier plan en la ramenant à une intégrale étendue à la frontière de s et établissant ainsi la formule $S = sj'$ où j' est compris entre le minimun et le maximun de j dans l'aire s: formule qui entraîne, sans nouvelle difficulté, celle du changement de variables (⁴).

4. Ne peut'on obtenir une démonstration rigoureuse de cette dernière en partant du fait fondamental noté au nº 2?

Remarquons d'abord que les formules [1] peuvent encore être écrites si ($\overline{mm'}$ et $\overline{mm''}$ tendant toujours vers zéro) le point m, au lieu d'être fixe, varie d'une manière quelconque à l'intérieur de la région D où nous avons supposé les dérivées premières de f et de g continues (ou, plus exactement, de manière que le parallélogramme dont nous partons soit compris à l'intérieur de cette région). Cela résulte, étant données les expresions de η_i, η'_i, de ce que, d'après un théorème connu, la continuité de ces dérivées est uniforme.

5. Raisonnons, non plus sur le parallélogramme de côtés MM', MM'' mais sur la figure $MM'M''M'''$ (quadrilatère curviligne) ou S, image du petit parallélogramme du premier plan.

(¹) Si f, g admettent des dérivées secondes inférieures en valeur absolue à un nombre fixe K, $|\eta_i|$, $|\eta'_i|$ sont plus petites que $4Kl_i$.

(²) Voir le *Calcul différentiel* de Joseph Bertrand et notre *Cours d'Analyse*, tome I, nº 151.

(³) Voir Goursat, *Cours d'Analyse*, tome I.

(⁴) Goursat, *loc. cit.*

Nous pourrons d'ailleurs, en vue de ce qui va suivre, nous borner au cas où ce premier parallélogramme $mm'm''m'''$, ou s, est un rectangle de côtés parallèles aux axes et supposer, en outre, que ce parallélogramme devient infiniment petit en restant constamment homothétique à lui-même, de sorte que l'on pourra prendre $l_1 = \varepsilon\lambda_1$, $l_2 = \varepsilon\lambda_2$, en désignant par $\lambda_1 . \lambda_2$ deux longueurs fixes et par ε un infiniment petit que l'on pourra prendre comme infiniment petit principal.

Nous pourrons, pour simplifier l'écriture, rapporter le rectangle s à ses côtés issus de m et son image S a des axes issus de M, de sorte que, à la limite, l'origine des coordonnées sera m_o dans le premier plan, M_o dans le second.

En même temps que les figures s et S, on pourra considérer leurs homothétiques dans le rapport (infiniment grand) $1/\varepsilon$. Autrement dit $(\bar{x}, \bar{y})$ étant un point quelconque de s; $(\bar{X}, \bar{Y})$ son image, posons

$$\bar{x} = x + \varepsilon\xi \quad , \quad \bar{y} = y + \varepsilon\eta \quad , \quad \bar{X} = X + \varepsilon\Xi \quad , \quad \bar{Y} = Y + \varepsilon H \qquad [3]$$

La figure σ, lieu du point (ξ, η) et homothétique de s, est donc un rectangle invariable de côtés λ_1, λ_2. Quant au point (ΞH) ses coordonnées seront, d'après les formules [1], de la forme

$$\Xi = A\xi + B\eta + \tau_1 \quad , \quad H = C\xi + D\eta + \tau_1' \qquad [3']$$

En bornant les seconds membres à leurs termes linéaires, on a une transformation affine qui change σ en un parallélogramme Σ_o fixe, c'est à dire indépendant de ε et qui varie même peu ([1]) lorsque m tend vers une position fixe m_o. Les termes complémentaires tendront vers zéro,

$$\tau_1 = \frac{2\eta_1}{\varepsilon}\sqrt{l_1^2 + l_2^2} = 2\eta_1\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$$

et τ'_1 étant inférieurs en valeur absolue à une quantité $\tau(\varepsilon)$ qui tend vers zéro ([2]) avec ε.

([1]) On peut même considérer Σ_o comme fixe dans ces conditions, les variations de A, B, C, D se traduisant par des termes correctifs de même forme que ceux qui figurent dans [3'], puisqu'elles sont infiniment petites en même temps que la distance $\overline{mm_o}$.

([2]) Si les fonctions f, g admettent des dérivées partielles du second ordre inférieures en valeur absolue à K, on peut prendre

$$\tau(\varepsilon) = 8K\varepsilon\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$$

Si nous menons des parallèles à chaque côté de Σ_o, de part et d'autre de ce côté, à la distance $\tau(\varepsilon)$, nous aurons deux nouveaux parallélogrammes infiniment peu différents de Σ_o, délimités, l'un, Σ_i, par les parallèles intérieures; l'autre Σ_e, par les parallèles extérieures. La figure Σ sera comprise à l'intérieur de Σ_e et comprendra Σ_i à son intérieur [1]. Donc, lorsque ε tendra vers zéro, son aire sera infiniment peu différente de celle de Σ_o (et cela uniformément quelle que soit la position de m). Quant à la figure S, image de s et homothétique de Σ, on voit qu'elle est comprise entre celles des parallélogrammes S_i et S_e, homothétiques de Σ_i et de Σ_e, et qu'on peut, par conséquent, la remplacer par la quantité $S_o = js$ avec une erreur relative inférieure à un nombre ϑ qui tend vers zéro [2].

6. Ceci suffit pour établir la formule du changement de variables, c'est-à-dire pour transformer l'intégrale double (où Φ est une fonction bornée et continue) $\int\int_s \Phi(X, Y)\,dXdY$ étendue à une certaine aire S du plan des XY en une intégrale analogue relative à l'aire correspondante s du premier plan (la correspondance étant supposée biunivoque), dans le cas où cette dernière aire s est un rectangle de côtés parallèles aux axes.

Divisons, en effet, chacun des côtés du rectangle s en n parties égales, ce qui permet de diviser le rectangle lui-même, à l'aide de

(1) Le premier point ressort immédiatement des constatations du texte. Le second, c'est à dire le fait que tout point situé dans S_i est l'image d'un point de s ou, ce qui revient au même, que tout point situé dans Σ_i est homothétique d'une telle image, est, au fond, une forme du théorème de Jordan (que, le plus souvent, on admet implicitement dans l'enseignement). On peut l'établir en se passant de ce théorème ou, plus exactement, en ne l'utilisant que pour dans le cas d'un parallélogramme, où sa démonstration est élémentaire: on remarquera, pour cela, qu'il existe certainement des points μ_0 de Σ_i qui correspondent à des points de s; tel est, par exemple, l'homothétique de l'image du centre du rectangle s, point qui est aussi voisin qu'on le veut du centre de Σ_i. Soit alors μ un autre point intérieur à Σ_i: au trait rectiligne $\mu_0\mu$ correspond, dans s (d'après le théorème des fonctions implicites), une ligne continue qui ne peut sortir de s, puisqu'il lui faudrait, pour cela (ξ et η étant continus sur cette ligne), traverser l'un des côtés $\xi = 0$, $\xi = \lambda_1$, $\eta = 0$, $\eta = \lambda_2$ de ce rectangle et que les homothétiques des images de ces côtes sont à l'extérieur de Σ_i.

(2) Le rapport de la quadruple bande comprise entre Σ_e et Σ_0 à l'aire de Σ_0 lui même (de même, à fortiori que le rapport analogue pour la bande comprise entre Σ_0 et Σ_i) est inférieur en valeur absolue à

$$\frac{1}{j}\left[\frac{4\tau^2 + 2\tau\left(\lambda_1\sqrt{A^2+C^2} + \lambda_2\sqrt{B^2+D^2}\right)}{\lambda_1\lambda_2}\right]$$

parallèles aux côtés menées par ces points de division, en n^2 rectangles partiels (s) égaux entre eux et homothétiques au premier. Dans le plan des XY, ces rectangles partiels auront pour images des figures (S) comprises chacune à l'intérieur d'un parallélogramme (S_e), comprenant chacune à son intérieur un parallélogramme (S_i) et dont on pourra, en conséquence, remplacer l'aire par $(j)s/n^2$, avec une erreur relative inférieure à la quantité ϑ (1) infiniment petite avec $1/n$, (j) étant la valeur du jacobien en l'un des sommets du rectangle partiel. C'est une telle aire que nous devrons multiplier par la valeur de la fonction $\varphi(x, y) = \Phi[f(x, y), g(x, y)]$ en ce sommet, pour faire ensuite la somme des produits obtenus et passer à la limite pour $n \to \infty$. Si (comme on sait qu'on en a le droit sans diminuer la généralité) on suppose la fonction à intégrer Φ constamment positive, l'erreur relative commise sur la somme sera inférieure à l'erreur relative maxima commise sur un terme quelconque, donc tendra vers zéro et l'on aura bien

$$\iint_S \Phi(X, Y)\, dX\, dY = \lim_{n \to \infty} \sum_1^{n^2} (S)\, \Phi(X, Y) =$$

$$= \lim \left\{ (1 + \vartheta') \sum_1^{n^2} (j)\, s\, \varphi(x, y) \right\} = \qquad (|\vartheta'| < |\vartheta|)$$

$$= \iint j\, \varphi(x, y)\, dx\, dy \qquad C.Q.F.D. \qquad [4]$$

6 bis. Toutefois, il faut, en toute rigueur, l'observer, le fait du nº 5 n'est établi et n'a même de sens que si la figure S, image du rectangle s, est quarrable. Mais c'est ce qui résulte de la construction du nº précédent. Celle-ci nous montre en effet la figure S comme comprise à l'intérieur d'un ensemble de parallélogrammes S_e et comprenant un ensemble de parallélogrammes S_i, ces derniers tous extérieurs les uns aux autres (puisque compris respectivement à l'intérieur des diverses figures (S) lesquelles, par hypothèse, ne se recouvrent pas mutuellement). Le rapport de l'aire polygonale ainsi circonscrite à l'aire inscrite étant inférieure à $\dfrac{1 + \vartheta}{1 - \vartheta}$ et tendant, par conséquent, vers l'unité, l'aire S possède bien la propriété voulue.

(1) D'après l'évaluation de ϑ (Note précédente), la convergence de cette quantité vers zéro est bien uniforme dans toute la région considérée.

7. Une fois établie pour un rectangle parallèle aux axes, la formule l'est par cela même, pour un ensemble de tels rectangles.

D'autre part, toute aire quarrable peut être approchée intérieurement par un ensemble p_i de rectangles inscrits et extérieurement par un ensemble p_e circunscrit, la différence $\Delta p = p_e - p_i$ tendant vers zéro. L'image ΔP de Δp aura aussi une aire qui tendra vers zéro comme le montre la formule [4], avec $\Phi = 1$, laquelle est applicable à la figure Δp, qui est elle même une forme de rectangles parallèles aux axes. Les intégrales doubles suivant Δp et suivant ΔP tendant également vers zéro, puisque φ est supposée bornée, la formule relative à l'aire quarrable s dérive de celle qui est relative à p_i par passage à la limite.

Tous ces raisonnements, exposés sur le cas des intégrales doubles, s'étendent d'eux mêmes au changement de variables dans une intégrale multiple d'ordre quelconque.

II

8. Nous examinerons, en second lieu, la définition de *l'aire d'une surface courbe.* L'idée qui se présente naturellement est de définir une telle aire comme limite de celle d'une surface polyèdrale inscrite, par analogie avec la longueur d'un arc de courbe définie comme limite du périmètre d'une ligne polygonale inscrite. On sait que cette méthode se heurte à l'objection classique de Schwarz.

Ceci signifie qu'il ne suffit pas d'imposer à la surface polyèdrale les conditions:

a) Les surfaces polyèdrales considérées Σ devront avoir tous leurs sommets sur la surface courbe donnée S, leurs contours étant des lignes polygonales inscrites dans le contour de S (*si cette dernière n'est pas fermée*) ;

Les faces des surfaces polyèdrales devront tendre vers zéro dans toutes leurs dimensions, et elles devront avoir des sommets aussi voisins que l'on voudra (à partir d'un certain moment) *d'un point arbitrairement choisi sur S;* mais qu'il faut y adjoindre les conditions;

b) Les angles que fait le plan d'une face quelconque avec le plan tangent à S en chacun de ses sommets devront tendre (uniformément) *vers zéro* (c'est à dire que le plus grand de ces angles, pour l'une des surfaces polyèdrales, devra tendre vers zéro à mesure que ces surfaces polyèdrales se succéderont) ;

c) Tous les dièdres des surfaces polyèdrales devront (1) *tendre uniformément vers* π.

Ces conditions sont distinctes de *a*), comme le montre l'exemple de Schwarz pour la première d'entre elles, alors que les conditions correspondantes relatives à une ligne polygonale inscrite dans un arc de courbe sont vérifiées d'elles mêmes lorsque les côtés de la ligne tendent tous vers zéro et que ses sommets se succèdent dans leur ordre naturel sur la courbe. On doit, ici, les incorporer dans l'hypothèse. Par contre, une fois stipulées toutes ces conditions, et moyennant des hypothèses simples sur la forme de S, on peut aisément démontrer que l'étendue de l'aire polyèdrale tend bien vers une limite, toujours la même, quelle que soit la loi d'inscription sous les conditions précédentes, et représentable par une intégrale double.

9. Nous supposerons que le plan tangent à S varie d'une manière continue (2).

De plus, pour commencer, nous admettrons que la portion de surface en question n'est coupée qu'en un point au plus par une parallèle à l'axe des z. Nous supposerons même qu'aucun de ces plans tangents n'est parallèle à l'axe des z.

Autrement dit, l'aire courbe S est en correspondance biunivoque avec sa projection s sur le plan des x, y et sans points de contour apparent relativement à ce plan. Elle est représentable par une équation $z = f(x, y)$, la fonction f ayant, en chaque point de s, des dérivées partielles p, q finies et continues.

L'angle du plan tangent avec l'axe des z aura donc un minimun $2\gamma_0$ effectivement atteint et, par conséquent, différent de zéro. Les plans des faces des surfaces Σ polyèdrales feront, avec ce même axe, à partir d'un certain moment, un angle supérieur à γ_0, en vertu de la condition *b*).

(1) Sans cela, on pourrait, autant de fois qu'on le voudrait, ajouter à Σ une surface polyèdrale fermée inscrite ayant une arête commune avec Σ ou remplacer une face Σ_k par une nouvelle surface polyèdrale inscrite (non intérieure à Σ_k) limitée au même contour que Σ_k et d'étendue ne tendant pas vers zéro. Il y a là une difficulté analogue à celle qu'a soulevée Schwarz, mais qui en est distincte.

(2) Les hypothèses que nous faisons ici sur la forme S sont également utilisées dans la plupart des démonstrations classiques, où l'ont fait correspondre à chaque portion de l'aire courbe une portion du plan tangent en l'un de ses points, l'étendue de S étant définie comme la somme des aires de ces écailles... mal jointes.

Un tel plan fera nécessairement, avec le plan projetant l'une des arêtes qu'il contient, un angle obtus inférieur à $\pi - \gamma_0$: il en résulte, en vertu de la condition c), que deux faces adjacentes de Σ se projetteront suivant deux polygones adjacents du plan des xy (c'est à dire suivant deux polygones situés de part et d'autre du côté commun). L'ensemble de ces polygones partiels $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ formera un polygone total σ inscrit dans le contour de s et dont, ses côtés tendant tous vers zéro, l'aire tendra vers celle de s.

10. Une quelconque Σ_k des facettes polyèdrales est liée à sa projection σ_k sur le plan des xy par le théorème bien connu de géométrie élémentaire qui donne

$$\Sigma_k = \frac{\sigma_k}{\cos(\nu_k, z)} \qquad [5]$$

en désignant par ν_k la normale au plan de la facette prise dans le sens qui fait avec la direction positive Oz un angle aigu : la somme des termes [5] qui fournit l'aire polyèdrale Σ est une somme arithmétique. Dans ces conditions, il va être aisé de voir que l'on peut, pour trouver la limite de la somme dont il s'agit, remplacer, au dénominateur de chaque terme, la direction ν_k par la direction n_k de la normale à S en un des sommets, notre somme étant ainsi remplacée par

$$\frac{\sigma_1}{\cos(n_1, z)} + \ldots\ldots + \frac{\sigma_k}{\cos(n_k, z)} + \ldots\ldots + \frac{\sigma_m}{\cos(n_m, z)} \qquad [5']$$

L'erreur relative ainsi commise sur la somme est en effet inférieure à la plus grande des erreurs relatives sur les différents termes. Or on a

$$|\cos(\nu_k, z) - \cos(n_k, z)| < |(\nu_k, z) - (n_k, z)|$$

et le second membre est, dans le trièdre formé par les trois directions ν_k, n_k, z, inférieur à (n_k, ν_k), c'est à dire tend vers zéro. Voilà donc une limite supérieure pour l'erreur *absolue* commise en remplaçant le dénominateur [5] par le dénominateur correspondant emprunté à [5']. Quant à l'erreur *relative*, comme ces erreurs portent sur des quantités supérieures à $\frac{1}{\sin \gamma_0}$, elle tend aussi uniformément vers zéro dans les conditions où nous nous plaçons.

Comme cos (n, z) est une fonction de la position d'un point sur S, c'est à dire de x, y, soit

$$\frac{1}{|\cos(n, z)|} = g(x, y)$$

la limite cherchée est celle d'une somme

$$\sigma_1 g(x_1, y_1) + \sigma_2 g(x_2, y_2) + \ldots\ldots + \sigma_m g(x_m, y_m) \qquad [S]$$

étendue à des aires partielles σ qui tendant vers zéro dans toutes leurs dimensions et dont la somme σ a pour limite s (1), on voit que cette limite existe, est la même pour toutes les lois d'inscription satisfaisant aux conditions indiquées et est donnée par l'intégrale double $\int\int g(x, y)dxdy$, la fonction $g(x, y)$ n'étant d'ailleurs autre que $\sqrt{p^2 + q^2}$.

11. Il reste une difficulté : celle de s'assurer qu'il existe au moins une manière d'inscrire dans S une surface polyèdrale satisfaisant aux conditions a), b), c).

Je dis que ces conditions seront toujours remplies si les facettes polyédrales (toujours assujetties à la condition de tendre vers zéro dans toutes leurs dimensions) se projettent sur le plan des xy suivant des triangles de côtés parallèles aux axes (2).

En premier lieu, s'il en est ainsi, l'angle $\widehat{NMN'}$ de Σ_h qui se projette suivant l'angle droit de σ_h sera toujours compris entre γ_0 et $\pi - \gamma_0$: car l'angle aigu de MN avec la direction de l'axe des z, lequel est au moins égal à γ_0, mesure l'angle de ce même côté MN avec le plan projettant MN' et, par conséquent, est au plus égal à l'angle aigu compris entre les deux droites MN, MN'. Ainsi, l'on aura toujours $\sin \widehat{NMN'} \geq \sin \gamma_0$.

De même, l'angle TMT' de même projection que le précédent et situé dans le plan tangent à S en M, aura son sinus supérieur à $\sin 2\gamma_0$.

(1) Les aires par lesquelles σ diffère de s étant d'étendue totale aussi petite qu'on veut et $g(x, y)$ bornée, les termes ajoutés par ces aires à la somme (S) tendraient au total, vers zéro.

(2) Il en est encore de même, généralement, si les σ_k sont des triangles dont le plus grand angle est inférieur à un angle fixe plus petit que π. Les considérations du nº 10 s'appliquent d'elles mêmes à ce nouveau cas et celles du nº 11 s'y étendent aisément.

12. En second lieu, considérons le côté MN de Σ_k situé dans un plan parallèle à celui de xz et la trace MT du même plan projetant sur le plan tangent en M. Le coefficient angulaire de cette dernière droite est p; le coefficient angulaire p_1 de la première est, d'après la formule des accroissements finis, la valeur de p en un certain point (x_1, y) de même ordonnée que M et d'abscisse comprise entre celles de M et de N. Comme, par hypothèse, p est fonction continue — et, par conséquent, uniformément continue — de x, y, à toute limite supérieure des côtés des triangles rectangles σ_k correspond une limite supérieure η, tendant vers zéro en même temps que la première, de la différence $p_1 - p$ et, par conséquent, de l'angle $\widehat{NMT}$. De même, l'angle analogue situé dans un plan parallèle à celui des yz et compris entre un côté de Σ_k et une droite du plan tangent en M tendra vers zéro en même temps que les dimensions des facettes.

13. Il suffit de combiner les résultats des deux n^{os} précédents pour obtenir celui que nous avons en vue (1).

Soient, en effet, d'une manière générale, δ, δ' deux directions dont les cosinus directeurs sont λ, μ, ν ; λ', μ' ν'. Le plan qu'elles déterminent a pour cosinus directeurs

$$\frac{\mu\nu' - \nu\mu'}{\sqrt{(\mu\nu' - \nu\mu')^2 + (\nu\lambda' - \lambda\nu')^2 + (\lambda\mu' - \mu\lambda')^2}}, \ldots\ldots, \ldots\ldots$$

Le dénominateur n'est autre que le sinus de l'angle formé par nos deux directions. Si donc ce sinus est limité inférieurement — ce qui est précisément le cas pour le sinus de l'angle en M du triangle MNT — ces derniers cosinus seront des fonctions continues des premiers et ne seront altérés que de quantités arbitrairement petites si $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu'$ le sont eux mêmes assez peu. Tenant compte du n° 12, on voit que la condition b) est vérifiée.

(1) On peut préciser par la remarque géométrique suivante. Sur la sphère de rayon 1 et de centre M, soient l'arc de grand cercle tt', tel que $\sin \widehat{tt'} \geq \sin \gamma_0$, et les deux points n, n' tels que $\widehat{n't} < \varepsilon$, $\widehat{n't'} < \varepsilon$: l'angle des deux grands cercles tt', nn' sera inférieur à la somme des angles que ces deux grands cercles font respectivement avec le grand cercle nt', angles dont les sinus sont plus petits que $\frac{\sin \varepsilon}{\sin \gamma_0}$, comme on le voit en appliquant l'analogie des sinus à chacun des triangles sphériques tnt', $tt'n'$ et tenant compte de ce que $\sin \widehat{nt'} \geq \sin \gamma_0$.

La condition *c*) en est une conséquence, étant donné que, par construction, les faces de chaques dièdre de Σ sont de part et d'autre du plan qui projette l'arête de ce dièdre.

Les restrictions qui concernent la manière dont S est située par rapport au plan des xy se lèvent en remarquant que l'on peut remplacer le plan des xy par l'un quelconque des deux autres plans coordonnées: la normale en un point quelconque de S fait avec l'un au moins des axes un angle inférieur à arc cos $\frac{1}{\sqrt{3}}$, et il suffit de diviser S, suivant que l'axe coordonné dont la direction est la plus rapprochée de celle de la normale est Ox, Oy ou Oz, en régions auxquelles on appliquera séparément la méthode précédente.

13 bis. Ici encore, il reste à prouver que cette subdivision peut se faire de manière que chacune des régions partielles se projette sur un plan coordonné suivant une aire quarrable.

Il en est certainement ainsi si la surface est réprésentée paramétriquement par des formules

$$x = \varphi(t, u) \quad , \quad y = \psi(t, u) \quad , \quad z = x(t, u)$$

les fonctions φ, ψ, $\varkappa$ admettant des dérivées premières continues, les trois déterminants fonctionnels

$$L_1 = \frac{D(y, z)}{D(t, u)} \quad , \quad L_2 = \frac{D(z, x)}{D(t, u)} \quad , \quad L_3 = \frac{D(x, y)}{D(t, u)}$$

ne s'annulant jamais ensemble et le point figuratif (t, u) décrivant, dans son plan, une aire quarrable ω. Supposons en effet pour commencer, le déterminant fonctionnel L_3 partout différent de zéro. Alors la projection de S sur le plan des xy sera elle-même une aire quarrable ou, tout au moins (1), une somme d'aires quarrables d'après les raisonnements des numéros 6 bis et 7.

Le cas où ce n'est pas toujours la même quantité L_i qui est différente de zéro se ramène au précédent. En effet, en vertu de la continuité — donc de la continuité uniforme — de ces L_i, la plus grande d'entre elles est partout supérieure en valeur absolue à un

(1) On sait que la correspondance entre x, y d'une part; t, u de l'autre n'est pas nécessairement biunivoque (de sorte que la projection de S sur le plan des xy pourrait se recouvrir partiellement); mais elle l'est dans tout carré de côté h, si h est suffisamment petit.

nombre fixe k et, d'autre part, on peut assigner le côté h d'un carré à côtés parallèles aux axes du plan des tu de manière que l'oscillation d'un quelconque des L à l'intérieur de n'importe quel carré ainsi tracé soit inférieure à $k/2$. L'aire ω pouvant être recouverte par un ensemble de carrés de côté h, la conclusion est démontrée.

Les conditions où nous venons de nous placer ne sont pas, il est vrai, celles à l'examen desquelles nous pouvons nous borner. Pour atteindre les formes les plus usuelles d'une surface S quelconque et, particulièrement, le cas où S est fermé, on sait qu'il est nécessaire de considérer sur la surface plusieurs régions rapportées, en général, à des coordonnées curvilignes différentes, se recouvrant d'ailleurs mutuellement de manière que chaque point de S soit intérieur (au sens strict) à l'une au moins d'entre elles et dans chacune des conditions postulées il y a un instant. Sans entrer dans l'examen détaillé de ce dernier cas, disons simplement qu'il s'élucide en remarquant : 1º que d'après ces hypothèses, si deux régions voisines sont rapportées, l'une aux coordonnées curvilignes t, u, l'autre aux coordonnées curvilignes v, w, le déterminant fonctionnel $\frac{D(v, w)}{D(t, u)}$ est, dans toute la partie commune aux deux régions, différent de zéro ; 2º que, en conséquence, à toute aire quarrable du plan des tu empruntée à cette partie commune correspond une aire quarrable du plan des vw.

III

14.. En terminant, je voudrais dire un mot de la définition purement analytique des fonctions circulaires. C'est une question qui a préoccupé plusieurs auteurs (en dernier lieu, par exemple, M. Landau, dans son Traité de Calcul différentiel et intégral).

Mon but est de la présenter sous un aspect particulier, en montrant comment elle s'introduit naturellement à propos de la théorie des quadratures élémentaires. La constatation que « l'on ne sait pas intégrer » un certain nombre de différentielles simples (telles que les différentielles elliptiques ou hyperelliptiques) apparaît tout d'abord à l'étudiant comme une faiblesse du Calcul Intégral. Il y a là une idée dont la fausseté apparaît si l'on essaie de s'imaginer ce qui aurait pu être ce Calcul en le supposant inventé par des mathématiciens sans contact avec le monde géométrique et, d'autre part, n'ayant pas encore songé aux logarithmes. Ces mathématiciens auraient pro-

cédé comme nous le faisons aujourd'hui pour intégrer les différentielles de fonctions rationnelles ; mais ils auraient seulement pu opérer leur réduction à deux d'entre elles, savoir

$$\frac{dx}{x} \qquad [6]$$

et

$$\frac{dx}{1+x^2} \qquad [7]$$

qu'il aurait fallu considérer comme « non intégrables élémentairement ».

Or bien, loin de les arrêter, cette circonstance n'aurait pas manqué de les conduire à l'étude de deux fonctions « nouvelles » : tout d'abord, de la fonction, définie pour toute valeur positive de x,

$$y = Lx = \int_1^x \frac{dx}{x} \qquad [6']$$

On sait qu'on parvient aisément (1) à démontrer, relativement à cette fonction Lx la propriété fondamentale $Lx + Lx' = L(xx')$.

En un mot, constater que « l'on ne sait pas intégrer » la différentielle [6], c'aurait été inventer les logarithmes.

On aurait, du même coup, inventé la fonction exponentielle, puisque la quantité [6′], égale à $-\infty$ pour $x = 0$ et à $+\infty$ pour $x = +\infty$, est constamment croissante ; une telle fonction $x = e^y$, définie pour toute valeur de y, par l'égalité $y = Lx$, (et d'ailleurs toujours positive), satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dy} = x \qquad [8]$$

et à la condition $e^0 = x(0) = 1$. Comme on voit immédiatement que deux solutions (non identiquement nulles) de [8] sont dans un rapport constant, on voit qu'il n'existe qu'une fonction $x(y)$ satisfaisant aux conditions précédentes, celle dont on obtient le développement en série entière.

15. On aurait ensuite à considérer l'intégrale indéfinie

$$x = \int_0^t \frac{dt}{1+t^2} \qquad [7']$$

(1) Voir, p. ex., notre *Cours d'analyse*, I, p. 32, Ex. 1° et p. 514.

qui a une valeur déterminée pour toute valeur réelle de t et qui reste finie pour t augmentant indéfiniment. Désignant provisoirement par I sa valeur pour $t = +\infty$ (et, par conséquent, par $-I$ sa valeur pour $t = -\infty$, puisque la quantité à intégrer est paire), on voit que, d'une manière analogue à ce qui vient d'être indiqué pour la fonction exponentielle, on définit ainsi, pour toute valeur de x comprise entre $-I$ et $+I$, une fonction inverse

$$t = \operatorname{tg} x$$

telle que l'égalité ainsi écrite soit équivalente à [7'].

D'autre part, l'étude des différentielles portant sur la racine carrée d'un polynôme du second degré aurait conduit, tout d'abord, à réduire le problème à l'intégration de

$$\frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \qquad [9]$$

Pour $a > 0$, cette intégration s'opère par des logarithmes; mais il n'en est plus de même pour $a < 0$: autrement dit, pour l'intégrale (à laquelle on peut alors toujours ramener celle de la différentielle [9] par un changement linéaire de variable)

$$x = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} \qquad [10]$$

Cette dernière intégrale, dans laquelle, jusqu'à nouvel ordre, nous prenons le radical positif, aurait pu être ramenée, par des méthodes bien connues, aux intégrales de fonctions rationnelles - en fait, à [7'] - ; mais on en obtient les propriétés d'une manière au moins aussi simple en l'étudiant directement.

Elle donne une valeur de x pour toute valeur de u comprise entre -1 et $+1$, et même pour $u = \pm 1$. Désignons par π l'intégrale [10] prise entre -1 et $+1$, de sorte que, pour $u = 1$, x est égal à $\frac{\pi}{2}$.

Entre les valeurs $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ de la variable x, il existe une fonction inverse

$$u = \sin x \qquad [11]$$

définie par l'égalité [10]. Celle-ci vérifie l'équation différentielle du premier ordre

$$u^2 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2 = 1 \qquad [12]$$

et, par conséquent tant que $\frac{du}{dx} \neq 0$, donc tant que $u \neq 1$, l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u = 0 \qquad [13]$$

(équivalente à la première toutes les fois que $\frac{du}{dx} \neq 0$). L'équation [13] admet une solution définie, pour toute valeur de x, par la série entière

$$U = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\ldots \qquad [14]$$

qui s'annule pour $x = 0$, pendant que sa dérivée

$$\frac{dU}{dx} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\ldots \qquad [15]$$

prend la valeur 1. Cette solution ne peut être que sin x, pour x compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, puisque $U^2 + \left(\frac{dU}{dx}\right)^2$ a une valeur constante, laquelle ne peut être que l'unité, ce qui, U étant nul avec x et sa dérivée étant initialement égale $+ 1$, entraîne nécessairement que x doit coïncider avec l'expression [10], où u est remplacé par U, il en est ainsi, tant que la limite supérieure d'intégration n'est pas devenue égale à ± 1, c'est à dire dans tout l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$.

Lorsque x dépasse la valeur $\frac{\pi}{2}$, la fonction u définie par la série [12] ne cesse pas d'exister, d'admettre des dérivées continues, et de vérifier l'équation du second ordre [13].

L'équation du premier ordre [12], qui en est la conséquence, laisserait le choix entre u identiquement égale à 1 à partir de $x = \frac{\pi}{2}$

(solution singulière) et $\frac{du}{dx} = -\sqrt{1-u^2}$; mais la solution singulière est exclue par l'équation [13], puisque la fonction continue $\frac{d^2u}{dx^2}$ est égale à 1 pour $x = \frac{\pi}{2}$. Nous n'avons pas à répéter la discussion bien connue qui s'ensuit et d'où résulte la définition de $u = \sin x$, de sa dérivée $\frac{du}{dx} = \cos x = v$ et l'égalité $u^2 + v^2 = 1$ pour toute valeur réelle de x, ainsi que la périodicité des deux fonctions ainsi formées.

L'équation différentielle linéaire et homogène [13] est aussi vérifiée par la fonction $v = \cos x$, la dérivée de celle-ci étant $-u$. Elle se transforme, d'autre part, en une équation du premier ordre en introduisant la dérivée logarithmique $\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$ ou, la dérivée logarithmique analogue $-t = \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}$, ici égale à $-\frac{u}{v}$ et qui vérifiera l'équation différentielle

$$\frac{dt}{dx} - (1 + t^2) = 0$$

Comme cette quantité s'annule avec x, on voit que x est égal à l'intégrale [7′] et que, par conséquent, le quotient $\frac{u}{v}$ est égal à la quantité précédemment définie $t = tg\, x$. (En particulier, la quantité désignée tout à l'heure par I n'est autre que $\frac{\pi}{2}$).

Enfin, quelles que soient les constantes A, B, l'expression $w = A \cos x + B \sin x$ est aussi une solution de [13], de sorte que, en la substituant à u dans le premier membre de [12], on obtient une constante m^2 (où m n'est défini qu'au signe près) : en la substituant dans l'intégrale indéfinie [10] multipliée par $\pm m$, le résultat ne peut différer de x que par une constante, et on a (en choisissant convenablement le signe de m)

$$w = m \sin (x + h) \qquad (h \text{ constant}).$$

Les conditions qui déterminent m et h, connaissant A et B, s'obtiennent en faisant $x = 0$ dans w et dans $\frac{dw}{dx}$, ce qui donne

$$A = m \sin h\,, \quad B = m \cos h \qquad [14]$$

et la solution de ce système en m et h est unique si l'on impose la condition que h soit compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, sa valeur étant dès lors donnée par l'intégrale [7'] avec $t = A/B$. Il en résulte que, inversement, m étant pris égal à 1 et h arbitrairement entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, l'expression w, avec les valeurs [14] de A, B, donne sin $(x + h)$. C'est le théorème d'addition (sous réserve de l'étendre, par périodicité, au cas de h non compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$).

Paris, Mai 1937.

ALGUNAS FORMULAS FUNDAMENTALES DE LAS FUNCIONES POLIGENAS DE UNA Y VARIAS VARIABLES

Por J. C. VIGNAUX

En la teoría de las funciones polígenas de una variable compleja $z = x + iy$; es decir funciones de la forma

$$w = f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y),$$

donde u y v son funciones continuas con derivadas parciales primeras continuas, *no ligadas* por las condiciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}; \qquad [1]$$

existen dos teoremas fundamentales debidos a M. Pompeiu; que generalizan ampliamente los clásicos teoremas de Cauchy de las funciones holomorfas.

El primero se traduce en la relación funcional

$$\int_C f(z)\, dz - 2i \iint_A D f(v)\, d\omega = 0$$

donde

$$D f(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y}\right]$$

es la *derivada areolar* de $f(z)$, C un contorno cerrado que limita un dominio (A).

Si la función es holomorfa en A, se tiene: $Df(z) \equiv 0$, y por tanto, resulta el teorema de Cauchy

$$\int_C f(z)\, dz = 0.$$

La fórmula fundamental de M. Pompeiu es

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-\xi} - \frac{1}{\pi}\iint_A \frac{Df(v)}{v-\xi}\,dw$$

la cual nos da, el valor de una función polígena en un punto cualquiera ξ interior al dominio A, cuando se conoce los valores de $f(z)$ sobre el contorno C y los valores de la derivada areolar $Df(z)$ en el interior de A.

Si la función $f(z)$ es holomorfa en A, resulta como caso particular la fórmula de Cauchy

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)\,dz}{z-\xi}. \qquad [2]$$

Por otra parte, M. Calugareano (¹) y Kasner han introducido el operador lineal

$$\overline{D}f(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial w}{\partial x} - i\frac{\partial w}{\partial y}\right]$$

que denominan « *derivada media* ».

La condición

$$\overline{D}f(z) = 0$$

es decir

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad [2]$$

define una categoría de funciones que se llaman *antimonógenas* (Calugareano) y que están íntimamente ligadas a las funciones monógenas. En efecto, las condiciones [2] resultan de las condiciones de monogeneidad [1] con la sustitución de $-y$ a y; por tanto, cada función monógena

$$P(x, y) + i\,Q(x, y),$$

origina una función antimonógena

$$P(x, -y) + i\,Q(x, -y).$$

(¹) G. Calugareano, (Thesis, Paris 1928).

Además M. Calugareano da la relación

$$\int_C f(z)\, d\bar{z} - 2i \iint_A \overline{D} f(v)\, d\omega = 0 \qquad [\gamma]$$

donde $\bar{z} = x - iy$ es la conjugada de $z = x + iy$.

En esta Nota me propongo extender a las funciones polígenas de varias variables los teoremas de Pompeiu y de Calugareano.

I. — Funciones de una variable

2. Integral conjugada. — De la fórmula $[\gamma]$, se deduce, si la función $f(z)$ es antimonógena en el dominio A

$$\int_C f(z)\, d\bar{z} = 0 \;;$$

es decir: *la integral conjugada de una función antimonógena en el interior de un dominio limitado por una curva cerrada C, es nula.*

Subsiste también el teorema recíproco análogo al teorema de Morera: *Sea una función $f(z)$ polígena en una región A; si la integral conjugada*

$$\int_C f(z)\, d\bar{z}$$

tomada sobre una curva cerrada C cualquiera situada en A es nula, $f(z)$ es una función antimonógena en A.

La demostración de este teorema se deduce fácilmente de la fórmula de Calugareano $[\gamma]$; teniendo presente que de la condición

$$\int_C f(z)\, d\bar{z} - 2i \iint_A \overline{D} f(v)\, d\omega = 0$$

resultan las condiciones de antimonogeneidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \;, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \;.$$

3. — Consideremos un dominio A limitado por el contorno cerrado C y $f(z)$ una función polígena en A. Sea ξ un punto cualquiera

interior a A y con centro en este punto tracemos un círculo δ, todo el interior a A. La función

$$\frac{f(z)}{\bar{z}-\bar{\xi}},$$

es continua para todo z de la región interior a C y exterior a δ (1), por tanto, la fórmula de Calugareano [γ] es aplicable; y teniendo presente que por ser $\frac{1}{\bar{z}-\bar{\xi}}$ función antimonógena en dicho dominio, hace las veces de constante a los efectos de la derivación media, es decir

$$\bar{D}\left[\frac{f(z)}{\bar{z}-\bar{\xi}}\right] = \frac{1}{\bar{z}-\bar{\xi}}\,\bar{D}f(z)\,;$$

se tiene

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c+\delta}\frac{f(z)}{\bar{z}-\bar{\xi}}\,d\bar{z} - \frac{1}{\pi}\iint_{A-\sigma}\frac{\bar{D}f(v)}{\bar{v}-\bar{\xi}}\,d\omega = 0 \qquad [2]$$

donde σ representa el área del círculo δ.

Por otra parte, la integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta}\frac{f(z)}{\bar{z}-\bar{\xi}}\,d\bar{z}\,,$$

difiere del valor $f(\bar{\xi})$, tan poco como se quiera. Si M es un número positivo fijo, tal que:

$$|\bar{D}f(z)| < M\,,$$

y ponemos

$$\bar{v}-\bar{\xi} = \rho e^{i\varphi}\,,$$

resulta

$$\left|\iint_{\delta}\frac{\bar{D}f(z)}{\bar{v}-\bar{\xi}}\,d\omega\right| \leq \iint_{\delta}\frac{|\bar{D}f(z)|}{|\bar{v}-\bar{\xi}|}\,d\omega < M\iint_{\delta}d\rho\,d\varphi < 2\pi R M$$

(1) En este caso, la variable $\bar{z}$ pertenece a la región simétrica respecto del eje real de dicha región.

Según esto, la igualdad [2] nos da

$$\left| f(\bar{\xi}) - \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{\bar{z}-\bar{\xi}}\, d\bar{z} + \frac{1}{\pi}\iint_A \frac{\bar{D}f(v)}{\bar{v}-\bar{\xi}}\, d\omega \right| < 2\pi R M + \varepsilon$$

es decir

$$f(\bar{\xi}) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{\bar{z}-\bar{\xi}}\, d\bar{z} - \frac{1}{\pi}\iint_A \frac{\bar{D}f(v)}{\bar{v}-\bar{\xi}}\, d\omega \qquad [3]$$

que es la fórmula buscada. Ello nos prueba que el valor de una función polígena en un punto conjugado de un punto interior de un doimnio cerrado A, está determinado por los valores que $f(z)$ toma en el contorno C y por los valores de la derivada media en el interior A mediante una integral conjugada.

Como caso particular resulta la fórmula

$$f(\bar{\xi}) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{\bar{z}-\bar{\xi}}\, d\bar{z},$$

cuando la $f(z)$ es antimonógena en A, puesto que es entonces: $\bar{D}f(z) \equiv 0$. Ella nos da el valor de la función antimonógena $f(z)$ en un punto ξ interior al contorno simétrico respecto del eje real conociendo los valores de la misma función a lo largo del contorno C mediante una integral conjugada.

II. — Funciones de dos variables

Sean

$$z = x + i\,y \quad , \quad z' = x' + i\,y' ,$$

dos variables complejas independientes, las cuales representaremos por los puntos $M(x, y)$, $M'(x', y')$ en dos planos coordenados. Consideremos dos regiones simples A y A' situadas respectivamente en dichos planos y sea: $w = f(z, z')$ una función polígena de las variables z, z' en el dominio (A, A') (1).

(1) J. C. Vignaux, *Anales de la S. C. Argentina*, Julio de 1935, EI, T. CXX.

Sea además, $\widehat{ab}$ un arco de curva situado en A y $\widehat{a'b'}$ un arco de curva de A'; y dividámoslos en arcos parciales, mediante los puntos ordenados

$$z_0, z_1 \ldots z_i \quad , \quad z_{n-1}, z \quad ; \quad z_o', z'_1 \ldots z'_j \ldots z'_{m-1}, z'$$

y consideremos la sumatoria doble

$$S_{m,n} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} f(\alpha_i, \beta_i)(z_i - z_{i-1})(z_j' - z'_{j-1})$$

Cuando m y n aumenta indefinidamente de modo que todos los

$$| z_i - z_{i-1} | \longrightarrow 0 \quad , \quad | z_j' - z'_{j-1} | \longrightarrow 0 \, ,$$

$S_{m,n}$ tiende hacia un límite determinado S que se indica con la notación

$$S = \int_{\widehat{ab}} \int_{\widehat{a'b'}} f(z, z')\, dz\, dz'$$

y se llama la integral doble sobre los arcos $\widehat{ab}$ y $\widehat{a'b'}$.

Si

$$f(z, z') = P(x, y, x'\, y') + i\, Q(x, y, x'\, y')$$

donde P y Q son funciones continuas de las variables reales x, x', y, y'; se tiene entonces (1):

$$S = \int_{\widehat{ab}} dx \int_{a'b'} P\, dx' - \int_{\widehat{ab}} dy \int_{\widehat{a'b'}} P\, dy' -$$

$$- \int_{\widehat{ab}} dx \int_{a'b'} Q\, dy' - \int_{\widehat{ab}} dy \int_{\widehat{a'b'}} Q\, dx'$$

$$+ i \int_{\widehat{ab}} dx \int_{\widehat{a'b'}} Q\, dx' - i \int_{\widehat{ab}} dy \int_{\widehat{a'b'}} Q\, dy'$$

$$+ i \int_{\widehat{ab}} dx \int_{\widehat{a'b'}} P\, dy' + i \int_{\widehat{ab}} dy \int_{a'b'} P\, dx' \, ,$$

(1) Véase: GOURSAT, *Cours d'Analyse*, T. II, p. 267.

Aplicando esta fórmula a dos curvas c y c', siendo c' cerrada, se tiene:

$$\int_c \int_{c'} f(z, z')\, dz\, dz' = \int_c dx \int_{c'} P\, dx' - Q\, dy' + i \int_c dx \int_{c'} Q\, dx' + P\, dy' +$$

$$- \int_c dy \int_{c'} Q\, dx' + P\, dy' + i \int_c dy \int_{c'} P\, dx' - Q\, dy'$$

Teniendo presente las fórmulas de Green

$$\int_{c'} P\, dx' - Q\, dy' = - \iint_{A'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x'} + \frac{\partial P}{\partial y'} \right) dx'\, dy'$$

$$\int_{c'} Q\, dx' + P\, dy' = \iint_{A'} \left(\frac{\partial P}{\partial x'} - \frac{\partial Q}{\partial y'} \right) dx',\, dy' ,$$

la relación anterior, resulta

$$\int_c \int_{c'} f(z, z')\, dz\, dz' = \int_c dx \iint_{A'} \left[\left(- \frac{\partial Q}{\partial x'} - \frac{\partial P}{\partial y'} \right) + \right.$$

$$\left. + i \left(\frac{\partial P}{\partial x'} - \frac{\partial Q}{\partial y'} \right) \right] dx'\, dy' -$$

$$- \int_c dy \iint_{A'} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x'} - \frac{\partial Q}{\partial y'} \right) + i \left(\frac{\partial Q}{\partial x'} + \frac{\partial P}{\partial y'} \right) \right] dx'\, dy'$$

Además; puesto que

$$2 i\, D_{z'} f(z, z') = - \left(\frac{\partial Q}{\partial x'} + \frac{\partial P}{\partial y'} \right) + i \left(\frac{\partial P}{\partial x'} - \frac{\partial Q}{\partial y'} \right)$$

se tiene finalmente

$$\int_c \int_{c'} f(z, z')\, dz\, dz' = 2 i \int_c dx \iint_{A'} D_{z'} f(v, v')\, d\omega' - 2 \int_c dy \iint_{A'} f(v, v')\, d\omega'$$

$$= 2 \int_c (i\, dx - dy) \iint_{A'} D_{z'} f(v, v')\, d\omega'$$

es decir

$$\int_c \int_{c'} f(z, z')\, dz\, dz' - 2 i \int_c dz \iint_{A'} D_{z'} f(v, v')\, d\omega' = 0 , \qquad [\alpha]$$

Esta fórmula constituye la extensión de la fórmula de Pompeiu, a las funciones de dos variables complejas.

Del mismo modo resulta, si la curva c es cerrada y limita el dominio A

$$\int_{c'}\int_{c} f(z, z')\, dz\, dz' + 2i\int_{c'} dz' \iint_{A} D f(v, v')\, d\omega = 0 \qquad [\beta]$$

Si la función es holomorfa, se tiene

$$D_z f(z, z') \equiv 0 \quad , \quad D_{z'} f(z, z') \equiv 0 \,,$$

por tanto, las fórmulas [α] o [β] nos da

$$\int_{c}\int_{c'} f(z, z')\, dz\, dz' = 0$$

que constituye el teorema de H. Poincaré para estas funciones.

Para las integrales dobles conjugadas se obtienen fórmulas análogas en las cuales figuran las derivadas simétricas parciales.

4. Integral doble conjugada. — Consideremos ahora la sumatoria

$$\overline{S}_{m,n} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} f(\alpha_i, \beta_i)\, (\overline{z}_i - \overline{z}_{i-1})\, (\overline{z}'_j - \overline{z}'_{j-1})$$

donde

$$\begin{cases} z = x + iy \\ z' = x' + iy' \end{cases} , \qquad \begin{cases} \overline{z} = x - iy \\ \overline{z}' = x' - iy' \end{cases} ;$$

el límite de $\overline{S}_{m,n}$ es un número que indicaremos con la notación

$$\overline{S} = \int_{\widehat{ab}}\int_{\widehat{a'b'}} f(z, z')\, d\overline{z}\, d\overline{z}'$$

y llamaremos la *integral doble conjugada de la función* $f(z, z')$.

Razonando en la misma forma que en el caso anterior, es fácil establecer la relación siguiente:

$$\begin{aligned} \overline{S} = & \int_{\widehat{ab}} dx \int_{\widehat{a'b'}} P\, dx' - \int_{\widehat{ab}} dy \int_{\widehat{a'b'}} P\, dy' \\ & + \int_{\widehat{ab}} dx \int_{\widehat{a'b'}} Q\, dy' + \int_{\widehat{ab}} dy \int_{\widehat{a'b'}} Q\, dx' \\ & + i \int_{\widehat{ab}} dx \int_{\widehat{a'b'}} Q\, dx' - i \int_{\widehat{ab}} dy \int_{\widehat{a'b'}} Q\, dy' \\ & - i \int_{\widehat{ab}} dx \int_{\widehat{a'b'}} P\, dy' - i \int_{\widehat{ab}} dy \int_{\widehat{a'b'}} P\, dx' \end{aligned}$$

Esta relación se puede escribir también en la forma siguiente:

$$\int_{\widehat{ab}}\int_{\widehat{a'b'}} f(z, z')\, dz\, dz' = \int_{\widehat{ab}} (dx - i\, dy) \int_{\widehat{a'b'}} (P + i\, Q)\, (dx' - i\, dy') =$$

$$= \int_{\widehat{ab}} dz \int_{\widehat{a'b'}} f(z, z')\, dz',$$

y cuyo significado es inmediato.

Si aplicamos à un contorno cerrado c', se tiene:

$$\int_c \int_{c'} f(z, z')\, d\bar{z}\, d\bar{z}' = \int_c dx \int_{c'} [(P\, dx' + Q\, dy') + i\, (Q\, dx' - P\, dy')]\, dx'\, dy'$$

$$+ \int_c dy \int_{c'} [(-P\, dy' + Q\, dx') - i\, (P\, dx' + Q\, dy')]\, dx'\, dy'$$

de donde, teniendo presente las fórmulas de Green, resulta

$$\int_c \int_{c'} f(z, z')\, dz\, dz' = 2 \int (i\, dx + dy) \iint_{A'} \overline{D}_{z'} f(v, v')\, d\omega'$$

es decir

$$\int_c \int_{c'} f(z, z')\, dz\, dz' - 2i \int_c dz \iint_{A'} \overline{D}_{z'} f(v, v')\, d\omega' = 0 \qquad [\alpha']$$

donde $\overline{D}_z$ es la derivada simétrica parcial respecto a z'.

Igualmente se tiene, si c es cerrado

$$\int_c \int_{c'} f(z, z')\, dz\, dz' + 2i \int_{c'} dz' \iint_{A} \overline{D}_z f(v, v')\, d\omega' = 0. \qquad [\beta']$$

Si la función es antimonógena, resulta

$$\overline{D}_z f(z, z') = 0 \quad \text{y} \quad \overline{D}_{z'} f(z, z') = 0$$

por tanto la $[\alpha']$ o $[\beta']$, nos dan

$$\int_c \int_{c'} f(z, z')\, d\bar{z}\, d\bar{z} = 0 .$$

En otro lugar (1) he dado para las funciones polígenas de dos variables, la extensión de la fórmula de Pompeiu:

$$f(\xi, \xi') = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_c dz \int_{c'} \frac{f(z, z')\, dz'}{(z-\xi)(z'-\xi')} -$$
$$-\frac{1}{\pi}\iint_A \frac{D_z f(v, v')}{v-\xi}\, d\omega - \frac{1}{\pi}\iint_{A'} \frac{D_{z'} f(v, v')}{v'-\xi'}\, d\omega' -$$
$$-\frac{1}{(\pi i)^2}\iint_A \frac{d\omega}{v-\xi}\iint_{A'} \frac{D^2_{z,z'} f(v, v')}{v'-\xi'}\, dw' \qquad [1]$$

donde $D_z f$ y $D_{z'} f$, representan las *derivadas areolares parciales* de $f(z, z')$.

Cuando la $f(z, z')$ es holomorfa en el dominio $[A, A']$, se tiene, como caso particular, la fórmula de Hartogs

$$f(\xi, \xi') = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_c dz \int_{c'} \frac{f(z, z')}{(z-\xi)(z'-\xi)}\, dz' .$$

Esta fórmula se puede también deducir, considerando la función polígena

$$\frac{f(z, z')}{(z-\xi)(z'-\xi')} \qquad [2]$$

en la región asociada $[A - \sigma, A' - \sigma']$ donde σ y σ' representan las áreas de dos círculos de centro en ξ y ξ' respectivamente y completamente interiores de las regiones A y A'. Aplicando a la [2] la fórmula [2], nº (1) y razonando como en el caso del nº 2, se obtiene la [1].

Del mismo modo, partiendo de la función

$$\frac{f(z, z')}{(\overline{z}-\overline{\xi})(\overline{z'}-\overline{\xi'})}$$

y aplicando la fórmula [β] del nº 3, se deduce la fórmula

$$f(\overline{\xi}, \overline{\xi'}) = \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_c d\overline{z} \int_{c'} \frac{f(z, z')\, d\overline{z'}}{(\overline{z}-\overline{\xi})(\overline{z'}-\overline{\xi'})} -$$
$$-\frac{1}{\pi}\iint_A \frac{D_z f(v, v')}{\overline{v}-\overline{\xi}}\, du - \frac{1}{\pi}\iint_{A'} \frac{D_{z'} f(v, v')}{\overline{v'}-\overline{\xi'}}\, dw' -$$
$$-\frac{1}{(\pi i)^2}\iint_A \frac{dw}{v-\xi'}\iint_{A'} \frac{D^2_{z,z'} f(v, v')}{\overline{v'}-\overline{\xi'}}\, dw'$$

(1) Loc. cit.

Observación. — Las pruebas de esta Nota estaban ya corregidas, cuando recibí, gracias a la gentileza de su autor, el doctor E. Martinelli, una importante memoria (*Sulle funzioni poligene di due variabili complesse,* Reale Accademia d' Italia, *Estratto* nº 3, 1937. Roma), y por la cual me informo, que el ilustre matemático italiano Prof. A. Tonolo, ha publicado simultáneamente con mi memoria de la Sociedad Científica antes citada, una Nota « *Sulle funzione complesse di più variabili olomorfe di ordine n* » (Rendiconti del *Seminario Matemático,* Padova, nº 1-3 (1935), en la cual da una fórmula análoga a la [1] nº 4, y extiende a las funciones de varias variables, los resultados de las funciones analíticas de orden n de P. Burgatti (*Sulle funzioni analitiche di ordine n,* « Bulletino dell' Unione matem. italiana », 1922, f. 1).

Entre los resultados importantes obtenidos por Martinelli, se destacan sin duda las dos fórmulas que propone como extensión de las fórmulas de Cauchy y de Pompeiu.

UNA PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LA CURVA DE VIVIANI Y OTRAS CUESTIONES CONEXAS

Por ANTONIO VALEIRAS

---

1. — Llamando: (X, Y, Z) a las coordenadas generales de un punto del espacio; $(\varepsilon, \eta, \zeta)$ a las coordenadas de un punto de la esfera de radio 1 con centro en 0, y (x, y) a las coordenadas de un punto del plano: $Z = 0$, si adoptamos como centro de proyección el punto $A \equiv (0/0/1)$ y como cuadro el plano de las (x, y), entonces: Entre las coordenadas de un punto de la esfera y su correspondiente proyección estereográfica, se verifican las siguientes relaciones:

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta} \quad , \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta}$$

y sus inversas:

$$\xi = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} \quad , \quad \eta = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} \quad , \quad \zeta = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}$$

las cuales definen completamente a la transformación considerada.

Además, si una curva esférica se obtiene al cortar a dicha superficie con la superficie que tiene como ecuación: $F(X, Y, Z) = 0$, luego su proyección estereográfica será una curva que tendrá como ecuación:

$$F\left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}\right) = 0 .$$

2. — Esto establecido, sabemos que la curva de Viviani se obtiene cortando una esfera con un cilindro circular recto de radio igual a la mitad del radio de la esfera, y dispuesto de tal manera que una de sus generatrices coincida con un diámetro de la misma.

Para la esfera anteriormente considerada podremos tomar p. ej. el cilindro que tiene como ecuación:

$$Y^2 + Z^2 - Z = 0\,,$$

en cuyo caso el nodo de la curva viene a coincidir con el centro de la proyección estereográfica.

La ecuación de la curva imagen será, según lo dicho anteriormente, la siguiente:

$$\frac{4y^2}{(x^2+y^2+1)^2} + \frac{(x^2+y^2-1)^2}{(x^2+y^2+1)^2} - \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} = 0$$

y después de reducciones sencillas, se obtiene:

$$x^2 - y^2 = 1$$

lo que nos permite afirmar esta proposición que consideramos fundamental en la teoría de la curva, a saber: *La proyección estereográfica de la curva de Viviani, efectuada tomando como centro de proyección el nodo de la misma, es una hipérbola equilátera, cuyos vértices coinciden con los de la curva dada.*

3. — La importancia de este teorema es evidente. Conservándose en la transformación las circunferencias y los ángulos, de toda propiedad de la hipérbola, que pueda enunciarse en tales términos, se deduce a través de la proyección estereográfica una propiedad correlativa de la curva esférica.

Tomemos el ejemplo más inmediato y veamos en qué se convierte la conocida propiedad de la tangente a la hipérbola, de ser bisectriz del ángulo formado por los radios vectores del punto de contacto.

A los focos de la hipérbola: $F_1 \equiv (-\sqrt{2}/0)$, $F_2 \equiv (\sqrt{2}/0)$, corresponden los focos de la curva de Viviani: $F' \equiv \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3} \mid 0 \mid \frac{1}{3}\right)$ $F'' \equiv \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \mid 0 \mid \frac{1}{3}\right)$, y si P es un punto de la curva esférica y M su correspondiente proyección sobre la hipérbola, a las rectas: F_1M, F_2M, corresponden las circunferencias: $F'PA$, $F''PA$, y la bisectriz del ángulo formado por las tangentes a éstas últimas en el punto P será la tangente a la curva de Viviani en dicho punto.

4. — Si descomponemos la ecuación de la hipérbola, haciendo:

$$x + y = t \quad , \quad x - y = \frac{1}{t}$$

se obtienen:

$$x = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) \quad , \quad y = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$$

que constituyen —al variar t— las ecuaciones paramétricas de la curva.

Substituyendo en las fórmulas de la proyección estereográfica, después de reducciones sencillas resultan:

$$\xi = \frac{2t}{t^2 + 1} \quad , \quad \eta = \frac{2t\,(t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^2} \quad , \quad \zeta = \frac{(t^2 - 1)^2}{(t^2 + 1)^2}$$

o bien, puesto que con estas fórmulas se verifica idénticamente la condición: $\varepsilon^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$, y por lo tanto no es indispensable fijarlo mediante la notación:

$$X = \frac{2t}{t^2 + 1} \quad , \quad Y = \frac{2t\,(t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^2} \quad , \quad Z = \frac{(t^2 - 1)^2}{(t^2 + 1)^2}$$

que son las ecuaciones paramétricas de la curva de Viviani.

La determinación del valor parámetro: t, y de su recíproco: $\frac{1}{t}$, que corresponden a un punto dado: P, de la curva, puede efectuarse gráficamente de la siguiente manera:

Dado el punto: P, se obtiene su proyección estereográfica: M, que será un punto de la hipérbola imagen.

Ahora, si por M se trazan las paralelas respectivamente a la segunda y a la primera bisectriz de los ejes (x, y), éstas cortarán al eje x en puntos cuyas abscisas son precisamente: t y $\frac{1}{t}$, como se deduce de las ecuaciones en que ha sido descompuesta la ecuación de la hipérbola.

5. — Las ecuaciones obtenidas resultan particularmente ventajosas en las aplicaciones a causa de la sencilla significación del parámetro.

Así, para obtener las intersecciones de la curva con un plano arbitrario:

$$aX + bY + cZ + d = 0 ,$$

debemos resolver la ecuación resultante:

$$a \cdot \frac{2t}{t^2 + 1} + b \cdot \frac{2t(t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^2} + c \cdot \frac{(t^2 - 1)^2}{(t^2 + 1)^2} + d = 0 ,$$

es decir:

$$2a(t^3 + t) + 2b(t^3 - t) + c(t^4 - 2t^2 + 1) + d(t^4 + 2t^2 + 1) = 0$$

o sea:

$$(c + d)\, t^4 + 2(a + b)\, t^3 + 2(d - c)\, t^2 + 2(a - b)\, t + (c + d) = 0 .$$

Las cuatro raíces: t_1, t_2, t_3, t_4, de esta ecuación substituídas en las ecuaciones paramétricas nos dan las coordenadas de los cuatro puntos de intersección buscados.

Ahora bien: si sobre la curva tomamos tres puntos, correspondientes p. ej. a los valores: t_1, t_2, t_3, del parámetro, queda por ellos determinado un plano, el cual corta ulteriormente a la curva en un cuarto punto correspondiente a un cierto valor: t_4, del parámetro, y así necesariamente entre los parámetros de cuatro puntos coplanares debe verificarse una relación, la cual permitirá deducir uno de ellos cuando se conozcan los otros tres.

Esta relación asume una forma sencillísima en nuestro caso. Puesto que en la ecuación resultante el primero y el último coeficiente son iguales (ya que ambos valen: $c + d$) el producto de las cuatro raíces de dicha ecuación valdrá: 1, o sea:

$$t_1\, t_2\, t_3\, t_4 = 1 ,$$

de modo que: *La condición para que cuatro puntos sean coplanares consiste en que el producto de los cuatro parámetros correspondientes valga 1.*

De allí resulta:

$$t_4 = \frac{1}{t_1\, t_2\, t_3}$$

lo que nos da explícitamente: t_4 cuando se conocen: t_1, t_2, t_3.

6. — Se podría decir también que la condición anterior es igualmente la condición para que cuatro puntos estén sobre una circunferencia, y *al transformar estereográficamente la propiedad, resulta que ésta es también la condición para que cuatro puntos de la hipérbola imagen se encuentren igualmente sobre una circunferencia.*

En esta última forma se restablece para la hipérbola una proposición análoga a dos teoremas conocidos de Joachimstal relativos a la elipse y a la parábola, a saber:

I) La condición para que cuatro puntos de una elipse se encuentren sobre una circunferencia consiste en que la suma de sus anomalías excéntricas sea nula.

II) La condición para que cuatro puntos de una parábola se encuentren sobre una circunferencia consiste en que el centro de las medias distancias de los mismos se encuentre sobre el eje de la curva.

Pero no hemos visto, hasta donde alcanzan nuestras informaciones, el teorema correlativo para la hipérbola, y *como nuestra demostración parece aplicarse solamente al caso particular de la hipérbola equilátera, nos proponemos ahora obtenerla en el caso general.*

Con las notaciones usuales, sabemos que la ecuación de la hipérbola referida a sus asíntotas es: $xy = \frac{c^2}{4}$, de la cual se deducen inmediatamente como ecuaciones paramétricas:

$$x = \frac{c\,t}{2} \quad , \quad y = \frac{c}{2t} \; .$$

Ahora, respecto del sistema de ejes oblicuos formado por las asíntotas, la ecuación general de una circunferencia es:

$$x^2 + y^2 + 2\,x\,y \cos\omega + 2A\,x + 2B\,y + C = 0 \; ,$$

y para determinar las intersecciones de la misma con la hipérbola anterior es necesario resolver la ecuación resultante:

$$\frac{c^2 t^2}{4} + \frac{c^2}{4\,t^2} + \frac{c^2 \cos\omega}{2} + A\,c\,t + \frac{B\,c}{t} + C = 0$$

o sea:

$$c^2 t^4 + c^2 + 2c^2 \cos\omega \,.\, t^2 + 4\,A\,c t^3 + 4\,B\,c t + 4\,C t^2 = 0$$

es decir:

$$c^2 t^4 + 4\,A\,c t^3 + 2\,(c^2 \cos\omega + 2C)\,t^2 + 4\,B\,c t + c^2 = 0 \; .$$

Lo mismo que en la cuestión anterior, por ser iguales los coeficientes extremos, resulta:

$$t_1\, t_2\, t_3\, t_4 = 1$$

lo cual justifica la proposición en el caso general.

7. — El teorema anterior permite construir en una forma muy sencilla el círculo osculador en un punto genérico de la hipérbola.

Si éste es M', correspondiente al valor: t' del parámetro, en él se encuentran reunidas tres intersecciones, p. ej.: $t_1 = t_2 = t_3 = t'$, y existe una intersección ulterior: M'' correspondiente al valor: t_4 del parámetro, el cual designaremos por t'' para unificar la notación.

Pero, puesto que $t_1 t_2 t_3 t_4 = 1$, resulta:

$$t'' = \frac{1}{t'^3}$$

Obtenido de esta manera el punto: M'', el círculo osculador está perfectamente determinado sabiendo que pasa por M' y M'' y que además es tangente en el primero a la tangente correspondiente de la hipérbola.

Y si excepcionalmente ocurriera que coinciden M' y M'', esto revelaría que nos encontramos en un vértice de la cónica y apelaríamos a las construcciones elementales correspondiente a dicho caso (1).

Basta luego una proyección estereográfica para deducir el círculo osculador, y por lo tanto el plano osculador en el punto correspondiente de la curva de Viviani.

8. — En este mismo terreno, como corolario del teorema anterior, se obtiene también la siguiente proposición:

Los cuatro planos osculadores en cuatro puntos coplanares de una curva de Viviani cortan ulteriormente a la curva en otros cuatro puntos igualmente coplanares.

En efecto, sean los cuatro planos osculadores en los puntos: t_1, t_2, t_3, t_4, tales que:

$$t_1\, t_2\, t_3\, t_4 = 1\,.$$

Estos cortan ulteriormente a la curva en los respectivos puntos: t'_1, t'_2, t'_3, t'_4, tales que:

$$t_1^3 t_1' = 1 \quad , \quad t_2^3 t_2' = 1 \quad , \quad t_3^3 t_3' = 1 \quad , \quad t_4^3\, t_4' = 1$$

(1) V. p. ej: Notas sobre la determinación elemental del centro de curvatura en los vértices de las cónicas, por C. C. D., Revista de mat. y fís. elem. año II, Núm. 9 (21), Enero 1921.

las cuales multiplicadas miembro a miembro, y teniendo en cuenta la primera relación, nos dan:

$$t_1' \, t_2' \, t_3' \, t_4' = 1$$

lo que nos dice que también estos cuatro puntos son coplanares.

Es claro que vale el teorema correlativo para la hipérbola, que tampoco sabemos si ha sido enunciado con anterioridad.

9. — Queremos decir algo a propósito de las propiedades curiosas que han hecho de la curva de Viviani una curva clásica de los cursos de matemáticas, y que se relacionan con el área y el volumen del hemisferio sobrante, y de las cuales la primera ha servido también para descubrirla.

Las fórmulas relativas a la proyección estereográfica imponen en la esfera un sistema natural de coordenadas curvilíneas, que tampoco hemos visto emplear en estas cuestiones, a saber: el que está constituído por las curvas que se deducen en tales fórmulas suponiendo respectivamente: $x = C^{te}$, $y = C^{te}$. Tales son las circunferencias determinadas sobre la superficie esférica por los haces de planos trazados por el centro de la proyección estereográfica y cuyos ejes son respectivamente paralelos al eje de las ordenadas y al eje de las abscisas.

Llamando: ds al elemento de arco en el plano: (x, y), y ds_1 al elemento de arco correspondiente sobre la esfera, sabemos según la teoría de las superficies que

$$ds_1^2 = E\,dx^2 + 2\,F\,dx\,dy + G\,dy^2$$

donde:

$$E = \Sigma \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 \quad , \quad F = \Sigma \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) , \; G = \Sigma \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2$$

y efectuado el cálculo obtenemos:

$$E = \frac{4}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \quad , \quad F = 0 \quad , \quad G = \frac{4}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

y por lo tanto, y puesto que: $dx^2 + dy^2 = ds^2$, resulta:

$$ds_1^2 = \frac{4}{(x^2 + y^2 + 1)^2}\, ds^2$$

Este resultado expresa, sin más cálculos, en virtud de argumentos bien conocidos de la teoría de las superficies, que la proyección estereográfica es una transformación conforme, cuya razón de semejanza es: $\frac{2}{x^2+y^2+1}$

Pero entonces, llamando: $d\,\sigma_1$ y $d\,\sigma$ a los elementos de áreas correspondientes en una proyección estereográfica, la razón entre ambos será igual al cuadrado de la razón de los elementos de arco, o sea: $\frac{4}{(x^2+y^2+1)^2}$, y por lo tanto podemos escribir:

$$d\,\sigma_1 = \frac{4}{(x^2+y^2+1)^2}\,d\,\sigma$$

como se deduce también, en forma inmediata, de la fórmula general: $d\,\sigma_1 = \sqrt{EG - F^2}\,d\,\sigma$.

De aquí resulta que si: Ω_1 es un área esférica cuya proyección estereográfica es: Ω, se verificará:

$$\Omega_1 = \iint_{\Omega} \frac{4\,dx\,dy}{(x^2+y^2+1)^2} \,.$$

El cálculo de esta integral doble se efectúa muy fácilmente transformándola en coordenadas polares, con lo cual, descomponiéndola en integrales simples nos da lo siguiente:

$$\Omega_1 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\rho_2(\theta)}^{\rho_2(\theta)} \frac{4\,\rho}{(\rho^2+1)^2}\,d\rho \;;$$

y como la integral respecto de ρ vale:

$$\left[\frac{-2}{\rho^2+1}\right]_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} = \frac{2\,(\rho_2^2 - \rho_1^2)}{(\rho_1^2+1)\,(\rho_2^2+1)}$$

resulta en definitiva:

$$\Omega_1 = 2\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{(\rho_1^2+1)\,(\rho_2^2+1)}\,d\,\theta\,,$$

fórmula que parece igualmente nueva.

En la aplicación de la misma —parece obvio recordarlo— es menester evitar la presencia de elementos simétricos respecto del polo 0 en el plano (x, y), y para los cuales la suma sería aparentemente nula, pero las pequeñas modificaciones que es necesario introducir en el cálculo para salvar este inconveniente no ofrecen mayores dificultades.

10. — Volviendo ahora sobre el área del hemisferio sobrante, que constituye el objeto del primero de los dos teoremas clásicos de la curva, cabe proceder de la siguiente manera:

Si trazamos por el nodo los círculos máximos tangentes a la curva en dicho punto, como sus proyecciones estereográficas son justamente las asíntotas de la hipérbola imagen, tendremos determinados dos husos esféricos en cuyo interior está íntegramente contenida la curva de Viviani.

La abertura de cada uno de tales husos es igual por lo tanto al ángulo formado por las asíntotas de la hipérbola, y como éstas son perpendiculares resulta que la suma de ambos es igual a un hemisferio.

Luego si de la suma de tales husos excluimos la porción interna a la curva de Viviani, tendremos un área: Ω_1 que es justamente la que constituye el objeto del teorema que nos ocupa.

Dicha área: Ω_1 tiene como proyección estereográfica la región del plano (x, y) comprendida entre la hipérbola imagen y sus asíntotas. Luego, si recordando la ecuación polar de la hipérbola: $\rho^2 = \dfrac{1}{\cos 2\theta}$ aplicamos la fórmula obtenida anteriormente al huso para el cual θ varía entre: $-\dfrac{\pi}{4}$ y $+\dfrac{\pi}{4}$ deducimos:

$$\frac{\Omega_1}{2} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \frac{2 \cdot \dfrac{1}{\cos 2\theta}}{\dfrac{1}{\cos 2\theta} + 1} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = 2$$

y por lo tanto: $\Omega_1 = 4$, en lo que consiste el teorema conocido.

11. — Otra propiedad igualmente bien conocida de la proyección estereográfica consiste en lo siguiente: Si se adoptan como centros los polos diametralmente opuestos del cuadro, las proyecciones estereográficas de un mismo punto de la esfera son dos puntos inversos respecto de la circunferencia obtenida cortando con el cuadro.

Como la curva inversa de una hipérbola equilátera respecto de su circunferencia principal es una lemniscata de Bernouilli, de allí resulta que el teorema fundamental puede enunciarse en la siguiente forma equivalente a la primera: *La proyección estereográfica de una curva de Viviani, efectuada tomando como centro el punto de la esfera diametralmente opuesto al nodo de la misma, es una lemniscata.*

12. — Es curioso que la proposición anterior sea probablemente conocida, pues Loria, en su documentada obra: *Curve sghembe, etc.*, t. II, pág. 53, demuestra directamente el siguiente teorema: « Sobre el diámetro de un círculo máximo de una esfera de radio 1 que pase por este diámetro, y en el plano de un círculo máximo, se describe una lemniscata, de la cual se efectúa la proyección desde uno de los polos de dicho círculo. Esta proyección recubre una parte del correspondiente hemisferio y lo restante es igual al cuadrado del diámetro de la esfera ». Pero no hay mención en el texto de que este hecho proviene de que dicha proyección es justamente una curva de Viviani.

En cuanto al teorema fundamental, existen varias proposiciones más generales, relativas a cuárticas alabeadas, de las cuales podría derivarse como caso particular, pero no sabemos si ha sido formulado anteriormente el enunciado preciso que corresponde a la curva que nos ocupa. En la misma obra antes mencionada se hace referencia a una proyección de la curva, efectuada tomando como centro un vértice, y que carece de interés.

La representación paramétrica que hemos deducido de dicho teorema es tal vez la más sencilla entre las diversas que corresponden a la curva, como lo comprueba la forma simple que adopta la condición para que cuatro puntos sean coplanares. Otra representación distinta puede verse en la obra citada, t. I, p. 203.

Es claro que tratándose de curvas tan antiguas cualquier pretensión de originalidad carece de fundamento serio sin una prolija investigación bibliográfica previa. Pero ésta hubiera obligado a una labor desproporcionada quizás con la importancia del asunto, y cuyo interés sería de todas maneras ajeno al mismo.

Estando ya en prensa este trabajo nos informamos de que la proposición fundamental que le sirve de origen se encuentra indirectamente enunciada, y sin demostración, en la colección de *Esercizi di Geometria analitica*, de Agostini y Bortolotti, t. II, parte 2ª, vol. I, § 1110, pág. 127, lín. 13 y 14. La misma curva de Viviani sirve de tema en dicha colección para formular numerosos ejercicios de cátedra, pero ha pasado desapercibida la circunstancia de ser dicha propiedad la más orgánica quizás de todas las propiedades de tal curva.

MICRODETERMINACION CERIMETRICA DE GLUCOSA SOBRE 0.01 ml. DE SANGRE

Por REINALDO VANOSSI y RAUL FERRAMOLA

Como continuación de nuestros trabajos sobre determinación de glucosa en soluciones puras ([1]) y en sangre, operando sobre 0,1 ml. ([2]), expondremos ahora un método para realizarla sobre 0,01 ml. el cual, consideramos, puede tener sumo interés en todos los casos en que se trate de efectuar determinaciones sucesivas y a cortos períodos. La desproteinización la efectuamos, también, por acción de hidróxido de aluminio, que se forma agregando solución de carbonato de sodio sobre la mezcla de sangre y solución de sulfato de aluminio, en caliente. El líquido filtrado está listo para someterlo a la acción oxidante del ferricianuro, medio alcalino (carbonato de sodio), en caliente, valorando, finalmente, en frío, el ferrocianuro formado mediante una solución de sulfato cérico 0,00025 *N* e indicador, violeta de metilo (propuesto por nosotros oportunamente) ([3]).

Previamente hemos estudiado:

1) Influencia de la fracción soluble del desproteinizante sobre el ferrocianuro y ferricianuro.

2) Acción de dicha fracción durante el proceso de oxidación de la glucosa.

3) Influencia del hidróxido de aluminio sobre la glucosa.

Hemos operado con las siguientes cantidades de reactivos:

Para la desproteinización: 1,80 ml. de solución de $(SO_4)_3Al_2$, 18 H_2O al 0,42 % y 0,35 ml. de solución de CO_3Na_2, al 1 %; para la

([1]) *Anales Asociación Química Argentina,* **23** p. 162; 1935.

([2]) *Anales Sociedad Científica Argentina;* **121** p. 59; 1936.

([3]) *Anales Asociación Química Argentina*; **20** p. 96, 1932, y *Ann. Chimie Analytique,* Octubre Noviembre 1933.

oxidación: 0,85 ml. de solución de ferricianuro 0,005 *N* conteniendo CO_3Na_2, en concentración 0,2 *N*. El volumen final de los líquidos, listos para la oxidación, fué de 6 ml. y después de un calentamiento a B. M. de 5′ se efectuaron, en frío, las valoraciones con solución de sulfato cérico 0,00025 *N*, en presencia de una gota de solución de violeta de metilo al 0,1 %. Las razones por las cuales elegimos estos detalles de técnica se fundan en los resultados de nuestros trabajos anteriores ([1-2]). Respecto del primer punto, se han efectuado los ensayos de acuerdo con un plan seguido en aquellos trabajos. Las cantidades de ferricianuro y ferrocianuro han sido tales, que correspondían a las que intervienen en determinaciones de 0,003 a 0,03 mg. de glucosa, es decir, la situación que se presenta habitualmente en las determinaciones efectuadas sobre 0,01 ml. de sangre.

Los resultados indican que la fracción solución del desproteinizante no afecta el comportamiento del ferricianuro agregado, ni del ferrocianuro que se origina en el proceso.

El estudio del 2º punto se concreta en el CUADRO I.

CUADRO I

Gluc. mg.	Solución en	Tiempo de calentamiento en minutos			
		4	5	6	8
0.003	Agua destilada	0,28	0.29	0.29	0.30
	Sol. defecante	0.26	0.29	0.29	0.30
0.006	Agua destilada	0.57	0.59	0.59	0.59
	Sol. defecante	0.55	0.60	0.60	0.60
0.009	Agua destilada	0.86	0.90	0.90	0.90
	Sol defecante	0.84	0.90	0.91	0.91
0.015	Agua destilada	1.50	1.55	1.55	1.56
	Sol defecante	1.47	1.56	1.57	1.58
0.030	Agua destilada	3.02	3.10	3.12	3.12
	Sol defecante	2.99	3.11	3.14	3.14

Puede observarse que en menos de 5′ de calentamiento a B. M. hay tendencia a que la parte soluble del desproteinizante afecte los resultados en pocas centésimas de ml. en menos; para mayor tiempo de calentamiento hay tendencia a obtener resultados ligeramente superiores. En 5 minutos, tiempo adoptado en la técnica, puede

considerarse que dentro de los límites de 0,003-0,03 mg. de glucosa no se produce influencia superior a 0,01 ml. de la solución cérica.

Hemos de indicar, en todo caso, que es importante tener en cuenta la pureza de las drogas empleadas, razón por la cual se impone la ejecución de un ensayo en blanco, efectuado periódicamente con la parte soluble del desproteinizante, en presencia de dos cantidades extremas de glucosa (por ej., 0,006 a 0,03 mg.), a fin de establecer las influencias que gravitan en las determinaciones.

En cuanto al 3er. punto, se ha observado que no hay adsorción de glucosa de parte del precipitado de $(HO)_3Al$ y que son suficientes los dos lavados con agua caliente que se indican en la técnica (dentro de la aproximación de 0,01 ml. de sol. cérica) aun operando con cantidades extremas de glucosa, lo cual se explica por las concentraciones mínimas de glucosa presente.

Método

1) Solución de $(SO_4)_3Al_2$, 18 H_2O, al 0,42 %.

2) Solución de CO_4Na_2 al 1 %.

Estas soluciones se corresponden ca. estequiométricamente en la relación de volúmenes 5 : 1.

Por tal razón conviene asegurarse que el $(SO_4)_3Al_2$, 18 H_2O, contiene la riqueza en óxido que dá la fórmula. Un ensayo aproximado puede hacerse mezclando 5 ml. de la solución de $(SO_4)_3Al_2$ al 0,42 % con 1 ml. de la solución de CO_3Na_2, calentar y filtrar. El líquido filtrado se divide en dos partes; ninguna de ellas debe dar precipitado (10 minutos) al agregar a una, 1 gota de la solución $(SO_4)_3Al_2$ y a la otra una de ClH y luego 2-3 de NH_3, en caliente. Una concentración inadecuada de cualquiera de las dos soluciones puede originar una desproteinización deficiente de la sangre.

3) Solución de $Fe(CN)_6K_3$, 0,005 N (1,65 g. ‰) con alcalinidad en CO_3Na_2, 0,2 N (10,6 g. ‰). Esta solución se conserva bien al abrigo de la luz.

Por otra parte, la variación que sufre se determina con el ensayo en blanco.

4) Solución de SO_4H_2, 20 N (aproximada). Diluir 557 ml. de SO_4H_2, d : 1,84 hasta 1 litro.

5) Solución de violeta de metilo 6 B al 0,1 %. Esta solución se debilita con el tiempo, pero entonces basta emplear mayor cantidad al hacer las valoraciones.

6) Solución de $(SO_4)_2Ce$ 0,00025 *N*. Se prepara por dilución en ácido sulfúrico *N* de una solución 0,1 ó 0,05 *N* (*) Dentro de las primeras horas, si el ácido sulfúrico y el agua destilada son de la mayor pureza, esta solución posee el título de la solución original, disminuyendo luego paulatinamente, aun conservándola en la obscuridad, de suerte que a los 15 días su título baja de un 2 ½ a un 3 %.

Por lo tanto, existen dos alternativas: o prepararla en el momento del uso, con agua y ácido de la mayor pureza, o tener stock de solución y valorarla cada vez con solución reciente de $Fe(CN)_6K_4$, 3 H_2O, 0,0005 *N* (0,2110 g. por litro). Este ferrocianuro debe tener su contenido de agua exactamente determinado, o sino, mejor ha de conocerse su valor oxidimétrico.

La valoración se efectúa con 5-10 ml. de la solución de ferrocianuro agregando 0,25-0,50 ml., respectivamente, de ácido sulfúrico 20 *N* y 2 gotas de solución de violeta de metilo al 0,1 % y luego la solución cérica hasta virada. Insistimos en que hacia el final debe agregarse esta solución de a gotas, cada 1-2 segundos (tiempo de inercia del indicador), considerando el final cuando el color amarillento resultante es estable 4-6 segundos (según el exceso, respecto al punto estequiométrico que representa la última gota agregada). Del valor aquí obtenido se debe deducir el gasto que se obtiene de un ensayo con agua destilada y en las mismas condiciones (igual acidez anterior e indicador).

7) Solución de glucosa. Se ha empleado droga con pureza determinada por polarimetría y yodometría (Schoorl), de donde resultó un valor de 99,60 %. Con esta droga se preparó directamente solución al 0,3 ‰ y a partir de ésta, la solución 0,03 ‰ (estable 12 horas como mínimo).

8) Tubos de vidrio para la defecación de 8 × 70 mm. aproximadamente, con pico; embudos de 25-30 mm. de diámetro; tubos para la oxidación de 15 × 150 mm. de espesor de paredes 0,7-0,8 mm.; pipetas de 2 y 1 ml. graduadas y de 0,01 ml. de volumen contenido exactamente contraloreado; bureta de 5 ml. al 1/50 ml. Este material lavado con mezcla sulfocrómica caliente y agua destilada.

En lugar de la pipeta de 0,01 ml., es recomendable emplear la

(*) La solución 0.05 N se prepara disolviendo 11 g. de $(SO_4)_2Ce$, $4H_2O$ en 500 ml. de SO_4H_2 N, o sino partiendo del CeO_2, por la técnica indicada en nuestro anterior trabajo [3]. Esta solución conserva su título prácticamente inalterado durante 1-2 años.

pipeta con ensanchamiento (véase figura de la cita 2). Se determina el volumen contenido mediante la solución 0,1 N de ferrocianuro, con la cual se carga la pipeta hasta cièrta altura que se marca provisoriamente; se seca bien la extremidad, exteriormente y se arrastra con agua destilada, introducida en el ensanchamiento, haciendo la valoración mediante la solución cérica 0,00025 N. Considerando el título de la solución cérica respecto del ferrocianuro, se deduce el volumen y mediante ensayos de este tipo se puede, al fin, marcar definitivamente 0.01 ml. exacto.

Toma de la muestra. — La sangre para el análisis se obtiene por punción en la forma corriente, pipeteando directamente hasta un poco más arriba del enrase, a fin de ajustar luego exactamente 0,01 ml. mediante repetidos toques con papel de filtro en la extremidad de la pipeta previamente limpia en su parte exterior. Debe notarse que inclinando convenientemente la pipeta, la sangre asciende en la pipeta por simpla capilaridad.

El uso de anticoagulantes (oxalatos, fluoruros, citratos, etc.) es prohibitivo, de modo que si se ha de operar sobre sangre de punción venosa, ésta debe desfibrinarse con perlas de vidrio. Sin embargo, se puede consevar, también, la muestra por algunas horas, tratándola, apenas extraída, por la solución de $(SO_4)_3Al_2$, o mejor, efectuando la desproteinización con el CO_3Na_2, sin filtrar. Este líquido filtrado a las 24 horas (previo calentamiento a 80-90°) acusa prácticamente el valor en glucosa (temperatura de conservación: 15-25°); en cambio, conservado sólo en la solución de $(SO_4)_3Al_2$, si bien encontramos a las 3-4 horas un resultdo normal, a las 24 horas es aproximadamente 2 % más alto.

Desproteinización. — En un tubo de los indicados para la defecación se introduce 1,8 ml. de la solución de $(SO_4)_3Al_2$; se deja escurrir la sangre contenida en la pipeta hasta el fondo y luego se lava, aspirando suavemente el líquido límpido de la parte superior, operación que se repite a fin de eliminar todo resto de sangre del interior de la pipeta.

Usando la pipeta con ensanchamiento, basta introducir en aquél a la solución de $(SO_4)_3Al_2$ y luego soplar para arrastrar el todo al tubo de desproteinización.

La mezcla se agita y se coloca en un B. M. (o a llama directa sin llegar a ebullición) hasta que el líquido adquiera un color ligeramente pardo (ca. 30″), se vierte en seguida 0,35 ml. de la solu-

ción de CO_3Na_2 al 1 %, se agita y se sumerge al B. M. alternativamente, o a llama directa en las condiciones indicadas, hasta la obtención de un coágulo que deje por reposo de algunos segundos un líquido límpido sobrenadante. Es fundamental para obtener una buena coagulación, agitar repetidas veces sin exceso de energía, mientras se calienta. Alcanzado este punto, se deja de calentar, se reposa unos segundos y se filtra.

Filtración.— La filtración se efectúa a través de algodón de vidrio. Unas fibras de éste se colocan en el pequeño embudo, mojando y empujando con el extremo de la varilla el algodón en forma de provocar la reunión de las fibras en el cuello del embudito. Se lava repetidas veces con agua hirviente.

La solución con la sangre coagulada caliente se vierte en el embudo colocado sobre uno de los tubos indicados para la oxidación y una vez filtrada se lava 2 veces, tubito y embudo, con 1,5 ml. por vez de agua hirviente.

El líquido final que queda en el embudo se deja caer levantando cuidadosamente con un alambre un borde del block filtrante.

La filtración normal dura en total de 3 a 4 minutos y debe evitarse que ésta se prolongue, pues los resultados quedan afectados. En caso de que el filtro se obture, cosa que rara vez sucede, basta mover ligeramente con un alambre fino la superficie del coágulo depositado sobre la lana de vidrio.

Oxidación. — Se vierte en el tubo que contiene el líquido filtrado 0,85 ml. de la solución de ferricianuro alcalino, llevándolo, previa agitación, a un B. M. hirviente, donde quedará 5 minutos exactos. La interrupción de la ebullición en el baño, al introducir él o los tubos, no debe ser superior a 5-10″. Al finalizar los 5 minutos del calentamiento, se sumerge el tubo, en seguida, en agua fría, la cual se renovará hasta total enfriamiento.

Valoración. — Se acidifica el líquido con 0,3 ml. de SO_4H_2, 20 *N*, se agrega una gota del indicador violeta de metilo, y se valora con la solución de $(SO_4)_2Ce$, 0,00025 *N*, hasta que el color verdoso del líquido pase al amarillento. Recordaremos que hacia el final debe agregarse el reactivo de a gotas cada 1-2 segundos y debe considerarse terminada la valoración cuando queda prácticamente estable 4-6 segundos.

Ensayo en blanco. — Simultáneamente con el ensayo anterior, se ejecuta uno con 6 ml. de agua destilada y 0,85 ml. de la solución de ferricianuro alcalino, calentando el mismo tiempo, enfriando, acidificando y valorando con la solución cérica en la forma indicada. El valor del ensayo en blanco está comprendido entre 0,10-0,20 ml.

Si las soluciones de $(SO_4)_3Al_2$ y CO_3Na_2 no tienen la pureza que corresponde, el ensayo en blanco debe hacerse así: Se provoca la formación de precipitado de $(HO)_3Al$ en un tubo de defecación en las condiciones conocidas, se centrifuga, recogiendo el líquido. Se completa con agua hasta 5,15 ml. y se agrega 0,85 ml. de ferricianuro alcalino, continuando como es de práctica.

En trabajo habitual se puede tener stock de soluciones y efectuar este ensayo sólo periódicamente, limitándose cada vez a efectuar el ensayo simple con agua destilada.

Cálculo de los resultados. — Del dato obtenido con la sangre, se resta el del ensayo en blanco y el valor resultante se multiplica por el factor de la solución cérica (determinado respecto a ferrocianuro 0,0005 *N*).

Los ml. de solución cérica 0,00025 *N*, exactos, multiplicados por el factor « cerio-glucosa », dará los mg. de glucosa contenidos en 0,01 ml. de sangre.

Este factor es, para cantidades de glucosa superiores a 1,50 g. ‰ (1,55 ml. de $(SO_4)_2Ce$, 0,00025 *N*), igual a 0,0097.

Para sangres normales, el gasto de solución cérica es inferior a dicha cantidad y en consecuencia corresponde usar el factor que resulta de la siguiente fórmula [1]:

$$f = 0{,}01044 - 0{,}00047 \times a$$

siendo a el número de ml. de solución cérica 0,00025 *N*.

Aproximadamente pueden utilizarse los siguientes factores:

CUADRO II

Gasto aproximado de Ce 0 00025 N	Factor
0.5 ml.	0.0102
1.0 ml.	0.0100
1.3 ml.	0.0098

El siguiente cuadro corresponde a sangre de individuos normales y diabéticos analizados por los métodos de Hagedorn y Jensen, cerimétrico para 0,1 ml. de sangre que publicamos con anterioridad y el que ahora proponemos sobre 0,01 ml.:

Nota: La aproximación con que hemos deducido los factores para calcular la glucosa, en soluciones puras, y operando en las condiciones indicadas en el presente trabajo, es de 0.9 %. En el caso de operar con sangres, debido particularmente a la naturaleza del coágulo, esa aproximación debe ser forzosamente inferior y puede considerarse en general alrededor del 3 %.

CUADRO III

Sangre Nº.	Hagedorn-Jensen	Cerimetrico sobre 0.1 ml.	Cerimetrico sobre 0.01 ml.
1	0.110	0.115	0.116
2	0.088	0.090	0.093
3	0.104	0.102	0.105
4	0.082	0.080	0.090
5	0.096	0.096	0.092
6	0.108	0.106	0.104
7	0.146	0.150	0.146
8	0.111	0.115	0.119
9	0.225	0.220	0.228
10	0.198	0.202	0.202
11	0.099	0.102	0.110
12	0.079	0.080	0.080
13	0.094	0.096	0.094
14	0.102	0.098	0.100
15	0.220	0.215	0.220
16	0.120	0.116	0.118
17	0.090	0.090	0.090
18	0.140	0.133	0.140
19	0.170	0.172	0.180
20	0.080	0.080	0.084
21	0.098	0.095	0.093
22	0.100	0.098	0.102
23	0.086	0.088	0.084
24	0.152	0.160	0.154
25	0.078	0.080	0.080

(mg. de glucosa %)

Queremos significar, por último, que sería posible determinar glucosa utilizando sólo algunas milésimas de ml. de sangre operando

con una parte alícuota del líquido filtrado después de la desproteinización, es decir, evitando los lavados y haciendo actuar sobre ese volumen (1,9-2 ml.), cierta cantidad de ferricianuro, y valorando al final con solución cérica de concentración inferior a 0,00025 *N*; ya que en un volumen de 2-2 ½ ml. se obtiene suficiente sensibilidad de virada con una gota, o fracción, de solución cérica de extrema dilución. Por otra parte, hemos efectuado también algunos ensayos empleando el sistema de la pipeta filtro, que utilizamos con buen resultado en el caso de 0,1 ml. de sangre ([2]), completando luego el volumen final de 6 ml., para estar en condiciones de comparación con la técnica normal. Los resultados obtenidos han sido, en general, de 0,03 a 0,07 ml. (3 a 6 %) de sulfato cérico 0,00025 *N* superiores a los que daba la técnica por filtración común. Atribuímos esto más probablemente a la influencia de las fibras de algodón vegetal utilizados para el filtro.

En todo caso, quedan aún en pie las posibilidades que terminamos de mencionar.

Facultad de Ciencias Exactas,
Fisicas y Naturales
de Buenos Aires

EL COBRE EN EL SER HUMANO

Por P. MAGNE DE LA CROIX

RÉSUMÉ

Les pigments respiratoires existant dans l'échelle végétale et animale, sont des complèxes comprenant non seulement magnesium et fer sinon aussi: cuivre, vanadium et manganèse.

Or si le cuivre joue un rôle évident dans l'économie de tous les mammifères il résulte que ce rôle est plus important et que la distribution de ce métal est plus abondante chez l'homme et certains de ces animaux que chez la majorité des autres.

En un reciente artículo publicado en los *Anales de la Sociedad Científica Argentina*, el doctor E. V. Zappi nos recordó los trabajos de Hans-Fischer que demostraron que « el núcleo de la *porfina* constituye el esqueleto común de los colorantes de la sangre y de las hojas » y que estas investigaciones habían adquirido después una « verdadera trascendencia filosófica al comprobarse que los diversos *pigmentos respiratorios,* distribuídos en toda la escala animal y vegetal, son complejos metálicos de la porfina, no sólo con el hierro o con el magnesio, como en el caso del hemo o de la clorófila, sino también con otros metales: *cobre, vanadio* o *manganeso* ».

Uno de estos metales: el cobre, desempeña un papel muy importante, al lado del hierro en ciertos mamíferos, entre los cuales se destaca el hombre, y por eso parece interesante de traer la atención sobre los recientes trabajos que hicieron a este respecto los señores Lesné, Zizine y Briskas.

La leche de mujer tiene una proporción de cobre grande si se la compara a la de la mayoría de las leches de otros animales y notablemente a los que se acude para obtener leche para los chicos que su madre no puede alimentar.

Pero hay algunos animales que tienen tanto cobre en la leche como el hombre, y entre ellos se destacan las ratas. Esto ha permitido comprobar el resultado nefasto que produce la alimentación

con una leche no bastante rica en cobre en jóvenes seres necesitados de una leche rica en este metal; jóvenes ratas fueron alimentadas con leche de vaca pobre en este metal y casi todas murieron, mientras que los testigos alimentados con leche rica en este metal se criaron muy bien.

Varias búsquedas sobre la cantidad de cobre contenido en la leche de vaca han determinado su poca riqueza al respecto; a pesar de una cierta confusión que resultaba del hecho que no se había tenido en cuenta ni los diferentes períodos del año, ni los momentos de la lactación en los cuales se había hecho el análisis.

Elvehejem, Lindou y después Mac Farlan hicieron posteriormente investigaciones teniendo en cuenta estos varios períodos, pero las que trajeron la luz completa sobre esta cuestión son las más recientes hechas por Lesné, Zizine y Briskas, perfeccionando los procedimientos de los buscadores anteriores. Estas investigaciones han permitido comparar bien exactamente la cantidad de cobre contenida en la leche de vaca y la de mujer; he aquí los resultados que dieron:

PARA LAS VACAS

(La proporción ha sido establecida sobre varias cantidades de leche tomadas en varios períodos de lactación).

Vaca A		*Vaca B*	
Cantidad de leche empleada	Proporción de cobre en Mg por litro	Cantidad de leche empleada	Proporción de cobre en Mg por litro
500 cm³	0,20	500 cm³	0,15
200 »	0,16	250 »	0,14
200 »	0,21	200 »	0,16
300 »	0,22	100 »	0,15
200 »	0,18	50 »	0,17
150 »	0,23	50 »	0,16
150 »	0,19	50 »	0,15
50 »	0,18	25 »	0,13
50 »	0,18	25 »	0,14
25 »	0,20	25 »	0,16

PARA LAS MUJERES

El cobre se encontró en la leche de mujer en los diferentes períodos de la lactación en la proporción que sigue (el cobre es indicado en mg por litro).

1ª Experiencia

P. B. 32 años. — 1er. alumbramiento

3º día	1,23	4º mes	0,60
10º día	0,95	6º mes	0,65
25º día	0,80	9º mes	0,60
2º mes	0,90		

2ª Experiencia

E. P. 32 años. — 4º alumbramiento

2º día	0,95	3º mes	0,45
9º día	0,80	4º mes	0,30
1º mes	0,80	8º mes	0,26
2º mes	0,70		

3ª Experiencia

N. M. 24 años. — 1er. alumbramiento

2º día	1,10	6º mes	0,65
13º día	1,05	8º mes	0,65
2º mes	0,75	14º mes	0,42

4ª Experiencia

R. G. 19 años. — 1er. alumbramiento

2º día	1,13	4º mes	0,85
10º día	1,07	5º mes	0,93
1º mes	0,95	10º mes	0,90
2º mes	0,86		

5ª Experiencia

D. J. 27 años. — 2º alumbramiento

1º día	0,95	3º mes	0,60
12º día	0,85	5º mes	0,57
1º mes	0,60	9º mes	0,57

Antes de estas series de observaciones extrañaban las diferencias existentes entre los porcentajes de cobre obtenidos, pero estas observaciones hechas en serie permiten darse cuenta que estas variaciones provenían de las varias épocas de la lactación en las cuales habían sido hechas las observaciones.

Lesné, Zizine y Briskas concluyen diciendo: « En la leche de mujer es el colostrum que posee la más grande cantidad de cobre; ésta varía de 1,23 mg hasta 0,75 mg por litro; a los dos meses se estabiliza entre 0,60 mg hasta 0,90 mg para bajar progresivamente hasta llegar entre 0,25 mg y 0,57 mg por litro ».

Estos autores señalan que las leches empleadas en substitución de la mujer, a saber: la de vaca, de cabra o de burra, padecen todas del defecto de una deficiencia en cobre evidente para las necesidades del niño y el grado de este defecto es igual en estas varias leches. « No hemos anotado, dicen ellos, diferencia a este respecto entre la leche de cabra, de vaca o de burra ».

En otro trabajo que comunicaron también a la « Société de Pathologie » de París los mismos autores señalaron que la leche de rata tiene una riqueza en cobre más o menos igual a la de mujer y que este hecho había permitido, como lo hemos señalado anteriormente alimentando jóvenes ratas con leche de vaca, darse cuenta del efecto que producía una leche pobre en cobre sobre el joven animal que la necesita rica en este metal. Para darse cuenta del efecto, otros jóvenes animales testigos fueron alimentados con leche de ratas. Esto permitió constatar el resultado desastroso que produce la insuficiencia de cobre en la leche absorbida por un animal que necesita una leche rica en este metal; casi todas las ratas alimentadas con leche de vaca murieron.

El profesor Noel Fiessenger que presidía la sesión en la cual se hizo esta comunicación hizo notar que de lo observado, parecía resultar que « había dos cobres: un cobre fisiológico y un cobre patológico que pueden fijarse en los mismos órganos. De todos modos, agregó, « el cobre fisiológico parece desempeñar un papel en la hemopoïese y a tal punto que actualmente se llega a preocuparse de la terapéutica de las anemias por medio del cobre ».

De esto resulta que la introducción complementaria de cobre fisiológico puede ser necesaria en ciertos casos en los adultos pero que es siempre útil la introducción de este cobre en los niños jóvenes; normalmente la leche maternal lo da, pero si hay que recurrir a otra leche, ni la de vaca, ni la de cabra, ni la de yegua o de burra la posee en cantidad suficiente; las ratas que también poseen cobre en la leche en bastante cantidad han podido servir de animales de experiencia, pero su pequeño tamaño impide que tengan interés en lo que se refier a la producción lechera.

La humanidad debería pues preocuparse de desarrollar la aptitud

lechera en animales de tamaño por lo menos mediano y poseyendo la riqueza necesaria de la leche en cobre, estos animales existen pero la humanidad que no mezquina gastos en la producción de elementos de destrucción no hará lo que sería necesario para desarrollar la aptitud lechera en estos animales; otro medio sería enriquecer en cobre conveniente que se puede sacar de los pulpos, la leche de los animales empleados generalmente como animales lecheros, pero este medio sería probablemente de más difícil realización.

SUR QUELQUES NOUVEAUX DÉRIVÉ FLUORÉS AROMATIQUES

PAR MME. A. CANNONI DE DEGIORGI ET ENRIQUE V. ZAPPI

RÉSUMÉ. — On a préparé les noveaux composés fluorés suivants: *3-fluor-5-amino-anisol* (VIII) C_7H_8ONF, liquide huileux d'une couleur jaunâtre; son sulphate, $C_7H_8ONF.SO_4H_2.2H_20$, écailles blanches et brillantes solubles dans l'eau. — *3-fluor-5-nitro-phénol* (IX) $C_6H_4O_3NF$, écailles blanc-jaunâtres, sublimables. F.: 112°. — *3-fluor-5-nitro-phénétol* (XIII), $C_8H_8O_3NF$, petits cristaux blanc-jaunâtres solubles dans l'éther du pétrole et l'alcool méthylique. F.: 63°,5-64°. — *3-fluor-5-nitro-aniline* (XIX) $C_6H_5O_2N_2F$, aiguilles jaune-orangé, solubles dans l'acide clorhydrique 1: 1. F : 116°. La structure attribué a ces substances a été confirmée par des diverses transformations.

Ayant l'intention d'établir la solidité de l'union fluorée dans le noyau diversement substitué, nous avons completé la serie connnue des derivés aromatiques fluorés avec les quatre composés suivants:

3-fluor-5-amino-anisol (VIII) *3-fluor-5-nitro-phénol* (IX)

3-fluor-5-nitro-phénetol (XIII) et *3-fluor-5-nitro-aniline* (XIX).

Pour la preparation des trois premiers nous partons du s-trinitro-benzène (III) qui traité par le méthylate de sodium remplace un des groupes nitro par le méthoxyle, en donant le 3-5-dinitro-anisol (IV).

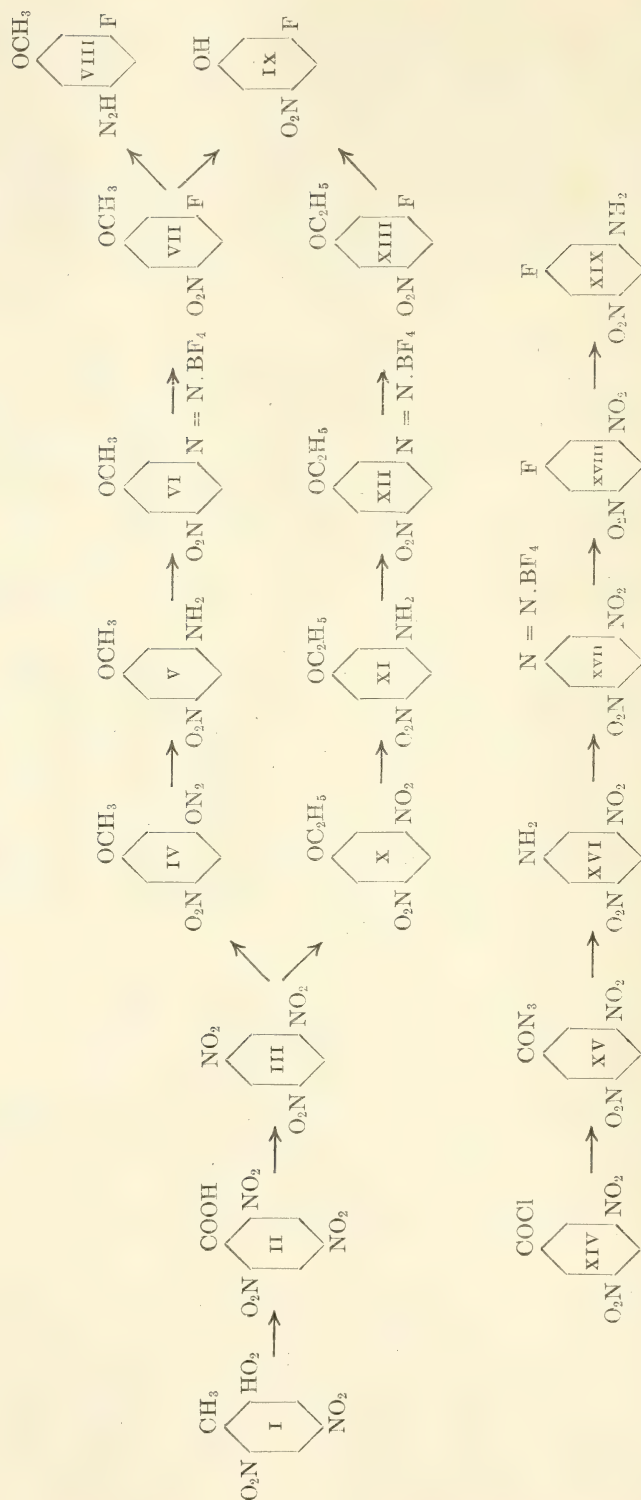
Celui-ci par reduction, avec du sulfure de sodium, produit le 3-amino-5-nitro-anisol (V) dont le diazoique, traité par la solution d'acide fluoborique, précipité le fluoborate de 3-diazo-5-nitro-anisol (VI) que la cheleur décompose en azote, BF_3 et 3-fluor-5-nitro-anisol (VII). La saponification de ce dernier avec de l'acide chlorhydrique concentré et sous pression, donna le 3-fluor-5-nitro-phénol (IX).

L'obtention du 3-fluor-5-nitro-phénetol (XIII) suive une marche analogue, après avoir traité le s-trinitro-benzène avec de l'éthylate de sodium.

Pour arriver a le 3-fluor-5-nitro-aniline (XIX) nos avons transformé le chlorure de l'ascide 3-5-dinitro-benzoique (XIV) dans l'azide (XV) et après dans la 3-5-dinitro-aniline (XVI).

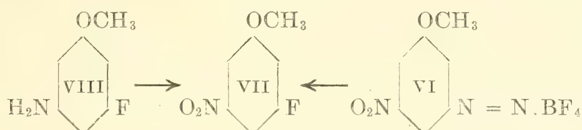
Celle-ci, diazotée a été transformé dans le fluoborate, qui chauffé se changea dans le 1-fluor-3-5-dinitro-benzène (XVIII) dont la réduction partielle donna la 3-fluor-5-nitro-aniline (XIX).

Le tableau suivant résumé les transformations dénombrées :



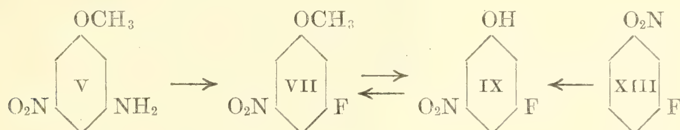
Le constitution de ces nouvelles substances se trouve confirmée par leur procédé de préparation et par diverses transformations.

Le 3-fluor-5-amino-anisol (VIII) possède la structure donnée parce que diazoté et décomposé en présence de nitrite de sodium il donne un 3-fluor-5-nitro-anisol (VII) identique a celui obténu par la décomposition thermique du fluoborate de 3-diazo-5-nitro-anisol (VI) :

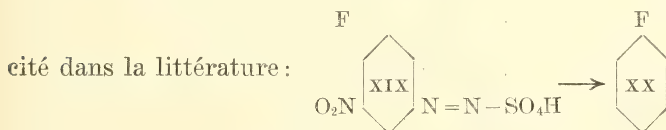


Le 3-fluor-5-nitro-phénenol (XIII) possède la constitution assignée parce que son hydrolyse donna le même 3-fluor-5-nitro-phénol (IX) que celui obtenu par l'hydrolyse du 3-fluor-5-nitro-anisol (VII).

En plus, le 3-fluor-5-nitro-phénol (IX) méthylé produit le même 3-fluor-5-nitro-anisol (VII) préparé par diazotation du 3-amino-5-nitro-anisol (V) :



Quant à la 3-fluor-5-nitro-aniline (XIX) le remplacement de sa fonction amido par l'hydrogène, donna le m-fluor-nitro-benzène déjà cité dans la littérature :



Partie expérimentale

Acide 2-4-6-trinitro-benzoique (II) $C_7H_3O_8N_3$ et *s-trinitro-benzène* (III) $C_6H_3O_6N_3$

Ces corps on été préparés selon (1).

(1) *Organic Syntheses*, Collective Volume I, John Wiley Sons, New Kork, 1932; pp. 528 et 526.

3-5-dinitro-anisol (IV) $C_7H_6O_5N_2$

Sa préparation a été effectuée selon ([2-3]) en chauffant 106 g de trinitro-benzène dans 900 cm³ d'alcool méthylique ou l'on a dissous, préalablement, 12/13 g de sodium métallique. Par refroidissement se déposent des beaux cristaux. Récristallisés de l'alcool méthylique, ils forment des aiguilles blanches. F. 105. Rendement: 90 g.

3-amino-5-nitro-anisol (V) $C_7H_8O_3N_2$

Nous avons modifié légèrement la methode de Blanksma ([4]) pour la préparation de ce composé. Une solution de 7 g de 3-5-dinitro-anisol (IV) dans 250 cm³ d'alcool éthylique, est chauffée au bain-marie jusqu'a commencement de l'ébulltion. On ajoute alors, par petites portions, une solution de 1,2 g de soufre dans 8,5 g de sulfure de sodium. Le liquide se colore en rouge foncé et après une demi-heure de chauffauge commence à se déposer du thiosulfate de sodium. A ce moment l'auteur concentre la solution alcoolique pour précipiter l'amine. Nous avons trouvé que cette concentration donne naissance à des résines bien dificiles à éliminer. Par conséquent, au lieu de concentrer nous laissons refroidir la solution alcoolique, la filtrons et précipitons avec l'eau la nitroamine formés. On peut la purifier par disolution dans HCl à 20 %, chaud, en filtrant et précipitant avec de l'ammoniaque.

Récristallisée dans l'eau forme des aiguilles orangées. F. 120°.

Fluoborate de 3-diazo-5-nitro-anisol (VI) $C_7H_6O_3N_3F_4B$ et *3-fluor-5-nitro-anisol* (VII) $C_7H_6O_3NF$

Ces substances son été préparés par la diazotation du 3-amino-5-nitro-anisol et précipitation de sa solution avec de l'acide fluoborique ([5]).

Le fluoborate constitue des aiguilles jaunâtres, três solubles dans l'eau froide. F.: 150° avec décomposition.

([2]) Lobry de Bruyn, *Rec. Trav. Chim. Pays-Bas*, 1890, t. 9; p. 208.
([3]) Vermeleum, idem, 1906, t. 25; p. 16.
([4]) Blaksma, *Rec. Trav. Chim. Pays-Bas*, 1909, t. 28; p. 111.
([5]) A. C. de Giorgi, *Anales Asoc. Quím. Argentina*, 1936, t. 24; p. 1.

Sulfate de 3-fluor-5-amino-anisol (VIII) $C_7H_8ONF.SO_4H_2.2\,H_2O$

On chaufe au bain-marie, pendant une demie-heure, 1,7 g de 3-fluor-5-nitro-anisol (VII) avec 6 cm^3 d'acide chlorhydrique (d. 1,19) et 1,3 g d'étain grénaillé. Le fluor-nitroanisol qui au commencement de la réaction reste en suspension. Se dissout au sein de la masse liquide, à mesure que la réduction progresse. Terminée la réaction, l'amine précipite comme sel double d'étain sous la forme de chistaux incolores et brillants. Pour obténir l'amine ceux-ci dissous dans l'eau sont décomposée par l'hidroxyde de potassium, sous une couche d'éther. Par extraction avec ce dissolvant; en séchant avec de la potasse et évaporant les solvants, on obtient un liquide huileux, de couleur jaunâtre qui est le fluor-amino-anisol cherché. Rdt.: 0,85 g.

Dissous dans l'acide sulfurique diluée, en chauffant quelque peu, on obtient par réffrodissement les écailles blanches et brillantes du sulfate.

Analyse: Substance sechée sur SO_4H_2 dans la vide.
Dosage de $S(SO_4Ba)$ et *N* (Dumas).
$C_7H_8ONF.SO_4H_2.2\,H_2O$ calculé, S: 11,59 %. N: 5,07 %
trouvé, S: 11,51 %. N: 5,27 %

Pour démontrer sa structure nous avons procedé à sa transformation en 3-fluor-5-nitro-anisol (VII) de la manière suivante: 0,7 g de 3-fluor-5-amino-anisol dissous dans 1 g d'acide nitrique (d: 1,4) et 2,5 g d'eau, sont diazotés avec una solution aqueuse de 0,7 g de nitrite de soude à la témperature de 10° à —5°. La solution diazoique est versée dans un autre vase qui contient 2,5 g de sulfate de cuivre, 0,8 g de glucose et 5 cm^3 d'eau. On ajoute 1 g de NaOH dissous dans 4 cm^3 d'eau et on chauffe a l'ébullition le mélange ujsqu'a observer la réduction du sel cuivrique. La solution refroidie est neutralisée avec un léger excès d'acide acétique; laissée réposer pendant un'heure, distillée avec la vapeur d'eau et le distillat extrait avec de l'éther. L'evaporation de l'éther donne un produit qui recristallisé dans l'alcool méthplique. F. 85°.

Le P. F. mélange avec du 3-fluor-5-nitro-anisol (VII) preparé par la diazotation du 3-amino-5-nitro-anisol (V) ne donne pas de dépression.

3-fluor-5-nitro-phénol (IX) $C_6H_4O_3NF$

On hydrolise 0,57 g de 3-fluor-5-nitro-anisol (VII) en le chauffant avec 4 cm^3 d'acide chlorhydrique (d. 1,19) dans un tube, pendant 5 heures à 170-180°. Après refroidissement on filtre la bouillie cristalline formée et récristallise le produit dans HCl dilué.

Écailles soyeuses blanches, légèrement jaunâtres. F.: 112°. On peut les purifier aussi par sublimation. Rdt.: 0,45 g.

Analyse: Dosage de *N* (Dumas).

$C_6H_4O_3NF$ calculé, N: 8,89 %
trouvé, N: 9,25 %

Méthylation du 3-fluor-5-nitro-phénol (IX)

0,15 g de 3-fluor-5-nitro-phénol sont dissous par léger chauffage, dans 0,22 cm^3 de sulphate diméthylique et on ajoute lentement, 0,6 cm^3 d'hydrate de sodium 5 *N*. Après quelques instants il se precipite une substance cristalline, qui est filtrée, lavés à l'eau et cristallisée dans l'éther de pétrole. F.: 85°. Le P. F. del mélange, avec du 3-fluor-5-nitro-anisol obtenu par diazotation du 3-amino-5-nitro-anisol (V) ne donne pas de depression. Rdt.: 0,17 g.

3-5-dinitro-phénetol (X) $C_8H_8O_5N_2$

Pour arriver à ce produit nous avons suivi prérièrement les indications de la litérature [6-7-8]. Suivants ces auteurs on mantient en contact pendant 15 jours, à la température ordinaire, la quantité théorique de s-trinitro-bencene avec une solution diluée d'éthylate de sodium ce temps. Écoulé ils distillent l'alcool presqu'a siccité et on purifie le produit, qui est soullie par und grande quantité de resines. Nous avons tourné cette dificulté en évitant la concentration du liquide de réaction et en provoquant la precipitation du dinitro-derivé tout simplement par addition de son volume d'eau. De cette manière on obtient le produit tout afait cristallisé. Recristallisé dans l'alcool, aiguilles rougeâtres. F.: 97,5°. Rdt.: 20 %.

(6) Lobry de Bruyn et Vant Leent, *Rec. Trav. Chim. Pays-Bas*, 1894, t. 13; p. 153.

(7) Blanksma, ibidem, 1905, t. 24; p. 40.

(8) Herzig et Aigner, *Monatsh.*, 1900, t. 21; p. 444.

3-amino-5-nitro-phénetol (XI) $C_8H_{10}O_3N_2$

Blanksma [7] réduit le 3-5-dinitro-phénetol (X) par l'hydrogène sulfuré. Nous avons trouvé plus commode d'effectuer la réduction par le sulfuré de sodium, comme il a été indiqué pour le 3-5-dinitro-anisol [4]. Cristaux. F.: 115°. Rdt.: 30 %.

Fluoborate de 3-diazo-5-nitro-phénetol (XII) $C_8H_8O_3N_3BF_4$

Dans 3 cm^3 d'eau, additionnée de 1,60 cm^3 d'acide chlorhydrique (d. 1,19) on dissout 0,85 g de 3-amino-5-nitro-phénetol (XI) en chauffant légèrement. La solution est diazotée avec 0,50 g de nitrite de sodium dissous dans 1 cm^3 d'eau, en maintenant la température à — 5°, — 10°. La solution filtrée est traitée avec 1,6 cm^3 d'acide fluoborique au 40 %, ce qui précipite une masse jaunâtre et cristalline qui est separée par filtration, lavée a l'acide fluoborique dilué, a l'alcool et après a l'éther. On sèchée sur SO_4H_2 sous vide donna. Point de décomposition: 110°. Ddt.: 0,85 g.

Analyse: Dosage de *N* diazoique, par décomposition avec SO_4H_2 dilué.

$C_8H_8O_3N_3BF_4$ calculé, *N* (de — N = N —): 9,94 %
trouvé, *N* (de — N = N —): 9,2 %

3-fluor-5-nitro-phénetol (XIII) $C_8H_8O_3NF$

La décomposition termique du produit antérieur est iniciée en chauffant dans un tube à 110°, et se propage lentement à toute l masse. Quand elle est terminée il reste un produit groudronneux et sur la surface du tube quelques cristaux groupés en fougère. Le tout est agité plusieurs fois avec de l'éther du pétrole, et les extraits sont évaporés, ce qui donne des cristaux impurs du 3-fluor-5-nitro-phénetol, qui sont purifiées par cristallization dans l'alcool méthylique en solution concentrée.

Petits cristaux, d'un blanc jaunâtre. F.: 63,5-64°.

Ddt.: g 0,85 de fluoborate ont donné 0,17 g de 3-fluor-5-nitro-phénetol.

Analyse: Dosage de *N* (Dumas).

$C_8H_8O_3NF$ trouvé, N: 7,86 %
calculé, N: 7,54 %

La saponification de ce produit, opérée par le procédé employé pour hpdrolyser le 3-fluor-5-nitro-anisol (VII) donna le même 3-fluor-5-nitro-phénol. F.: 112°, que celui-ci.

3-5-dinitro-benzoazide (XV) $C_7H_3O_5N_5$

Cette substance a été preparé en suivant les indications de Blanksma et Verberg (9). Dans un mélage composeé par 10 g de chlorure de 3-5-dinitro-benzoyle et 30 cm^3 d'acide acétique glacial, on ajoute par petites portions, 3 g d'azide sodique. Après un'heure de contact on peut séparer la 3-5-dinitrobenzoazide par addition d'eau.

Recristallisée dans l'éther du pétrole elle forme des aiguilles incolcres, avec Point de Décomposition: 107°.

3-5-dinitro-aniline (XVI) $C_6H_5O_4N_3$

Pour obtenir cette substance nous avons recours premièrement à la réduction du trinitro-benzène par le sulfhydratte d'ammonium, selon Kock (10) et, après, en suivant la méthode de Blanksma et Verberg (9) par décomposition de la 3-5-dinitrobenzoazide (XV) qui nous avons touvé plus aisée.

2 g de l'azide mélangés avec 8 cm^3 d'acide sulfurique concentré sont chauffés au bain-marie. Lorsque toute la dinitro-benzoazide est dissoute, on porte a l'ébullition le bain-marie, jusqu'à cessation du dégagement gazeux.

On laisse refroidir, après-quoi on verse dans l'eau et neutralise avec de l'ammoniaque, ce qui précipite la 3-5-dinitro-aniline.

Recristallisée dans l'eau. F.: 163°.

Fluoborate de 1-diazo-3-5-dinitro-benzène (XVII) $C_6H_3O_4N_4F_4B$
et *1-fluor-3-5-dinitro-benzène* (XVIII) $C_6H_3O_4N_2F$

Par la diazotation de la 3-5-dinitro-aniline et précipitation avec de l'acide fluoborique (11) il se forme le fluoborate de 1-diazo-3-5-dinitro-benzène, cristallisé comme des aiguilles jaunes, très solubles dans l'eau. Point de Décomposition: 203°.

(9) BLANKSMA et VERBERG, *Rec. Trav. Chim. Pays-Bas*, 1934, t. 53; p. 988.
(10) KOCK, *Rec. Trav. Chim. Pays-Bas*, 1901, t. 20; p. 113.
(11) A. C. DE DEGIORGI, *Anales Asoc. Química Argentina*, 1935, t. 23; p. 4.

La décomposition termique de ce produit donne le 1-fluor-3-5-dinitro-benzène, qui forme des cristaux blanc-jaunâtres, de l'éther du pétrole, P. F. 43°.

3-fluor-5-nitro-aniline (XIX) $C_6H_5O_2N_2F$

Dans une solution de 0,9 g de 1-fluor-3-5-dinitro-benzène dissous dans 30 cm^3 d'alcool et chauffée a l'ébullition sur un bain-marie, on verse lentement un'autre solution de sulfhydrate d'ammonium (préparée avec 34 cm^3 d'ammoniaque (d. 0,910), 7 cm^3 d'alcool et 0,7 g d'hydrogène sulfuré). Le liquide prend une coloration rouge intense et après 20 minutes de chauffage on refroidit et filtre pour séparer le soufre precipité. La liqueur additionée d'eau laisse déposer l'amine formé. Celle-ci est purifiée par dissolution à chaud dans une petite quantité d'acide chlorhydrique dilué de son volume d'eau, la solution est filtrée et l'amine régénerée par precipitation avec l'ammoniaque. Recristallisée dans l'eau, elle forme des belles aiguilles orangés. F.: 115°-116°. Rdt.: 0,4 g.

Analyse: Combution.

Pour $C_6H_5O_2N_2F$ trouvé, C: 46,08 %, H: 3,22 %
calculé, C: 46,03 %, H: 3,44 %

Par diazotation elle se transforme dans un huile légèrement jaunâtre, identique au m-fluor-nitrobenzène ([12]) ce qui confirme sa constitution.

Nous remercions a la Asociacion Argentina para el Progreso de las Ciencias, qui a subventionnée la pérsente recherche.

([12]) De Crauw, *Rec. Trav. Chim. Pays-Bas*, 1929, t. 48; p. 1061.

Facultad de Ciencias Exactas
Fisicas y Naturales
de Buenos Aires

A INFLUENCIA DAS CONQUISTAS E DESCOBRIMENTOS DOS PORTUGUESES NO CONHECIMENTO DAS PLANTAS

Por LENCASTRE PEREIRA DE ANDRADE

I

A conquista da Ceuta em 23 de Julho de 1415, a descoberta do Porto Santo em 1418, e em 19 a do arquipélago de Madeira por João Gonçalves Zarco, Bartolomeu Perestrello e Tristão Vás Teixeira, onde êstes tentaram a cultura da vinha e cana de açucar, queimando uma parte da impenetrável floresta e onde mais tarde os portugueses descobriram quasi todos os produtos da Fl. tropical: as ilhas Canarias, descobertas pelos portugueses em 1424, donde, conforme, Oviedo, « Hist. Nat. 1556 », o primeiro naturalista que visitou América, nos vieram bananeiras, introduzidas por estes no Malabar depois da viagem de Piso ([1] e entre outras a Tamareira ([2])
Or arquipélago dos Açôres, descoberto por Gonçalo Velho Cabral em 1432, onde observando os produtos da zona temperada, tentaram alguns da zona torrida, com bananas, inhames e batata doce: a travessia do Cabo Bojador em 1434 por Gil Eanes que, intrépido, afrontou os pavores que amedrontavam todos os seus conteporaneos,

(1) M. HUMBOLT, *Nouvelle Espagne* tambem concorda que as bananeiras foram destas ilhas, introduzidas na Republica de S. Domingos por Padre TOMÁS DE BERLENGAS, facto que o Padre JOSEPH DA COSTA na *Hist. Nat. des Indes,* 1608, confirma por tê-las visto cultivadas pelos americanos antes de chegarem os hespanhoes. MAROGRAF e PISO em vista das duvidas sobre a sua patria dizem que do Congo foram introduzidas no Brazil. São duvidas suscitadas por causa das especies e variedades.

(2) A Tamareira dos tempos prehistoricos foi conhecida do rei DAVID e MOISÉS. Por muito tempo se supôs ser indigena de Palestina, Assiria, Babilonia e dos oasis de Saharà. PLINIO dise ser das Canarias, facto oje cònfirmado por WEBB e BENTHELOT na *Hist. Naturelle des Canaries,* onde abundaram muitas plantas com aperencia de verdadeiras indigenas, donde as propagaram em outras partes.

á que abordando trouxe ao Infante D. Henrique, como um sinal da nova terra, umas hervas chamadas em Portugal Rosas de Sta. María, « que a maneira do ramo de oiro colhido por Eanes, eram o talisman que aos portugueses abria o paraiso da India ».

Toda a costa da Africa entre o Cabo Roxo e o Cabo Sagres ao norte da Serra Leôa por Nuno Tristão e Alvaro Fernandes em 1446, onde os portugueses introduziram o Coqueiro que hoje predomina toda extensa costa entre os dois cabos, facto confirmado por De Martins na « Hist. Naturalis Palmarum », o primeiro que fez menção de coqueiro nesta vasta região, donde os missionários portugueses introduziram mais tarde na América: o arquipelago de Cabo Verde em 1454, coberto de bosques de palmeiras cujo promontório fôra descoberto por Diniz Fernandes em 1443, e posteriormente as outras ilhas, sendo a de S. Tiago por Diogo Gomes e António de Nola em 1460 (ou 1446?).

As ilhas de S. Thomé e Principe descobertas em 1470 e 1471 por João de Santarém e Pedro de Escolar no tempo de D. Afonso V, « Dois grandes jardins lançados por Deus no meio das aguas do oceano, como os oasis entre os areais de un deserto », como disse Francisco Maria Bordalo nas viagens na Africa e na America, e duma delas o nosso epico; « A ilha ilustre que tomou o nome d'hum, que o lado a Deus tocou — onde observaram uma vegetação prodigiosa por toda a parte, como a árvore de canela, o café, o algodão e a cana de açúcar que se supõe ser originaria da India, Cochim-China e arquipélago da India, levada pelos árabes na idade média para Sicilia, donde D. Henrique introduziu na Madeira, donde se propagou nas Canarias, Brazil, S. Domingos e outras partes.

O cotovelo do Sul da Africa, torneado por Bartolomeu Dias em 1488 (ou 1486?) através mendonhos perigos e terriveis tempestades, tendo-lhe sido dado porisso o nome de Tormentório, mais tarde, com esperança de chegar a India, denominado por D. João II, jubiloso com a noticia, com o outro mais ridente « Cabo de Bôa Esperança », nome que a fortuna justificou:

Angola por Diogo Cão em 1486, onde os portugueses observaram matas que produziam quantidade de borracha, uma variedade de gomas resinas, abundância de bananeiras, (alimentação riquissima da população), várias espécies de palmeiras, coqueiros, etc., e nas margens dos rios a vegetação equinoxial, ostentando-se majestosa, ficando espantados com a cura das ulceras escorbuticas, que os indigenas obtinham com o cozimento da casca duma anacardiácea de

género Spondias, frequentement cultivada nas vizinhanças das povoações indigenas, onde após o descobrimento do novo mundo os viajantes portugueses no século XVI introduziram o cajueiro, originário da America intertropical, Antilhas, Brazil e Guyanas, o milho, originário conforme Piso, de Sonda, a mandioca espontanea no Brazil, pera do Mexico e Guyanas, a papaia, cuja patria é disputada, introduzida na India pelos portugueses, e conforme M. M. Correia Melo e Spence, originaria de Antilhas (*Memoire sur les Papay acées*), a cana de açucar e outras plantas úteis conforme condições favoraveis a sua cultura.

A ilha de Moçambique descoberta por Vasco da Gama em 1 de Março de 1498, onde observaram uma vegetação exuberante, como a borracha, o ricino, a calumba, o cuddó, a malva, a digitalis, a sene, a salsaparilha, a palha de balgate e a batatinha, muito usada pelos indigenas, profusamente espalhados, onde introduziram a nossa mangueira- trazendo-nos em troca a matomba (*Parinaria exelsa*Q e o grão de Moçambique.

A descoberta, a mais colossal de todas que fez assombrar o mundo inteiro, e foi um golpe mortal para Veneza e Genova, — o descobrimento do caminho maritimo para India — pelo ousado navegador Vasco da Gama em 1498 no reinado de D. Manuel o Grande, que há mais de meio seculo os portugueses procuravam com admiravel arrojo, facto o mais importante que marcou uma era nova na História de Portugal, e fez com que os homens de todas as partes do mundo se conhecessem uns aos outros: estas e tantas outras descobertas, após a do novo mundo, de terras opulentas com vales e planicies de vegetação exuberante, de côres brilhantes e abundancia de frutos exquisitos e plantas raras cuja importancia estava escondida nas nevoas do futuro, muito concorreram para a exploração da Flora e Fauna dos vastissimos dominios, alargando-se espontaneamente em sua consequencia o comércio e navegação, que tornou Portugal o pais mais rico da Europa.

E poderia alguém ficar inactivo, quando tão risonhas perspectivas se abriam aos que tinham sêde de riquesa, da fama ou glória? Não, sem dúvida, não.

A sêde das descobertas, excitada pelas empresas dos portugueses, fez mais tarde atiçar a actividade doutras nações ainda. Não deixaram os portugueses ù outras nações a glória de explorar as riquezas, não só, das terras descobertas, nem mesmo, das terras conquistadas, repito mais uma vez.

Não o foi, e atestam evidentemente os numerosos documentos desde 1400 para cá.

II

A descoberta do novo mundo nos deu conhecimento de muitas plantas novas. A descoberta de América por Cristovão Colombo em 12 de Outubro de 1492 e a abertura de novos caminhos maritimos abriram uma era nova no conhecimento de plantas e deran ao mesmo tempo nova direcção ao comércio de drogas e doutros produtos.

São incalculáveis as consequências desta descoberta sôbre os costumes e a civilização europeia. Ficou completamente transformado o nosso modo e vida pela introdução dos produtos alguns dos quais como o café, açucar, tabaco, batata e milho tornaram-se desde logo artigos da primeira necessidade. Após o descobrimento do novo caminho prosseguiram os portugueses as suas conquistas e descobertas apezar mesmo de alguns dos seus precursores terem sido vitimas dos habitantes selvagens.

Ben sabiam que tinham de correr risco da vida, mas mais forte que os perigos era o ardor das descobertas, que superavam todas as dificuldades e o temor da morte.

A crença de que se enconotrariam no mar do Sul grupos de ilhas, cheias de oiro, pedras preciosas, especiarias e pérolas excitava a imaginaçãoo e os incitava para as emprezas.

Após o descobrimento do novo caminho antes que o espanhol João Grijal va descobriesse o Mexico, denominado « A Veneza no novo mundo » em 1518, conquistado depois por Fernando Corte a 1521 donde nos vieram entre outros o cardo santo, a goiabeira que abundam na Venesuela e Perú, e *Opuntia Dillenii*, a palmatória do infermo, introduzida pelos portugueses e naturalizada na India, imprópriamente denominada *Cactus indica*, figueira da India, antes que o espanhol Francisco Pizarro em 1525 descobrisse o Perú, denominado pelos indigenas « o pais de oiro », donde nos veio a *Physali Peruviana*, cultivada nas hortas, o balsamo de Perú, a *Arracacia esculenta*, a *Mirabilis jalapa*, maravilhas de Perú, ou boas noites e outras; antes que os franceses explorassem as costas do Canadá em 1533 e em 1562 se estabelescessem na Florida, e os inglezes na Virginia em 1606, donde nos veio o *Virginia Bird's Eye;* muito antes doutras nações, os portugueses, graças a sua boa estrela e esforços tinham conseguido fundar um vasto império no novo mundo,

encantados, como os espanhois, da vegetação exuberante e verdura das imponentes florestas, povoados de aves do canto, do inebriante perfume das madeiras aromáticas e dos campos de floresta.

Nos principios de varão, em 24 de Abril de 1500 a nau de Gaspar de Lemos trouxe a Lisboa a noticia do descobrimento do Brazil por Pedro Alvares Cabral, donde entre várias plantas que, longe seria mencionar, nos vieram o cajueiro, o ananaz, do nome brasileiro Nana, que abunda nas regiões de Haiti e Mexico, fruto que desconhecido como era, Carlos V hesitou em provar, quando se lhe ofereceu; baunilha, mandioca, grão-maluco, bouganvilea, arbusto espinhoso, muito vulgar no pais *Solanum Jacquinii,* bringela com frutos e folhas espinhosas, o Cerens Cerens pautagonus, usado para sebes e amendoim, recebendo os brazilheiros em troca entre várias outras plantas o gergelim, originario, conforme Piso, das ilhas de Sonda, o milho do Egipto, o café de Arabia e o de Liberia e o coqueiro levado de Goa pelos portugueses.

A descoberta do Brazil seguiu outra, cuja paternidade foi por algum tempo posta em dúvida. Ao aventureiro portugês Gaspar Corte Real, que se perdeu entre os gelos se deve a descoberta do vasto Canadá a quem deu o nome de « *Terra Verde* » em 1501, gloria por algum tempo disputada pela França, atribuindo-a ao seu célebre navegador Jacques, ficando porém frustrada em frente das cartas geograficas do seculo XVI em que figura este vasto dominio sob a denominação do Corte - Realis, como diz Pinheiro Chagas na sua História de Portugal.

Após estas duas descobertas no novo mundo, Duarte Pacheco em 1505 demonstrou logo a analogia das florestas dos paises, situados ao norte do sul do Equador sobre linhas isotermicas, e em 1506 Afonso de Albuquerque com a descoberta de Madagascar « a *ilha de Lua* », onde os postugueses foram dos primeiros europeus que aportaram nos mandou a flor de pavão e V. edutis.

Com a conquista de Socotorá em 1507 tivemos o alóes, a herva babosa etc. e com a de Malaca por Afonso de Albuquerque nos vieram algumas plantas, entre outras os jambos de Malaca, a fruta de Adão, e o arbusto muito vulgar em Goa, *Quisqualis indica* (Rangoon creeper).

A conquista de Molucas em 1512 nos trouxe o cravo da India, as carambolas, os bilimbinos, a noz moscada, a canela e a abobora branca.

Com as das ilhas Sonda tambén nos vieram algumas plantas das

quais merecem menção a mangosta e a árvore de pão que Rumfio diz ter visto em estado de selvagem nas matas destas ilhas, conforme alguns, originario de Java e Amboine, espalhada nas regiões equinoxiais de America, e o gergelim com a areca que de Martins diz ser também desta ilha.

Em 1519 Fernão de Fagalhães, atravessando o Pacifico, chegou a descobrir as Marinhas e Filipinas em 1521; nestas os espanhois introduziram o cacau, originario da Nova Granada, onde abunda em estado selvagem, e que viajantes portugueses propagaram depois nas suas colonias.

En 1560 o distinto jesuita José de Anchieta, vulto mais notável da Companhia de Jesus que no Brazil teve o titulo de Apostolo de America, descobriu a ipecacuanha e assinalou as suas propriedades eméticas.

Foi Gabriel Soares de Souza que em 1587 fez conheced as propriedades de jaborandi e sarsaparilha, indicando tambem a raiz de mandioca como vermifuga e antidiabética.

Foi também êle que preconisou a Nicotiana na rectite epidémica.

Muito antes que A. St. Hilaire, *Plantes usuelles des Bresilieus,* De Martins, *Fl. Brazil,* Piso, *Indiae, Utriusque,* 1650, Marcgraff e Piso na sua obra monumental, *Hist. Rerum Naturalium Braziliae,* 1648, descrevessem as plantas e produtos de Brazil, o mesmo Gabriel de Souza em 1587 havia indicado a ipeca para diarrea.

III

Estes e outros factos interessantes que a seguir registamos nos deixam vêr que a acção dos portugueses não se limitou tão sólamente ao conhecimento das plantas, a sua naturalisação e propagação nas colónias.

Os portugueses pelas suas vitórias e descobertas dominaram o mundo inteiro durante quasi dois séculos e meio (1413-1656) até a morte de D. João IV o Restaurador.

Apezar da perseguição dos holandeses que se tinha apoderado de quasi todas as cidades fundadas no Brazil, tendo sido expulsos de Angola em 1648 por Salvador Correia de Sá a outros, o patriota João Fernandes Vieira em 1655 restaurou o Brazil.

Durante todo êste tempo contribuiram para o progresso das ciências, como a vêr vamos.

Não é só á Geografia e Astronomia, á Etnografia, á Botânica e á Zoologia que êles se dedicaram.

A Medecina geral e a tropical também lhes devem um quinhão do progresso.

Registamos aqui um e outro facto não como novidade, mas como *Old Wine in New Bottles* para os nossos filhos, da epopeia da nação portuguesa, a sua Biblia sagrada que tem na história das nações a sua em páginas, com letras de oiro.

Os portugueses desempenharam um papel importante na terapeutica nos séculos XV e XVI.

João de Barros, escritor muito escrupuloso, descreveu não só os sintomas do escorbuto, assinalou ainda a etiologia desta avitaminose ou carencia de diversos ácidos aminados.

E, o nosso épico descreveu no Canto V dos Lusiadas Est. 81 e 82 o escorbuto nos termos seguintes:

Quem haverá que sem o ver o creia?
Que tão disformemente ali lhe incharam.
As gengivas na boca, que crescia
A carne e juntamente apodrecia.

Apodrecia c'um fétido e o bruto cheiro que o ar visinho inficionava:

Não tinhamos ali médico astuto.
Surugião sutil menos se achava;
Mas qualquer neste oficio pouco instructo.
Pela carne já podre assi cortava.
Como se fôra morta; e bem convinha.
Pois morto ficava quem a tinha.

A Garcia da Orta se deve a primeira descrição dos sintomas caracteristicos da cólera e do tratamento desta terrivel partida para a discrição da epidemia que Gaspar Correia tendo presenciado na India em 1543, tão bem descreveu para facilitar o seu diagnóstico.

Foi o Padre Anchieta quem descreveu o primeiro marzupio americano que foi o ponto da Fauna. Foi tambem êste jesuita português que deu de conhecer a séde do veneno ofidiano nos dentes das cobras venenosas.

A Castellani em 1907 chamou a atenção do mundo médico para o contagio da framboezia por certas moscas não vulnerantes que depois de chuparem as ulceras, iam em seguida poisar sôbre feridas dos indiduos sãos á quem transmitiam a doença.

A doença porém, era desde há muito conhecida dos portugueses. Pouco mais de tr:s séculos antes, Gabriel Soares de Souza em 1587 havia assinalado o facto dêste contagio.

Que mais nos resta para nossa gloria?

Não deixam êstes factos ver que os portugueses lançaram as bases para os estudos Botanico-Farmacológicos durante o século XV e XVI?

Não há que duvidar.

Estes ultimos factos foram postos em evidência ainda há pouco pelo professor C. França n 1º Congresso de medicina tropical de Angola, da iniciativa do Alto Comissario, o general Norton de Matos.

Os trabalhos de Tomé Pires e os trabalhos de Garcia da Orta, João Fragoso e Cristovão da Costa, escritos no século XVI, são monumentos que atestam a obra Botanico-Farmcológica dos portugueses.

Fechou finalmente Herédia em 1600 (1601?) o periodo activo dos descobrimentos — que os portugueses tinham começado no primeiro quartel do século XV, antes que começassem a ser espoliados pelos holandeses e ingleses — com a descoberta da Australia ou Nova Holanda, a terra de oiro, prata, cobre e uma variedade de cereais etc. etc.

Com a descoberta da Australia tivemos entre outros o *Eucalyptus globulus,* naturalizado na India Portuguesa e cuja cultura compete ao Estado promover nos sitios palustres, tanto mais que foi o Eucaliptol já ensaiado com proveito e preconisado na lepra, associado ao óleo de chaulmoogra, pelos leprólogos insignes, como Heiser, Brac, Robineau e outros.

IV

Que a natureza foi prodiga na distribuição de plantas, que a distribuição foi conforme as necessidades dos povos das regiões do globo, e que esta foi regulada conforme as condições fisicas e geográficas, não há que duvidar.

Enquanto os egipcios e fenicios introduziam e propagavam muitas plantas nas regiões do Mediterraneo, e os arianos durante as suas migrações pela Europa entre 2000 a 2500 antes de Cristo, tambem introduziam muitas plantas na Asia ocidental, os portugueses que nestes tempos andavam ocupados nas conquistas e descobrimentos,

ao voltar das suas longas expedições não deixaram de trazer para Portugal e para suas possessões ultramarinas, India em particular, novas plantas frutiferas que encontrassem em qualquer parte com o intuito de naturalizá-las com cultura intensa nos seus dominios.

Na naturalização das plantas exóticas nos seus dominios desempenharam os portugueses papel importante, tendo concorrido muito para a propagação das plantas dum para outro hemisferio a descoberta do caminho maritimo e da America, as conquistas, etc. como deixamos dito.

Não houve geração espontânea em parte alguma.

Chaque pays a ses produits.

Disse Buffon, « Hist. Nat. ».

Os vegetais, como os animais, obedeceram ao preceito Divino.

Et ait germinet terra herbam virentem et facientem semem, lignum pomiferum, fructus juxta semem suum Pen. cap. IV, 11 e 12.

Investigações paleontologicas deixam vêr que em parte alguma se viu nascer espontaneamente o arroz, o milho, a batata, a mandioca, a papaia, o coqueiro etc.

Os vegetais como os animais, tiveram tambem a sua etnografia.

Cada genero e cada especie teve a sua patria, o seu habitat.

Variações houve, e não há duvida.

Nos nossos jardins e hortas, até mesmo dum lugar para outro vemos variarem as plantas conforme o solo e outras circunstâncias do clima.

Houve-as também nos animais, como deixou bem demonstrado Darwin na sua obra *Variations of animals and plants under domestication.*

Se os vegetais, porém, aceitando-se a teoria da selecção e luta pela vida entre os animais, passaram dum hemisferio à outra região, é porque uma mão estranha os transportou para proveito seu e pelos cuidados que lhe dispensou, ou por outra, pela sua demesticação, não raras vezes, conseguiu boas variedades.

Essa mão para India é a dos portugueses que introduziram uma variedade de plantas nos seus, outrora, vastissimos dominios, para o que contribuiram muito as conquistas e descobrimentos.

Concluo o Cap. com uma ligeira nota sôbre o nosso coqueiro cuja pátria foi por algum tempo disputada.

Não se sabe ao certo até hoje a data da sua introdução na India. E' certo, porém, que a sua cultura intensa começou em Ceilão. Abunda também no litoral das regiões quentes da Asia, Africa e America.

Joseph Acosta na *Hist. Nat. des Indes* diz ter visto no século XVI o coqueiro no Porto Rico, no arquipelago das Antilhas.

De Martins na *Hist. Nat. des Indes* diz ter visto os portugueses introduzindo o coqueiro na costa da Guiné, e que os viajantes Dampier e Vancouver nos principios do século XVII tinham observado vastas plantações dos coqueiros nas ilhas dos Cocos no arquipelago da Sonda.

Em varias ilhas de Asia tem-se observado o coqueiro em estado tanto selvagem como cultivado.

Supunha De Martins que os cocos tivessem sido transportados pelas correntes oceanicas do Pacifico, das ilhas da America para as do arquipelago indico.

As investigações dos botanicos modernos que observaram seu extenso habitat, dêsde há tres séculos, e os variados usos do coco na Asia mais que na America e os exames geológicos demonstraram que foi Asia a pátria do nosso coqueiro.

Apolonia de Tyane, citado por Pickering, *Chronological arrangement of Plants* viu o coqueiro no Indostão nos primeiros séculos da era Cristä.

A' sua origem no arquipelago da India donde passou para Ceilão, fica também confirmada pelo facto que segue e que demonstra a sua muito antiga existencia nesta ilha.

Perto de Point de Gale, em Ceilão, diz o erudito Suman na Flora Vitiensis, se vê uma inscrição, numa rocha, do busto dum principe indigena, Kotha Raya, à quem se atribuia a descoberta dos usos do coco, desconhecidos antes dele, facto importante à que tambem faz referencia o Marawansa, cronica muito velha de Ceilão.

Cunsaulim, India Portguesa, 30 de Abril de 1937.

SOBRE LOS ROEDORES PLATAEOMYS Y PSEUDOPLATAEOMYS

Por CARLOS RUSCONI

En 1933, p. 105 de estos mismos *Anales,* daba a conocer varias especies nuevas del piso chapadmalense, una de las cuales se refería a un interesante grupo de roedores octodontinos cuyos últimos representantes parecen haberse extinguido a mediados del plioceno argentino. Allí hice una breve historia del género y especie *Plataeomys scindens* y recordaba que nuestro sabio Ameghino lo fundó en 1881, (vol. II, p. 306), con un incisivo descubierto en el piso ensenadense y que se distinguía, entre otras cosas, por su robustez y de forma parecida a la del género *Ctenomys.* Varios años después (1888, p 8 y 1889, p. 161, lám. VII, figs. 9 y 10), el mismo paleontólogo refirió al mencionado género un cráneo y mandíbula completas exhumados del piso hermosense. Más tarde, Rovereto (1914, p. 62 etc.) describió varias especies nuevas sin advertir que esas no podían corresponder al género *Plataeomys.*

Recién en el artículo arriba citado me apercibí del error en que habían incurrido involuntariamente tal vez, esos dos autores; pues, no podía creer que los restos fósiles hallados en terrenos prepampeanos debían ser incluídos en el género *Plataeomys* sino a otro distinto y nuevo, el cual no lo fundé en aquella oportunidad por diversas razones.

Más o menos en la fecha en que había corregido las pruebas de mi artículo, Kraglievich independientemente y por otros conductos, llegaba a idénticos resultados con respecto al incisivo en cuestión en un trabajo que redactó en sus últimos tiempos y que vió a luz, años después de su muerte (1934). En esta monografía (p. 77), Kraglievich hizo un comentario acerca de este grupo de roedores y además propuso dos tesis. La primera consistía en que podía tomarse la fecha de 1888 para el genotipo de *Plataeomys scindens* debiéndose utilizar en este caso el ejemplar procedente del hermosense y considerar como *nomen nudum* el *Plataeomys scindens* de 1881. De

acuerdo a las leyes de nomenclatura zoológica vigente, esta proporción me parece inaceptable porque si bien es cierto que la pieza sobre la cual fundó Ameghino el mencionado género era muy incompleta, no había motivos suficientes para pensar en su eliminación desde el momento que el propio Kraglievich pudo darse cuenta de las diferencias morfológicas entre el incisivo de la pieza genotípica y el mismo órgano de los ejemplares del piso hermosense. Si el incisivo que sirvió de base al género era, según el propio Ameghino, muy parecido y más robusto que el de *Ctenomys,* mejor hubiera sido entonces considerar a *Plataeomys scindens* de 1881 como un sinónimo o bien como una especie distinta de *Ctenomys.* Infortunadamente ignoro cual es el paradero de la pieza genotípica y hasta tanto no se la halle y se la estudie con el fin de aclarar este asunto, la prudencia aconseja mantener a *Plataeomys scindens* de 1881 como un género dudoso en la lista de vertebrados del piso ensenadense.

La segunda tesis de Kraglievich consistía en conservar el nombre de *Plataeomys scindens* para el ejemplar genotípico de 1881 y dar un nuevo nombre genérico y específico a la pieza (cráneo y mandíbula) que el propio Ameghino consideró también como tal en 1888. Y para este caso Kraglievich propuso denominar *Pseudoplataeomys formosus* al primer ejemplar hallado en el piso hermosense, descripto por Ameghino en 1888 y figurado después por el mismo sabio en 1889 (1).

Ahora bien, como este último criterio es, a mi modo de ver, el más correcto, lógicamente me impone entonces la tarea de hacer las siguientes modificaciones, aprovechando al mismo tiempo para dar la distribución geográfica y geológica de estos dos géneros de roedores octodontinos:

Gén. PLATAEOMYS Amegh. 1881

Plataeomys scindens Amegh. 1881

Plataeomys scindens Ameghino, *La antigüedad* etc. vol. II, p. 306.
Plataeomys scindens Ameghino, *Contribución* etc. 1889, p. 161 (*in part*).
Plataeomys scindens Rusconi, *Distribución* etc. 1936, p. 189 y 201.

Distribución: « Toscas » del río de la Plata, frente a Buenos Aires.

(1) A esta última tesis se ha adherido también el Dr. Castellanos (1936, p. 34).

Antigüedad: piso ensenadense, plioceno superior (1).

Gén. PSEUDOPLATAEOMYS KRAGL. 1934

1) **Pseudoplataeomys formosus** KRAGL. 1934

Plataeomys scindens AMEGHINO, *Lista de las esp.* etc. 1888, p. 6 (*in part*).

Plataeomys scindens AMEGHINO, *Contribución* etc. 1889, p. 161, lám. VII, figs. 9 y 10.

Plataeomys scindens AMEGHINO, *Segundo Censo,* 1898, p. 178 (*in part*).

Plataeomys scindens AMEGHINO, *Les form. sed.* 1906, p. 414, fig. 244.

Plataeomys scindens ROVERETO, *Los estratos arauc.* 1914, p. 137.

Pseudoplataeomys formosus KRAGLIEVICH, *La antigüedad plioc.* 1934, p. 77 (el ejemplar tipo del género y de la especie es el descripto por Ameghino en 1888, y figurado en 1889, lám. VII, figs. 9 y 10).

Distribución: Monte Hermoso, al sur de la provincia de Buenos Aires.

Antigüedad: piso hermosense, plioceno inferior.

2) **Pseudoplataeomys elongatus** (ROV.) KRAGL. 1914

Plataeomys elongatus ROVERETO, *Los estratos* etc. 1914, p. 62, fig. 28 *a* y *b*.

Plataeomys elongatus RUSCONI, *Nuevas especies* etc. 1933, p. 106.

Pseudoplataeomys elongatus KRAGLIEVICH, *La antigüedad* etc. 1934, p. 79.

Distribución: Catamarca y Mendoza.

Antigüedad: mioceno medio o sup., y piso tunuyanense, mioceno superior.

3) **Pseudoplataeomys brevis** (ROV.) KRAGL. 1914

Plataeomys brevis ROVERETO, *Los estratos* etc. 1914, p. 64, fig. 29 *a* y *b*.

(1) En base a la siguiente distribución geológica, resulta entonces que el género *Plataeomys* hay que incluirlo en la fauna pampeana, y en la fauna araucoentrerriana el género *Pseudoplataeomys,* lo mismo que hice en otra oportunidad (1931) un desglosamiento similar con respecto a *Ctenomys* y *Dicoelophorus.*

Plataeomys brevis RUSCONI, *Nuevas especies* etc. 1933, p. 106.
Pseudoplataeomys brevis KRAGLIEVICH, *La antigüedad* etc. 1934, p. 79.

Distribución: Catamarca.
Antigüedad: piso araucanense, mioceno superior.

4) **Pseudoplataeomys innominatus** (ROV.) KRAGL. 1914

Plataeomys innominatus ROVERETO, *Los estratos* etc. 1914, p. 65, fig. 30.
Plataeomys innominatus RUSCONI, *Nuevas especies* etc. 1933, p. 106.
Pseudoplataeomys innominatus KLAGLIEVICH, *La antigüedad* etc. 1934, p. 79.

Distribución: Catamarca.
Antigüedad: piso araucanense, mioceno superior.

5) **Pseudoplataeomys elongatus mendocinus** (ROV.) KRAGL. 1914

Plataeomys elongatus var. *mendocinus* ROVERETO, *Los estratos* etc. 1914, p. 221.
Pseudoplataeomys elongatus var. *mendocinus* KRAGLIEVICH, *La antigüedad* etc. 1934, p. 79.

Distribución: Mendoza.
Antigüedad: piso tunuyanense, mioceno superior.

6) **Pseudoplataeomys Castellanosi** (RUSC.) 1933

Plataeomys Castellanosi RUSCONI, *Nuevas especies* etc. 1933, p. 107, fig. 1.

Distribución: Arroyo Chapar, Miramar, al sur de la provincia de Buenos Aires.

Antigüedad: piso chapadmalense, plioceno medio (es la especie más reciente del género).

BIBLIOGRAFIA

AMEGHINO, F., *La antigüedad del hombre en el Plata*, vol. II, París-Buenos Aires, 1881.
AMEGHINO, F., *Lista de las especies de mamíferos fósiles del mioceno superior de Monte Hermoso hasta ahora conocidas*, pp. 1-21, Buenos Aires, 1888.

AMEGHINO, F., *Contribución al conocimiento de los mamíferos fósiles de la República Argentina*, en *Actas de la Academia Nacional de Ciencias en Córdoba*, vol. XXV, pp. 1-247, Buenos Aires, 1914.

AMEGHINO, F., *Les formations sédimentaires du crétacé supérieur et du tertiaire de Patagonia*, en *Anales del Museo de Hist. Nat.* vol. VIII, pp. 1-568, Buenos Aires, 1906.

CASTELLANOS, A., *Los sedimentos del pampeano inferior y del araucano en el Valle de los Reartes*, en *Publicaciones de la Fac. Cienc. Matemáticas, físico-químicas y Naturales de la Universidad Nac. del Litoral.* Publicación nº 6, pp. 1-110, Santa Fe.

KRAGLIEVICH, L., *La antigüedad pliocena de las faunas de Monte Hermoso y Chapadmalal, deducidas de su comparación con las que le precedieron y sucedieron*, pp. 1-136, Imp. El Siglo Ilustrado, Montevideo, mayo 17 de 1934.

ROVERETO, C., *Los estratos araucanos y sus fósiles*, en *Anal. Mus. Hist. Nat.* vol. VI, Buenos Aires, 1889.

RUSCONI, C., *Las especies fósiles del género Ctenomys, con descripción de nuevas especies*, en *Anales de la Sociedad Científica Argentina*, vol. CXII, pp. 1-35, del separado, Buenos Aires, 1931.

RUSCONI, C., *Nuevas especies de mamíferos terciarios procedentes del piso chapadmalense*, en *Anal. de la Soc. Cient. Argentina*, vol. CXV, pp. 105-113, Buenos Aires, 1933.

RUSCONI, C., *Distribución de los vertebrados fósiles del piso ensenadense*, en *Bol. Acad. Nac. Ciencias en Córdoba*, vol. XXXIII, pp. 183-215, Buenos Aires, 1936.

BIBLIOGRAFÍA

OMBREDANNE, A., SUARES, N. et CANIVET, N., *Les inadaptés scolaires.* Paris. Hermann et Cie. éditeurs. 6, Rue de la Sorbonne, 6, 1936 = 84 pág. con 45 figuras en el texto.

Se trata de un folleto de alto valor técnico que forma parte del trabajo más general "Le problème des aptitudes a l'age scolaire".

Contiene una investigación efectuada sobre 21 escolares adolescentes, en un establecimiento de enseñanza media, que habían sido aplazados en el curso y no podían por lo tanto ser promovidos al curso superior. La investigación se hizo sobre los siguientes análisis: Examen somático y psiquiátrico que llegó a descubrir verdaderos estados dramáticos interiores del niño, a menudo desconocidos para él mismo. Una serie de exámenes por *test* de edad y de aptitudes; aplicación de un *test* personal de aprovechamiento educacional; examen por el *test* de carácter de Rorschach aplicado con cuidado sobre las mismas bases establecidas por Rorschach. Se efectuó una comparación entre los resultados obtenidos entre sí, y entre ellos y las notas escolares de los niños.

Los *test* utilizados fueron los más consagrados, a saber: *test individual* de edad mental de Binet Terman; el *analítico* de inteligencia de Meili; el de *atención* de Pieron; los de *memoria* de Cloparède; los de *habilidad manual* de Walther.

Del análisis de los 21 sujetos sometidos a estudio se deduce la bondad y la seguridad del método adoptado, y la riqueza de conclusiones a que conduce, alcanzándose una certidumbre de clasificación, que había sido difícil obtener por otrros caminos y otros tipos de *test.*

Después del análisis de los 21 sujetos los autores entran al estudio de los factores de la inadaptación escolar, encontrando una variación considerable de un caso a otro pero estableciendo que en general un adolescente que en los estudios medios ha presentado procesos difíciles y perturbaciones generales puede ser y es más tarde un hombre capaz de desenvolverse inteligentemente y alcanzar objetivos apreciables.

Aconsejan en definitiva no multiplicar en un mismo establecimiento un tipo uniforme de clase en que todos los alumnos se confundan sin selección; es preferible dividir el gran grupo de jóvenes en categorías por el tipo apropiado de enseñanza que conviene dar en cada una de estas categorías, lo cual es bastante sencillo y practicable en los establecimientos de gran población escolar. N. B. M.

JARRY-GUÉROULT, R. J., *Le rapports limites de l'ordre et du libre arbitre dans l'evolution des sociétés humaines.* I. "Figuration cartesienne du fait social". Paris. Hermann et Cie. éditeurs. 6, Rue de la Sorbonne, 6, 1936. Un folleto de 64 páginas con 4 figuras y dos planchas.

Comprende dos capítulos: "Introducción a los métodos de la dinámica social" y "Relaciones límites del orden y del libre albedrío en la evolución de las sociedades humanas".

El autor estudia los progresos del pensamiento científico contemporáneos en relación a la idea del soberano Bien de Descartes, moral necesaria en las sociedades, categorías de la voluntad, introducción de la evidencia en los problemas de la dinámica social, utilizando los métodos perspectivos con las convenciones elementales por la figuración vectorial del medio social, llegándose a la posición de control de la evolución y el postulado de la libertad.

El fin del trabajo —que se conduce constantemente por los métodos matemáticos— lleva a plantear este dilema; fines que comprende la libertad funcional interna del hombre, o su sujeción a mecanizaciones que lo encierran.

O estudia los hombres como mecanismos encerrados por otros mecanismos, ya —estos últimos— rigurosamente auténticos. Si esos hombres son, ellos mismos, mecanismos determinados, nada puede alterar la evolución que sufrieron y que sufrirán.

O están dotados de libre albedrío y conscientes de haber descubierto en el último siglo los secretos que le dan frente al mundo físico, como frente al mundo de las reglas y las convenciones que radican en cuarenta siglos de civilización agrícola un doble grado de libertad. En tal caso corresponde demandarse, ¿qué uso han hecho de esta doble libertad?

Y así se pregunta M. Jarry-Guéroult: a la liberación que ha traído a los hombres el invento de las máquinas, ¿ha correspondido una paralela liberación de las cadenas de un derecho social que no ha evolucionado ciñéndose a la naturaleza de los hechos modificados?

Las dudas que se ofrecen en esta forma promete el autor examinarlas en siguientes publicaciones.

Plantea también el autor un ensayo de clasificación de los elementos utilizados en la vida social de la colmena humana; distinguir la rama de los "energotoros" de los "catalizadores": en la primera distinguir la maquinaria sea mineral, animal o vegetal y clasificar enseguida los órdenes por rendimientos energéticos del mismo orden de magnitud.

Llamar género al conjunto de instrumentales que elaboran la misma calidad de productos; familia a las que funcionan en condiciones similares; especies a los que trabajan en condiciones rigurosamente idénticas. Así una máquina a vapor y un motor a combustión interna cuyo rendimiento varía de simple a triple estarían en dos órdenes distintos. La evolución de este instrumental desplaza formas anticuadas por nuevas, pero aquéllas pueden retornar al influjo de circunstancias de excepción, pero seguramente volverán reformadas por los progresos que la vida hace experimentar a todos. El hombre no se transforma así, pero su función va perdiendo su calidad instrumental lentamente, adquiriendo cada vez una calidad más directriz, planteándose así el problema referido de si la evolución es impulsada por el libre albedrío, o ceñida por la evolución del instrumental mecánico.

La civilización arrecia. Los pueblos de cultura más densa adquieren una posición de mayor equilibrio, y para lograrlo desalojan a los restantes de su alveolo arrancándolos de su quietud. N. B. M.

SOCIOS ACTIVOS

Aguilar, Félix
Albizzati, Carlos M.
Alvarez, Raúl J.
Allende Lezama, Luciano P.
Anastasi, Camilo
Anchorena, Juan E.
André, Enrique de
Andrioletti, Juan Luis
Añón Suárez, Vicente
Aparicio, Francisco de
Aráoz Alfaro, Gregorio
Arbecchi, Armando C.
Arce, Manuel J.
Arditi Thompson, H.
Armani, Aquiles
Arnaudo, Silvio J.
Avila Méndez, Delfín
Aztiria, Ignacio
Bado, Atilio A.
Bachmann, Enesto
Baglietto, Eduardo E.
Balbiani, Atilio
Bancalari, Agustín
Barabino Amadeo, S.
Barbieri, Antonio
Bargna, Juan L.
Barilari, Mariano J.
Barral Souto, José
Barrancos, Leónidas A.
Becke, Alejandro von der
Berrino, Juan B.
Bertino, José Carlos
Besio Moreno, Nicolás
Bianchi Lischetti, A.
Biggeri, Carlos
Blaquier, Juan
Boaglio, Santiago
Bolognini, Héctor
Bonanni, Cayetano A.
Bontempi, Luis
Bordenave, Pablo E.
Borruat, Luis
Borzi, Ana María
Bosch, Gonzalo
Bosisio, Anecto J.
Bottaro, Juan C.
Bozzini, Luis (h.)
Briano, Juan A.
Bunge, Juan C.
Buontempo, Guillermo
Butty, Enrique
Buzzo, Alfredo
Buzzo, Eduardo B.
Caillet Bois, Teodoro
Calandra, Raúl E.
Camus, Nicolás
Canale, Humberto
Carabelli, Juan José
Carbia, Rómulo D.
Carbone, Esteban
Carbonell, José J.
Cárcova, Enrique de la
Carelli, Antonio
Carelli, Humberto H.
Caride Massini, Pedro
Carman, Ernesto
Carrea, Juan Ubaldo
Casacuberta, Antonio
Castellanos, Alberto
Castello, Manuel F.
Castiñeiras, Julio R.
Celasco, Juan L.
Cock, Guillermo E.
Coni Bazán, F. A.
Curti, Orlando P.
Curutchet, Luis
Chanourdie, Enrique
Chizzini Melo, Aníbal F.
D'Ascoli, Lucio
Dassen, Claro C.
Dasso, Héctor
Dasso, Ricardo L.
De Cesare, Elías A.
De Fina, Armando L.
De la Ini, Juan E.
Dellepiane, Luis J.
Deulofeu, Venancio
Díaz, Emilio C.
Dieulefait, Carlos E.
Doello-Jurado, Martín
Dobranich, Jorge W.
Domínguez, Juan A.
Dubecq, Raúl E.
Dueñas, José
Duhau, Luis
Dupont, Enrique
Durañona y Vedia, A.
Durrieu, Mauricio
Edelberg, Benjamín
Escudero, Pedro
Faré, Santo S.
Fernández, Alberto J.
Fernández Díaz, A.
Fernández Long, S.
Figini, Angel
Figuerero, Hernando W.
Fischer, Gustavo Juan
Flores, Emilio M.
Floriani, Luis
Florit, Carlos J.
Forn, Carlos J.
Fossa Mancini, E.
Franceschi, Alfredo
Fürnkorn, Divico A.
Gadda, Carlos Manuel
Galmarini, Alfredo G.
Gandolfi Herrero, Augusto
Gandolfo, José S.
Gascón, Alberto
Gaspar, Fernando L.
Géneau, Carlos E.
Gerardi, Donato
Ghigliazza, Sebastián
Giagnoni, Bartolomé E.
Giannone, José
Gradín, Carlos
Grieben, Arturo
Gutiérrez, Ricardo J.
Haussler, Emilio
Herbin, Luis A.
Hermitte, Enrique
Herrera Vegas, M.
Herzer, Bernardo
Hickethier, Carlos F.
Hofmann, Herbert
Hortal, José Angel
Houssay, Bernardo A.
Hoyo, Arturo
Igartúa, Luis María
Irigoyen, Luis H.
Isetta, José
Ivanissevich, Ludovico
Jorge, José M.
Jakob, Cristofredo
Keiper, Guillermo
King, Diarmid O.
Kinkelin Pelletán, J. C. de
Kraglievich, Nicolás T.
Krapf, Eduardo
Labarthe, Julio
Lagunas, Simón
La Menza, Francisco
Laporte, Luis B.
Larco, Esteban
Lasso, Alfredo L.
Latzina, Eduardo
Ligniéres, Roberto
Lizer y Trelles, C. A.
Lombardi, Alberto
Loyarte, Ramón G.
Lozano, Nicolás
Lugones, Arturo M.
Llauró, José
Mac Donagh, E. J.
Magnin, Félix J.
Magnin, Jorge
Mainini, Carlos
Mallol, Emilio
Mamberto, Benito
Marcó del Pont, E.
Marchionatto, Juan B.
Maresca, Antonio J.
Marini, Tomás L.
Martignone, Eduardo
Marotta, F. Pedro
Marotta, R. Armando
Mata, Leopoldo
Méndez, Julio
Meoli, Gabriel
Meoli, Humberto
Mercau, Agustín
Mermoz, Francisco A.
Molfino, José F.
Molina Carranza, L.
Molle, Clotilde C.
Montes, Vicente E.
Moreno, Evaristo V.
Nágera, Juan José
Natale, Alfredo
Natale, Ernesto
Negrete, Lucía
Negri, Mario L.
Nelson, Ernesto
Nielsen, Juan
Oliveri, Alfredo E.
Ortega Belgrano, Raúl
Ortiz, Aníbal A.
Ortiz de Rosas, Jorge
Otamendi, Gustavo
Ottonello, Héctor
Páez, José María
Page, Franklin Nelson
Paitoví y Oliveras, A.
Paquet, Carlos
Parodi, Edmundo
Parodi, Lorenzo R.
Pasman, Raúl G.
Pasman, Rodolfo E.
Pastore, Franco
Paz Anchorena, José M.
Pérez Hernández, A.
Perrone, Cayetano
Pestalardo, Agustín
Pini, Aldo S.
Platz, Hubert
Podestá, Juan Carlos
Polti, Modesto
Posadas, Carlos
Quinos, José Luis
Quinterno, Bruno F.
Quiroga, Pedro R.
Raimondi, Alejandro
Raffo, Bartolomé M.
Ramaccioni, Danilo
Ramallo, Carlos M.
Ratto, Héctor R.
Rebuelto, Antonio
Rebuelto, Emilio
Reece, William Asher
Repetto, Blas Angel
Repossini, José
Ringuelet, Emilio J.
Rissotto, Atilio A.
Rivarola, Rodolfo
Robles, Angel A.
Rodríguez Aravena, S.
Rodríguez, Germinal
Roffo, Angel H.
Roffo, Juan
Roldán, Raimundo
Romero Brest, Enrique
Rokotnitz, Otto
Rospide, Juan
Rossell Soler, Pedro
Ruata, Luis E.
Ruiz Moreno, Isidoro
Ruiz Moreno, Adrián
Rumi, Tomás J.

Sabaria, Enrique
Sagastume Berra, A. E.
Salomón, Hugo
Sánchez, José Ricardo
Sánchez, Gregorio L.
Sánchez Díaz, Abel
Sánchez Sorondo, M. G.
Sanromán, Iberio
Santángelo, Rodolfo
Sarhy, Juan F.
Sarrabayrouse, Eugenio
Savon, Marcos A.
Schnack, Benno J.
Schmidt, Max
Schulz, Guillermo
Selva, Domingo
Sesma, Angel
Sheahan, Juan F.
Silva, Leónidas L.
Simons, Hellmut
Siri, Luis
Sobral, Arturo
Solari, Emilio F.
Solari, Miguel A.
Soler, Frank L.
Solórzano, Luis A.
Sordelli, Alfredo
Spinetto, David J.
Spota, Víctor J.
Storni, Segundo R.
Suárez, Angel
Taiana, Alberto F.
Taiana, Jorge
Tarragona, José
Tedeschi, Virgilio
Tello, Eugenio
Torre Bertucci, Pedro
Torello, Pablo
Tossini, Luis
Trelles, Rogelio A.
Trucco, Sixto E.
Valeiras, Antonio
Valentiner, Hugo
Valentini, Argentino
Valentinuzzi, Máximo
Vallebella, Colón B.
Vallejo, Segundo E.
Vanossi, Reinaldo
Varela, Rufino
Vecchi. Arístides de
Vela Huergo, Julio
Veyga, Francisco de
Vidal, Eduardo
Villalobos D., C.
Vignaux, Juan C.
Vinardell, Alberto
Volpatti, Eduardo
Wainer, Jacobo
White, Guillermo J.
Wauters, Carlos
Wysztelewski, W. de
Zamboni, Agustín
Zappi, Enrique V.
Zavalla, Carlos M.
Zuloaga, Angel M.

SOCIOS ADHERENTES

Bazzanella, José
Devoto, Carlos Alberto
Folcini, Martín L. G.
García, Eduardo D.
Glücksmann, Carlos E.
Goyena, Ricardo J.
Laporte, Julio A.
Magne de la Croix, P. A.
Milesi, Emilio Angel
Quevedo Capdevila, Eduardo A.
Recoder, Roberto F.
Repetto, Cayetano
Rusconi, Carlos
Somonte, Eduardo
Wechsler, Wolf

CASAS ADHERENTES

Angel Estrada y Cía.
Lutz, Ferrando y Cía.
Hijos de Atilio Massone
Otto Hess, S. A.
Est. Gráf. "Tomás Palumbo"
Jacobo Peuser, S. A. Ltda.

SOCIO VITALICIO

Huergo, Eduardo María

MIEMBROS PROTECTORES DE LA ORGANIZACION DIDACTICA DE BUENOS AIRES

Anchorena, Juan E.
Besio Moreno, Nicolás
Tornquist, E. y Cía. (Lda.)

SECCION CORDOBA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Ing. Pedro N. Gordillo; Vice-presidente, Dr. Miguel Fernández; Vice-presidente, Ing. Daniel A. García; Secretarios, Dr. Guillermo V. Stuckert; Prof. Tulio Mácola; Tesoreros, Dr. Juan Olsacher; Dr. Carlos C. Hosseus; Vocales, Ing. Clodoveo Pascualini; Dr. Agustín E. Larrauri; Dra. J. Gambastiani de Peláez; Arq. Salvador Godoy; Ing. Jorge E. Bobone; Dr. Federico Padula; Ing. Luis Chechi; Dr. Edwin Rothlin.

SOCIOS ACTIVOS

Achával, Luis
Aguiar, Henoch D.
Amaya, Arturo A.
Arrambide, Miguel
Bobone, Jorge E.
Bodenbender, G.
Bonet, Rafael
Borzacow, Wladimir
Brandan, Ramón A.
Broglia, Alberto A.
Buteler, Jesús E.
Camilloni, Carlos
Carlomagno, José
Chaudet, Enrique
Checchi, Luis
Deheza, Eduardo
Del Viso, Jacinto
De Tezanos Pinto, J.
Devoto, Heraclio A.
Espinosa, Manual
Esteban, Fernando
Fernández, Miguel
Fitz Simon, Sgo. E.
Fontana, Lorenzo P.
Fuchs, Guillermo J.
García, Daniel
Gavier, Daniel E.
Giménez de Azúa, F.
Godoy, Salvador A.
Gómez, Calixto A.
Gordillo, Pedro N.
Granillo Barros, M.
Hosseus, Carlos Curt
Jagsich, Juan
Kronfus, Juan
Lofayette Zimmer, M.
Larrauri, Agustín C.
Lutzow Holm, Olaf.
Mácola, Berardo A.
Mácola, Tulio

Mirizzi, Pablo Luis
Ninci, Carlos A.
Ninci, Raúl T.
Novillo Corvalán, S.
Olsacher, Juan
Padula, Federico
Pasqualini, Clodoveo
Peláez, J. Gambastiani de
Pilotto, Bernardo
Ponce Laforgue, C.
Roggeri, Domingo
Rothlin, Edwin
Sayago, Gumersindo
Schmiedecke, Augusto
Sigal, Moisés
Sparn, Enrique
Stuckert, Guillermo V.
Taravella, Ambrosio L.
Tarragó, Emeterio
Torres, Valeriano
Trebino, Natalio
Vercello, Carlos
Yadarola, Mauricio L.

SECCION SANTA FE

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Gustavo A. Fester; Vice-presidente, Dr. José Piazza; Secretario de correspondencia, Ing. Quím. Francisco A. Bertuzzi; Secretario de actas, Ing. Quím. José Cruellas; Tesorero, Ing. Quím. Enrique Virasoro; Vocal 1º, Ing. José Babini; Vocal 2º, Prof. Rolando Hereñú; Vocal suplente 1º, Prof. Julio Salaber; Vocal suplente 2º, Ing. Quím. Guillermo Berraz; Encargado de Biblioteca y Canje, Ing. Quím. Rodolfo Rouzaut; Encargado de Publicaciones, Ing. José Babini.

SOCIOS ACTIVOS

Anadón, Leónidas
Ariotti, Juan Carlos
Babini, José
Benet, Pedro José
Berraz, Guillermo
Bertuzzi, Francisco A.
Bonazzola, César J.
Borruat, Luis (hijo)
Borzone, Rodolfo
Bossi, Celestino
Caballero, Martín A.
Camo, José María
Cerana, Miguel
Claus, Guillermo
Courault, Pablo
Crouzeilles, A. L. de
Cruellas, José
Christen, Carlos
Christen, Rodolfo G.
Damianovich, Horacio
Falco, Federico
Fester, Gustavo A.
Frenguelli, Joaquín
Gollán, Josué (h.).
Gschwind, Eduardo P.
Guinle, Hugo José
Hereñú, Rolando
Hotschewer, Curto
Juliá Tolrá, Antonio
Kleer, Gregorio
Mai, Carlos
Mántaras, Fernando
Marelli, Hipólito
Martino, Antonio E.
Montpellier, Luis Marcos
Mounier, Celestino
Muzzio, Enrique
Nigro, Angel
Niklison, Carlos A.
Oliva, José
Peresutti, Luis
Piazza, José
Piñero, Rodolfo
Pozzo, Hiram J.
Ragonese, Arturo E.
Reinares, Sergio
Rouzaut, Rodolfo
Salaber, Julio
Salgado, José
Santini, Bruno L. P.
Schivazappa, Mario
Simonutti, Atilio A.
Tissembaum, Mariano
Urondo, Francisco E.
Virasoro, Enrique

SECCION MENDOZA

COMISION DIRECTIVA

Presidente honorario, Ing. José S. Corti; Presidente, Dr. Juan B. Lara; Vice-presidente, Ing. Agr. José Raúl Ponce; Secretario, Ing. Agr. Julio Tolosa (h); Tesorero, Ing. Cayetano C. Piccione; Bibliotecario, Sr. Adrián Ruiz Leal; Vocales: Dr. Eduardo Carette; Dr. Mario Bidone; Ing. Alfredo Rosenthal; Sr. Manuel Tellechea; Ing. Agr. Rafael E. Pontis.

SOCIOS ACTIVOS

Alurralde, Juan Carlos
Anzorena, Jacinto
Anzorena, Pedro
Ayala Castagnino, G.
Basso, Germinal
Benegas, Raúl
Bidone, Mario
Borsani, Carlos Pablo
Burgoa, Pedro A.
Carette, Eduardo
Croce, Francisco M.
Espinosa, Norberto A.
Flor Alvarado, José M.
Gabrielli, Francisco J.
Galeano, Edgardo
García, José Federico
Godoy Vergelin, G.
Gomensoro, José N.
Granzella, Sinibaldo
Guiard, Ricardo
Jofré, Alberto L.
Lara, Juan B.
Lucero, Braulio G.
Lugones, Manuel G.
Magistretti, Guillermo
Maneschi, Ernesto
Maroso, José Angel
Maveroff, Aquiles
Mayorga, Santiago C.
Miyara, Salomón
Paganotto, Juan P.
Pelaia, Dante
Piccione, Cayetano C.
Ponce, José Raúl
Pontis, Rafael E.
Rosales, Ranulfo S.
Rosenthal, Alfredo
Ruiz, Aníbal
Ruiz Leal, Adrián
Silvestre, Tomás
Stura, Angel C.
Tellechea, Manuel
Tolosa, Julio (h)
Toso, Juan P.
Villanueva, Miguel Angel

SOCIOS CORRESPONDIENTES

Aguilar y Santillán, R.......	México
Amaral, Afranio de.........	San Pablo (Br.)
Avendaño, Leónidas.........	Lima
Alvarez, Antenor............	Sgo. del Estero
Bonarelli, Guido............	Gubbio (It.)
Borel, Emile................	París
Bachmann, Carlos J.........	Lima
Bragg, William Heury......	Londres
Bolívar, Ignacio.............	Madrid
Bruch, Carlos...............	Olivos
Cabrera, Blás...............	Madrid
Campos Porto, Pablo........	Río de Janeiro
Carabajal, Melitón M.......	Lima
Corti, José S................	Mendoza
Darmois Georges............	París
Dávila, Rubén..............	Santiago (Ch.)
Dabbene, Roberto...........	La Plata
Escomel, Edmundo.........	Arequipa (P.)
Fiebrig, Carlos..............	Munich (Al.)
Fontecilla Larrain, Arturo...	Santiago (Ch.)
Fort, Michel................	Lima
González del Riego, Felipe..	Lima
Greve, Germán..............	Santiago (Ch.)
Guinier, Philibert............	Nancy (Fr.)
Hadamard, Jacques.........	París
Hauman, Luciano...........	Bruselas
Hernández, Juvenal.........	Roma
Hijar y Haro, Luis.........	Santiago (Ch.)
Janet, Pierre................	México
Jiménez de Asúa, Luis......	París
Kinart, Fernando...........	Madrid
Lahille, Fernando...........	Amberes
Langevin, Paul..............	Tarn (Fr.)
Levi Civita, Tulio...........	París
Lobo, Bruno.................	Roma
Lehmann Nitsche, Roberto..	Río de Janeiro
Mardones, Francisco........	Berlín
Molina, Enrique............	Santiago (Ch.)
Monjarás, Jesús E..........	Concepc. (Ch.)
Moretti, Gaetano............	México
Oliver Schneider, Carlos....	Milán
Pereira d'Andrade, Lencastre	Concepc. (Ch.)
Perrin, Tomás G............	Nova Goa (I. P.)
Porter, Carlos E............	México
Pi y Suñer, Augusto........	Santiago (Ch.)
Reyes Cox, Eduardo........	Barcelona
Rospigliosi y Vigil, Carlos..	Antofag. (Ch.)
Rowe, Leo S................	Lima
Shepperd, William R........	Wáshington
Tello, Julio C...............	New York
Villarán, Manuel V.........	Lima
Vélez, Daniel M............	Lima
Valle, Rafael H.............	México
Vitoria, Eduardo...........	México
Volterra, Vito..............	Barcelona



ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

ADOPTADOS PARA SUS PUBLICACIONES POR LA

ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

Director: EMILIO REBUELTO

FEBRERO 1938. — ENTREGA II. — TOMO CXXV

SUMARIO

BUENOS AIRES

Calle Santa Fé 1145

1938

ADVERTENCIA. — Los colaboradores de los Anales son personalmente responsables de la tesis sustentada en sus escritos. Tienen derecho a la corrección de dos pruebas. Los que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos, deben solicitarla por escrito. Los manuscritos, correspondencia, etc., se enviarán a la sede social, Santa Fe 1145.

Impreso en los Talleres Gráficos "TOMAS PALUMBO" - La Madrid 321-325 - Buenos Aires

LOS MOMENTOS DE UN GRUPO DE FUNCIONES DE PROBABILIDAD

Y SUS RELACIONES CON LAS ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN, LAS ECUACIONES DE LAPLACE, LAS FRACCIONES CONTINUAS ALGEBRAICAS Y LA SUMA DE LAS SERIES DIVERGENTES

POR

C. E. DIEULEFAIT
(Universidad del Litoral)

Resumen

Después de recordar los elementos básicos del teorema fundamental del Cálculo de las probabilidades, lo que principalmente tiene por objeto introducir algunas ideas esenciales para puntos ulteriores, fijamos nuestra atención en la definición de las funciones de probabilidad del grupo (P) de Pearson. Efectuamos una clasificación de las funciones de este grupo, fijando en él los elementos que luego han de conducirnos a los polinomios de Jacobi, Legendre, Laguerre, Tchebycheff, Hermite, etc. Damos en seguida una generalización de la fórmula de Olindo Rodrígues que éste usó para definir los polinomios esféricos de Legendre y que a nosotros nos sirve para efectuar un razonamiento único, válido para todo el grupo de los polinomios anteriormente designados. Probamos la ortogonalidad de estos polinomios con las funciones de probabilidad del grupo P, y partiendo de esta misma ortogonalidad encontramos el grupo de las ecuaciones diferenciales de segundo orden que estos polinomios satisfacen. Esto nos permite encarar la solución de este grupo de ecuaciones, explicitando directamente una de sus soluciones particulares en el caso que la ecuación de segundo grado relativa al término sin derivación dé una raíz entera positiva. Como una aplicación de estas ideas damos una solución de la conocida ecuación diferencial de la serie hipergeométrica, hallando nuevamente la elegante relación de los polinomios de Jacobi con las series de Gauss en un caso particular de la misma.

Consideramos un grupo de problemas que se había propuesto y había resuelto Laguerre, concerniente al desarrollo en fracciones continuas de varias funciones que de inmediato vemos corresponden al grupo P, observación que nos permite resolver el problema más directamen e y explicitando las fórmulas de los denominadores de las reducidas sucesivas. Probamos luego que las soluciones de las ecuaciones diferenciales de segundo orden del grupo ya hallado tienen sus soluciones ortogonales con las funciones de probabilidad P, lo que plantea naturalmente la cuestión de buscar en el caso general de soluciones particulares no polinómicas sino de series, una explicitación de las mismas. Partiendo de la integral de Cauchy, logramos dar esta solución ya en un caso obtenida por Schläfli para los polinomios de Legendre (que son los que corresponden a una probabilidad constante), extendiéndola para los polinomios o series correspondientes a cualquier función P. Hacemos ver cómo modificando ligeramente la forma de escritura de la derivada logarítmica de las funciones P, las funciones características de las mismas son las soluciones de las ecuaciones de Laplace de segundo orden, lo que permite una interpretación de estas ecuaciones dentro de la cual puede encontrarse una de las formas de la de Bessel. Nos referimos brevemente al problema de la suma de series divergentes, sobre todo en el sentido de determinar estas sumas por el intermedio de las funciones generatrices y con sólo aplicar las recurrencias de los momentos de las funciones P calculamos la serie euleriana oscilante, la geométrica y otra sencilla que escapó al método de la media de Cesaro.

* * *

El problema fundamental del Cálculo de las Probabilidades, tiene por objeto el demostrar que los momentos de una función de probabilidad, son característicos de la misma. De ello se deduce la equiparación de ambas locuciones. La parte más fundamental de este teorema, ocurre en la recíproca, esto es, que, dada una sucesión de momentos, éstos determinan una función y sólo una, de probabilidad. Para que la sucesión así dada, implique y baste para asegurar la existencia de la función, es necesario que esta sucesión verifique una sucesión de desigualdades tales que, si con α_s designamos el momento s de $p(x)$, para x variable en el intervalo $(a\ b)$ o sea.

$$\alpha_s = \int_a^b p(x)\, x^s\, dx$$

se tenga.

$$(S)\quad \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{n+1} \\ \vdots & & & \\ \alpha_n & \alpha_{n+1} & \ldots & \alpha_{2n} \end{vmatrix} > 0 \qquad \text{para } n = 0, 1, 2 \ldots$$

de donde, y de acuerdo a una conocida observación del señor Borel [1]:

$$\begin{vmatrix} \alpha_p & \alpha_{p+1} \\ \alpha_{p+1} & \alpha_{p+2} \end{vmatrix} > 0$$

La demostración puede abordarse por dos vías. Utilizando en una a función característica de una función de probabilidad o estudiando en otra el límite de una solución algebraica aproximada. La primera es la impulsada por H. Poincaré, P. Levy y otros, no sin tener sus orígenes en el mismo célebre tratado de Laplace. La segunda es la seguida por Tchebycheff, Stieljes, Markoff, etc.

Si se trata de una variable aleatoria de orden finito, en estos mismos ANALES [2] hemos mostrado, siguiendo el procedimiento de la función característica, cómo el problema quedaba resuelto.

Se daban los momentos $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n-1}$ de una variable aleatoria de orden n. Se debía determinar p_i y x_i $(i = \overline{1, n})$ de modo que.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^s = \alpha_s \qquad (s = \overline{0, 2n-1}) \qquad [1]$$

Introduciendo la función característica de Cauchy.

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} p_i e^{tx_i}$$

su segundo miembro no es otra cosa que la solución general de la ecuación diferencial a coeficientes constantes.

$$a_n \varphi(t) + a_{n-1} \frac{d\varphi(t)}{dt} + \ldots + a_0 \frac{d^n \varphi(t)}{dt^n} = 0 \qquad [2]$$

(1) E. BOREL. *Les series divergentes.*

(2) C. DIEULEFAIT. *Determinación de una ley de probabilidad*, etc. 1931.

con la condición que los $n\ x_i$ sean las raíces de la ecuación característica:

$$a_n + a_{n-1}\,x + \ldots + a_0\,x^n = 0$$

Pero, uniendo esta ecuación con las derivadas de la [2] hasta el orden $n - 1$, se tiene el sistema:

$$\begin{array}{l} a_n + a_{n-1}\,x + \ldots\ldots + a_0\,x^n = 0 \\ a_n\,\alpha_0 + a_{n-1}\,\alpha_1 + \ldots\ldots + a_0\,\alpha_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_n\,\alpha_{n-1} + a_{n-1}\,\alpha_n + \ldots\ldots + a_0\,\alpha_{2n-1} = 0 \end{array}$$

que resulta de observar que:

$$\left(\frac{d^s\,\varphi(t)}{dt^s}\right)_{t=0} = \alpha_s$$

Eliminando los coeficientes a_n, a_{n-1}, ... a_0 del anterior sistema, se encuentra:

$$\omega_n(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & \ldots & x^n \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \\ \vdots & & & \\ \alpha_{n-1} & \alpha_n & \ldots & \alpha_{2n-1} \end{vmatrix}$$

que determina los valores buscados x_i, obteniéndose los correspondientes p de las n primeras ecuaciones [1].

Considerando los polinomios:

$$X_k(x) = \frac{(-1)^k}{\beta_k}\,\omega_k(x)$$

siendo β_k el menor complementario del elemento x^k del determinante $\omega_k(x)$; los coeficientes de los términos de x^k en los polinomios $X_k(x)$ serán entonces iguales a la unidad. Es fácil ver que los polinomios $\omega_k(x)$ como los $X_k(x)$, son ortogonales (1) o sea que:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\,X_k(x_i)\,x_i^{\nu} = 0$$

(1) C. Dieulefait. *Sobre la representac. de un func. de variable real en serie de polinom. ortogonales.* Publicac. Fac. Cs. Matemát. Univ. Litoral. 1935. (Aprovecho esta oportunidad para señalar un error de cálculo en un coeficiente de la fórmula de recurrencia, pág. 43).

para $\nu < k$. Se deduce, también, fácilmente, que:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i X_k^2 (x_i) = \frac{\beta_{k1+1}}{\beta_k}$$

relación que es la base para la formación de la condición (S).

En el caso recordado de la variable aleatoria de orden n, los primeros momentos, siempre que verifiquen las condiciones (S), son arbitrarios.

En cambio, los sucesivos resultan dados por relaciones fijas que deben conducir a la verificación permanente de la [1] en la cual p_i y x_i se han determinado, y esta condición se aplicará sin restricción para los valores de S.

En cambio, en el caso de que, inicialmente, se dé la sucesión de los momentos sin limitarlos, la solución anterior es tan sólo aproximada.

Consideremos, pues, la sucesión completa de los α. De ellos tomemos provisoriamente $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{2n-1}$. Supongamos que, aparte de la solución aproximada anterior, existan las cuplas P_i, ξ_i tales que:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \xi_i^s = \alpha_s$$

Se seguirá de ello que si $F(z)$ es un polinomio de grado no mayor que $2n - 1$, será:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i F(\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i F(x_i) \qquad [3]$$

y adoptando, como está en el proceso del método de Tchebycheff (¹), la definición:

$$F(z) = \frac{X_n(z) X_{n-1}(z)}{z - x_\nu}$$

con x_ν ($\nu = \overline{1, n}$) una de las raíces anteriores, se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{X_n(\xi_i) X_{n-1}(\xi_i)}{\xi_i - x_\nu} = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{X_n(x_i) X_{n-1}(x_i)}{x_i - x_\nu}$$

(¹) Véase G. Castelnuovo. *Calc. delle probabilitá.* II t.

pero como $$X_n(x_\nu) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{X_n(x_i)\, X_{n-1}(x_i)}{x_i - x_\nu} = p_\nu \frac{X_n(x_\nu)\, X_{n-1}(x_\nu)}{x_\nu - x_\nu} = p_\nu X_n'(x_\nu)\, X_{n-1}(x_\nu)$$

de acuerdo a la simple aplicación de la regla de L'Hopital.

Luego:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{X_n(\xi_i)\, X_{n-1}(\xi_i)}{\xi_i - x_\nu} = \sum_{i=1}^{n} P_i\, X_{n-1}(\xi_i)\, Q_{n-1}(\xi_i)$$

ya que, siendo $\frac{X_n(\xi_i)}{\xi_i - x_\nu}$ exactamente divisible, nos da un polinomio de grado $n - 1$ con el coeficiente del término mayor, igual a la unidad. Pero, gracias a la [3]:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i\, X_{n-1}(\xi_i)\, Q_{n-1}(\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} P_i\, X^2_{n-1}(\xi_i) = \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}}$$

Luego:

$$p_\nu\, X'_n(x_\nu)\, X_{n-1}(x_\nu) = \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}}$$

de donde:

$$p_\nu = \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}\, X'_n(x_\nu)\, X_{n-1}(x_\nu)} \qquad [3']$$

fórmula que hace explícita la determinación de cada probabilidad calculada, ligada al valor x_ν, en la solución aproximada.

El punto decisivo para la demostración trascendente del problema, es el que consiste en hacer intervenir los momentos sucesivos y en considerar, al través de las acumuladas de probabilidades (en donde está el verdadero origen de las integrales de Stieljes), las desigualdades dadas por Tchebycheff y también por Stieljes. Ellas nos conducen al resultado [1]:

$$|\,\Phi(a) - \Phi^{(n)}(a)\,| < p_a^{(n)}$$

siendo $\Phi(a)$ la suma $P_1 + P_2 + \ldots$ de los puntos ξ_i supuestos, crecientemente ordenados y situados en el intervalo $-\infty, a$ y $\Phi^{(n)}(a)$

[1] Véase G. Castelnuovo, loc. cit.

la correspondiente suma $p_1 + p_2 + \ldots$ para los valores x_i en el mismo intervalo y siendo $p_a^{(n)}$ la mayor de las probabilidades calculadas por la [3'] y contiguas al punto a.

Si la ampliación con los momentos sucesivos al α_{2n-1} es tal que se verifica

$$\lim_{n=\infty}. p_a^{(n)} = 0$$

entonces, en ese caso, podemos afirmar, con Tchebycheff, que se tendrá:

$$\lim_{n=\infty} \Phi^{(n)}(a) = \Phi(a)$$

y el problema está, en esencia, así resuelto.

La vía de la función característica nos conduce, en cambio, para la demostración de que la sucesión de los momentos determina la función de probabilidad (suponiéndose que estos momentos se han obtenido de una función de probabilidad) a las célebres fórmulas de reciprocidad de Fourier, cuando, en lugar de la función característica de Cauchy para $p(x)$, con x en (a, b) y que era:

$$\varphi(t) = \int_a^b p(x)\, e^{tx}\, dx$$

hacemos $t \sim t_i$ teniéndose:

$$\psi(t) = \int_a^b p(x)\, e^{itx}\, dx$$

y como fuera del intervalo $(a\, b)$, $p(x)$ es nula al cumplir el rol de una función de probabilidad, es también.

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, e^{itx}\, dx$$

y siendo:

$$\psi(t) = \psi(0) + \frac{t}{1!}\psi'(0) + \ldots + \frac{t^n}{n!}\psi^{(n)}(0) + \ldots =$$

$$= \alpha_0 + \frac{it}{1!}\alpha_1 - \frac{t^2}{2!}\alpha_2 - \frac{it^3}{3!}\alpha_3 + \ldots$$

ya que:

$$\psi^{(n)}(t) = \int_a^b p(x)\, i^n x^n e^{itx}\, dx$$

y $$\psi^{(n)}(0) = i^n \alpha_n$$

$\psi(t)$ estará determinada cuando se haya dado la sucesión de los α y en base a la fórmula de reciprocidad de Fourier:

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\, e^{-itx}\, dt$$

Como nos encontraremos con ella más adelante, calculemos aquí la función característica de la función de Laplace-Gauss:

$$p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

en el sentido de Cauchy:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, e^{tx}\, dx = e^{\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}[x-t]^2}\, dx = e^{\frac{t^2}{2}}$$

luego los momentos de $p_0(x)$ serán:

$$\alpha_s = \left(\frac{d^s}{dt^s}\, e^{\frac{t^2}{2}} \right)_{t=0}$$

deduciéndose fácilmente que:

$$\alpha_{2s+1} = 0 \qquad \alpha_{2s} = \frac{(2s)!}{2^s\, s!}$$

En Estadística, de la sucesión de características α sólo se consideran los primeros valores. No daremos aquí las razones de esta limitación y diremos que ella se restringe a los momentos α_0, α_1, α_2, α_3 y α_4 (1).

Partiendo del esquema de las pruebas repetidas, sin reposición del elemento extraído, el prof. K. Pearson se vió conducido a la consideración de una serie hipergeométrica (2), los coeficientes de cuyos términos daban las probabilidades buscadas, y encarando el estudio de la recurrencia entre dos coeficientes consecutivos, obtuvo, por una simple inferencia, para la determinación de la función de

(1) V.: C. Dieulefait. *Sobre la teoría de las funciones de frecuencia* (en prensa). Instit. de Biometría. Fac. Cs. Económ. Univ. Bs. Aires.

(2) V.: P. Elderton. *Frequency curves and correlation.*

probabilidades $\varphi(x)$, la siguiente expresión:

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2} \qquad [P]$$

de la cual, pero ya con ello apartándose de toda significación respecto a la estructura del esquema, dedujo su clásico repertorio de funciones de probabilidad.

La « explicación » en el sentido que el señor Borel ha dado para estos estudios, ha sido tema últimamente abordado por el señor G. Polya (3) en su ya célebre teoría de los contagios, cuya prosecución se presenta como un nuevo campo abierto a nuevas y muy útiles investigaciones.

Las distintas funciones contenidas en la relación anterior de la derivada logarítmica vamos a llamarlas brevemente funciones [*P*].

Si a y b son los ceros del denominador del segundo miembro de la [*P*], se deduce de ella

$$\int_a^b \varphi'(x)\,[b_0 x^n + b_1 x^{n+1} + b_2 x^{n+2}]\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,[a_0 x^n + a_1 x^{n+1}]\,dx$$

e integrando por partes y por ser $b_0 + b_1 x + b_2 x^2 = 0$ para $x = a$ y $x = b$ se tiene:

$$n\, b_0\, \alpha_{n-1} + (a_0 + \{n + 1\}\, b_1)\, \alpha_n + (a_1 + \{n + 2\}\, b_0)\, \alpha_{n+1} = 0 \qquad [R]$$

Esta recurrencia o ecuación a diferentes finitas, que es lo mismo, que más adelante consideraremos, y las más generales que se obtendrán generalizando la [*P*] en modo de aumentar los grados del numerador y denominador del segundo miembro, viene a permitir resolver, directa y simplemente, un grupo de ecuaciones lineales a diferencias finitas con coeficientes polinomios de primer grado en el rango y aun de mayor grado si se hubieran usado [*R*] deducidas de una segunda, etc., derivada logarítmica.

Para las determinaciones de a_0, a_1, b_0, b_1 y b_2 o sea de $\varphi(x)$, que de cinco se reducen en rigor a sólo cuatro dividiendo el segundo miembro de la [*P*] por una de ellas, la [*R*] sólo obliga a utilizar α_0, α_1, α_2, α_3 y α_4.

(3) V.: G. POLYA. *Sur quelques points de la théorie des probabilités.* Ann. Inst. H. Poincaré. 1931.

Dentro de esta limitación las demás α se deducen con ayuda de la misma [R]. Por ejemplo, si fuese $\varphi(x)$ la función de Laplace-Gauss siendo:

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{-x}{1}$$

será $$a = -\infty \quad ; \quad b = +\infty$$

$$a_0 = b_1 = b_2 = 0 \qquad a_1 = -1 \quad b_0 = 1$$

Luego [R] da:

$$\alpha_{n+1} = n\,\alpha_{n-1}$$

y tomando $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$, se deduce, como antes:

$$\alpha_{2s+1} = 0$$

$$\alpha_{2s} = \frac{(2s)!}{2^s\, s!}$$

Sin agotarla en sus detalles, vamos a clasificar las funciones pearsonianas de acuerdo al grado efectivo del numerador y denominador del segundo miembro de la [P].

Si a y b son finitos y distintos (1) y el numerador de primer grado, llamaremos a este caso J o jacobiano.

Si a y b son finitos y distintos (en particular simétricos) y el numerador es nulo, luego $\varphi(x)$ = constante, caso L_e o legendriano.

Si una raíz a o b es $-\infty$ o $+\infty$ (luego $b_2 = 0$) y el numerador de primer grado, caso L_a o laguerriano. Falta para este caso el correspondiente anterior que el numerador sea nulo, pues sería $\varphi(x) =$ = constante y extendido desde un punto fijo a otro impropio daría una masa de probabilidad infinita, de consiguiente, sin sentido.

Si a y b son $-\infty$ y $+\infty$ (luego $b_1 = b_2 = 0$) y numerador de primer grado, caso H o hermitiano.

Esta clasificación es suficiente para nuestro objeto. Con todo es útil mencionar que el caso J, en particular si es:

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{(1-2\lambda)\,x}{1-x^2}$$

(1) Siendo, por lo demás, a partir de la P, a y b los extremos del intervalo para el cual $\varphi(x)$ está definida, si fuese $a = b$ se trataría de un caso pueril de una variable $x = a = b$ con probabilidad igual a uno, o sea, de una constante cierta.

nos conduce a los polinomios ultraesféricos. Y éstos en particular, para $\lambda = \frac{1}{2}$ al caso L_e. También de J, en particular, si es:

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{x}{x^2 - 1}$$

se tienen los polinomios de Tchebycheff o los trigonométricos con el cambio de variables $x = \cos \theta$.

Para mayor simplicidad escribamos:

$$t(x) = a_0 + a_1 x$$

$$p(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$$

con lo que tendremos.

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{t(x)}{p(x)} \qquad [P]$$

No deberá ovidarse en todo lo que sigue que t y p son a lo sumo de grado uno y dos respectivamente.

Por esto mismo, y partiendo de $[P]$ se tiene.

$$\frac{d^n}{dx^n}\{\varphi(x)\, p^n(x)\} = \varphi(x)\, X_n(x) \qquad [4]$$

siendo $X_n(x)$ un polinomio de grado n. La demostración de la [4] es inmediata, basta tener presente la $[P]$ o que $\varphi' p = \varphi t$ y aplicar la regla de Leibnitz con esa precaución.

Vamos a demostrar que los polinomios $X_n(x)$ son ortogonales con $\varphi(x)$ en el intervalo $(a; b)$. Por ello la [4] es una generalización de la fórmula con que O. Rodrígues definía los polinomios de Legendre. En efecto, el caso L_e se podría escribir.

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{0}{x^2 - 1}$$

tomando $a = -1 \quad , \quad b = +1$.

$$\varphi(x) = \text{constante};$$

de donde: la fórmula de O. Rodrígues

$$K_n \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n = X_n(x)$$

para que estos $X_n(x)$ que en su estructura son así legendrianos coin-

cidan con la forma habitual bastará tomar.

$$K_n = \frac{1}{2^n\, n!}$$

La demostración de la ortogonalidad general o sea que:

$I_{n,n'} = \int_a^b \varphi(x)\, X_n(x)\, X_{n'}(x)\, dx = 0$ para $n \neq n'$ es inmediata.

Por la misma [4] se tiene:

$$I_{n,n'} = \int_a^b \frac{d^n}{dx^u} \{\varphi\, p^n\}\, X_{n'}\, dx$$

y si $n > n'$ e integramos por partes, se tiene:

$$I_{n,n'} = \left| \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \{\varphi\, p^n\}\, X_{n'} \right|_a^b - \left| \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} \{\varphi p^n\}\, X'_{n'} \right|_a^b + \ldots$$

$$+ (-1)^n \int_a^b \varphi\, p^n \frac{d^n}{dx^n} X_{n'}\, dx = 0$$

pues

$$\frac{d^n}{dx^n} X_{n'}(x) = 0.$$

También son nulas las entrebarras, pues

$$\frac{d^{n-s}}{dx^{n-s}} \{\varphi\, p^n\} = \varphi\, p^s\, Q_{n-s}(x)$$

siendo Q_{n-s} un polinomio del grado de su subíndice, y es $p(a) =$ $= p(b) = 0$.

En particular y con el mismo procedimiento se tiene:

$$I_{n.n} = (-1)^n\, n!\, \omega_{n.n} \int_a^b \varphi(x)\, p^n(x)\, dx$$

si indicamos

$$X_n(x) = \omega_{n.n}\, x^n + \omega_{n.n-1}\, x^{n-1} + \ldots$$

* * *

Es fácil obtener el grupo general de las ecuaciones diferenciales que tienen por solución a los polinomios ortogonales con las funciones

de P: J , L_e , L_a ; H ; T ; U ; etc., grupo que designaremos poli nomios ortogonales clásicos.

Como es sabido, de acuerdo a la teoría de las fracciones continuas algebraicas — cosa que también veremos al tratar los problemas de Laguerre — este algoritmo suele ser el paso común para este estudio. Fué Jacobi quien, para los polinomios que llevan su nombre, estableció un procedimiento elegante e independiente de las fracciones continuas (1) el cual vamos a extender a todo el grupo clásico, introduciendo para ello un polinomio arbitrario.

$$\theta(x) = p(x)\,\frac{d\,\theta_{n-2}}{dx}$$

siendo $\theta_{n-2}(x)$ un polinomio cualquiera de grado $n-2$. Luego los grados de $\theta(x)$ serán $n-1$ para J , L_e ; $n-2$ para L_a y $n-3$ para H.

Luego:

$$\int_a^b \varphi(x)\,X_n(x)\,\theta(x)\,dx = 0$$

sustituyendo e integrando por partes:

$$\Big|\,\theta_{n-2}\cdot\varphi\cdot p\cdot X_n\,\Big|_a^b - \int_a^b \theta_{n-2}\,[\varphi' p\,X_n + \varphi\,p'\,X_n + \varphi\,p\,X_n']\,dx = 0$$

por la nulidad de p en los extremos y por ser $\varphi'\,p = \varphi\,t$ nos queda:

$$\int_a^b \varphi\,\theta_{n-2}\,[(t + p')\,X_n + p\,X_n']\,dx = 0$$

pero teniendo en cuenta los grados máximos de t y p:

$$\int_a^b \varphi\,\theta_{n-2}\,(t + p')\,X_n\,dx = 0$$

luego queda.

$$\int_a^b \varphi\,\theta_{n-2}\,p\,X_n'\,dx = 0 \quad \text{y tomando} \quad \theta_{n-2} = \frac{d\omega_{n-1}(x)}{dx}$$

con $\omega_{n-1}(x)$ un polinomio arbitrario de grado $n-1$, se encuentra, sustituyendo, integrando por partes y teniendo en cuenta las ad-

(1) V.: C. Posse. *Sur quelques applications des fractions continues.*

vertencias anteriores:

$$\int_a^b \varphi\, \omega_{n-1} \left[(t + p')\, X'_n + p\, X''_n \right] dx = 0$$

La expresión dentro de corchetes, en la integral, es un polinomio de grado n; ω_{n-1} es un polinomio cualquiera de grado $n - 1$. Luego la aludida expresión sólo podrá diferir de X_n a lo sumo por una constante multiplicativa; o sea:

$$(t + p')\, X'_n + p\, X''_n = K_n\, X_n$$

Para determinar K_n igualo en ambos miembros los coeficientes de x^n y tengo:

$$n \left[t' + \frac{n+1}{2}\, p'' \right] = K_n$$

con lo cual queda demostrado que: siendo $\varphi(x)$ una función $[P]$, los polinomios:

$$X_n(x) = \frac{1}{\varphi(x)} \frac{d^n}{dx^n} \{ \varphi(x)\, p^n(x) \}$$

son una solución particular de la ecuación.

$$p(x) \frac{d^2y}{dx^2} + [t(x) + p'(x)] \frac{dy}{dx} - n \left[t'(x) + \frac{n+1}{2}\, p''(x) \right] y = 0. \quad [E]$$

Esto nos da, ya, un medio para calcular y explicitar una solución particular de una ecuación E siempre que n sea un número entero y positivo. Luego veremos cómo también resolveremos el problema cualquiera sea n.

La marcha a seguir para aplicar estos principios es bien sencilla. Consideremos la ecuación.

$$A(x) \frac{d^2y}{dx^2} + B(x) \frac{dy}{dx} + C\, y = 0$$

con C = constante y A y B polinomios a lo sumo de grado dos y uno respectivamente.

Determino primero $\varphi(x)$ por la ecuación

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{B(x) - A'(x)}{A(x)}$$

y si resulta que la ecuación de segundo grado en n:

$$A''(x)\,n^2 + 2\left[B'(x) - \frac{1}{2}A''(x)\right]n + 2\,C = 0$$

da una raíz igual a un entero positivo r, una solución de la ecuación diferencial dada, será:

$$y_1 = \frac{1}{\varphi(x)}\frac{d^r}{dx^r}[\varphi(x)\,A^r(x)] = A(x)\,e^{-\int\frac{B(x)}{A(x)}dx}\frac{d^r}{dx^r}[e^{\int\frac{B(x)}{A(x)}dx}A^{r-1}(x)]$$

Para hallar una segunda solución basta con tomar:

$$y = y_1\,z$$

y derivando y sustituyendo, se tiene:

$$A(x)\,y_1\,z'' + [2\,A\,y'_1 + B]\,z' = 0$$

$$\frac{z''}{z'} = -2\frac{y'_1}{y_1} - \frac{B}{A}$$

o también

$$\frac{z''}{z'} = -2\frac{y'_1}{y_1} - \frac{B - A'}{A} - \frac{A'}{A}$$

de donde.

$$z = \int\frac{dx}{\varphi\,.\,y_1^2\,.\,A}$$

lo que nos conduce a la solución general.

Consideremos ahora la ecuación clásica.

$$x(1 - x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (1 + \alpha + \beta)\,x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0$$

Será:

$$p(x) = x(1 - x)$$

$$t + p' = \gamma - (1 + \alpha + \beta)\,x$$

luego:

$$t = \gamma - 1 + (1 - \alpha - \beta)\,x$$

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{\gamma - 1 + (1 - \alpha - \beta)\,x}{x(1 - x)} \qquad a = 0 \quad b = 1$$

e integrando

$$\varphi(x) = x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma}$$

La ecuación del coeficiente nos conduce a:

$$n^2 + (\alpha + \beta)\, n + \alpha\,\beta = 0$$

cuyas raíces son $-\alpha$ y $-\beta$

Luego, si, por ejemplo, $-\alpha$ es un entero positivo, una solución de la ecuación de Euler-Gauss es:

$$y_1 = X_{-a} = x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\frac{d^{-a}}{dx^{-a}}\{x^{\gamma-a-1}(1-x)^{\beta-\gamma}\}$$

Pero como, por otra parte, la ecuación dada integrada en la forma corriente que consiste en partir del desarrollo

$$y_1 = \sum_s c_s\, x^{v+s}$$

nos conduce a la serie de Gauss:

$$y_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\,.\,\beta}{1\,.\,\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\,\beta(\beta+1)}{1\,.\,2\,.\,\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots$$

pero si $-\alpha$ es un entero positivo, la serie se reduce a un polinomio de ese grado, y entonces, haciendo: $-\alpha = v$

$$k_v\, x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma+v-\beta}\frac{d^v}{dx^v}\{x^{\gamma+v-1}(1-x)^{\beta-\gamma}\} = F(v, \alpha, \beta, \gamma, x)$$

siendo $k_v = \gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+v-1)$ como se ve fácilmente por el desarrollo del primer miembro por la fórmula de Leibnitz.

Hemos determinado así esta elegante relación establecida por Jacobi.

Si en lugar de $p = x(1-x)$ se hubiera tenido el trinomio completo de segundo grado, una simple transformación (1) nos hubiera llevado al caso anterior. No insistimos sobre otras aplicaciones que escapan a la aludida transformación algebraica y fáciles de seguir por esta vía, sacrificando así esas satisfacciones en homenaje a la brevedad.

(1) V.: E. GOURSAT. *Cours d'Analyse Mathematique.* II t.

* * *

Vamos a ocuparnos aquí de un grupo de problemas estudiados por Laguerre (1) relativos al desarrollo en fracción continua de ciertas funciones entre las cuales mencionaremos las siguientes:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad ; \quad \left(\frac{x+a}{x+b}\right)^m$$

y sus casos particulares; $e^{\text{arc}\,.\,\text{tag}\, x^{-1}}$, etc.

Fácil es ver que todas estas funciones caen dentro del grupo $[P]$. Esta sencilla observación nos permititá, siguiendo los estudios de Laguerre, avanzar más directamente en su solución y con más generalidad.

Sean $\varphi(x)$ y $f(x)$ el numerador y denominador de la reducida n del desarrollo de $\Phi(x)$, una de las funciones de Laguerre, del tipo P.

Si con $\left(\frac{1}{x^s}\right)^0$ indicamos una serie ordenada según las potencias decrecientes de x y que comienza con el término $\frac{1}{x^s}$, se tendrá:

$$\Phi(x) = \frac{\varphi}{f} + \left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right)^0$$

Tomando derivadas logarítmicas y siendo $\Phi(x)$ de P, resulta:

$$\frac{q-p'}{p} = \frac{\varphi'}{\varphi} - \frac{f'}{f} + \left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right)^0$$

o sea:

$$(q-p')\,\varphi f = p\,\varphi' f - \varphi\, p f' + p f \varphi\left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right)^0$$

si p es efectivamente de segundo grado, siendo $p\,\varphi f$ un polinomio de grado $2n+1$ se tendrá:

$$\varphi' p f - \varphi\,[p f' + (q-p') f] = c \qquad [5]$$

siendo c una cierta constante que no nos interesa y que será nula si p fuese de grado cero ó uno.

Derivando nuevamente la [5], nos queda:

$$pf'' + qf' + \frac{f}{\varphi}\,[\varphi'(q-p') + \varphi(q'-p'') - \varphi'' p - \varphi' p' - \varphi' p'] = 0$$

(1) V.: Laguerre. *Oeuvres*. II. t.

y por ser φ y f necesariamente irreductibles, indicando con $x_{n,i}$ los ceros del polinomio f tendremos:

$$pf'' + qf' = 0 \quad \text{para} \quad x = x_{n,i} \quad (i = \overline{1, n})$$

pero siendo el primer miembro un polinomio de grado n será:

$$pf'' + qf' = k_n f$$

con k_n una constante tal que:

$$k = n\left[q' + \frac{n-1}{2}p''\right]$$

luego, los denominadores de las reducidas n — ésimas del desarrollo de $\Phi(x) = e^{\int \frac{q-p'}{p}dx}$ en fracción continua, verifican también la ecuación diferencial:

$$p\frac{d^2y}{dx^2} + q\frac{dy}{dx} - n\left[\frac{dq}{dx} + \frac{n-1}{2}\frac{d^2p}{dx^2}\right]y = 0$$

Pero esta ecuación permite, como hemos visto, explicitar su solución que es parte del problema encarado. Se tendrá, pues:

$$f = e^{-\int \frac{q-p'}{p}dx}\frac{d^n}{dx^n}\left[e^{\int \frac{q-p'}{p}dx}p^n\right] \qquad [6]$$

Determinado así el denominador f de la reducida n — ésima, la [5] nos da el numerador correspondiente, teniéndose:

$$\varphi = c\Phi f\int\frac{dx}{p \cdot f^2\Phi}$$

lo que resuelve el problema.

La [6] y lo visto anteriormente nos muestra que para las $\Phi(x)$ de P los denominadores de las reducidas de sus desarrollos en fracciones continuas son polinomios ortogonales con la misma función $\Phi(x)$ (1).

Podría a este respecto demostrarse que las ecuaciones diferenciales del tipo

$$p_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + q_1(x)\frac{dy}{dx} - n\left[\frac{dq_1}{dx} + \frac{n-1}{2}\frac{d^2p_2}{dx^2}\right]y = 0 \qquad [E]$$

(1) Para otros métodos, que son los corrientes, v. C. JORDAN, 1º y 2º t., o nuestro: Sobre la repres, de una func. de var, real, etc. loc. cit.

que para p_2 y q_1, polinomios de grado no mayores que dos y uno especialmente y n entero positivo dan un polinomio ortogonal n — ésimo con la función

$$\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} = \frac{q - p'}{p}$$

en el intervalo $(a\,,b)$ tales que $p(a) = p(b) = 0$

tiene esta propiedad como característica en general, es decir, que sea o no n un entero positivo, las soluciones dan una sucesión de polinomios o funciones ortogonales.

La demostración correspondiente no implica la explicitación como los hemos hecho para n entero positivo, de la solución para los otros casos y que más adelante abordaremos.

Consideremos las dos ecuaciones.

$$p\,y'' + q\,y' - r_1\,y = 0$$

$$p\,y'' + q\,y' - r_2\,y = 0 \qquad \text{con } r_1 \neq r_2$$

Indiquemos con F_1 y F_2 dos soluciones correspondientes. Se tendrá:

$$r_1 F_1 = p\,F_1'' + q\,F_1' = L(x)$$

$$r_2 F_2 = p\,F_2'' + q\,F_2' = M(x)$$

Sea
$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{q - p'}{p}\ ;$$

multiplicando por $\varphi(x)$ y F_2 y F_1, respectivamente; integrando entre a y b y restando, se tiene:

$$(r_1 - r_2)\int_a^b \varphi F_1 F_2\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,L(x)\,F_2\,dx - \int_a^b \varphi\,M\,F_1\,dx$$

Pero:

$$\int_a^b \varphi\,L\,F_2\,dx = \Big|\,\varphi\,p\,F_2 F_1'\,\Big|_a^b - \int_a^b \varphi\,p\,F'_1\,F'_2\,dx$$

y análogamente:

$$\int_a^b \varphi\,M\,F_1\,dx = \Big|\,\varphi\,p\,F_1 F_2'\,\Big|_a^b - \int_a^b \varphi\,p\,F_2'\,F_1'\,dx$$

Luego, y siempre que F_1 y F_2 y sus primeras derivadas estén

definidas en a y b se tendrá:

$$(r_1 - r_2) \int_a^b \varphi F_1 F_2 dx = 0$$

y de donde, por ser $r_1 \neq r_2$ lo q. q. d.

* * *

Abordemos ahora el estudio de la $[E]$ para n cualquiera.

Recordemos para ello la célebre fórmula de Cauchy para una función holomorfa $\varphi(z)$ definida en un contorno (c) y siendo x un punto (número complejo) interno al mismo.

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \frac{\varphi(z)}{(z - x)} dz$$

La derivada n — ésima nos da:

$$\varphi^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{(c)} \frac{\varphi(z)}{(z - x)^{n+1}} dz. \qquad [7]$$

Sobre estas bases la fórmula explícita de un polinomio ortogonal con $\varphi(x)$ del grupo P que era:

$$X_n(x) = \frac{1}{\varphi(x)} \frac{d^n}{dx^n} [\varphi(x) p^n(x)]$$

podría escribirse:

$$X_n(x) = \frac{n!}{\varphi(x) 2\pi i} \int_{(c)} \frac{\varphi(z) p^n(z)}{(z - x)^{n+1}} dz. \qquad [8]$$

Ahora bien, supongamos que n deje de ser un número entero positivo como hasta aquí. La [8] la adoptaríamos en ese caso como una generalización de la derivada, del mismo modo como la integral de Euler.

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{n+1} dx = \Gamma(n)$$

la tratamos como una generalización de la factorial. Siendo pues n cualquiera, la [8] nos da:

$$y = X_n(x) = \frac{\Gamma(n+1)}{\varphi(x) 2\pi i} \int_{(c)} \frac{\varphi(z) p^n(z)}{(z - x)^{n+1}} dz \qquad [9]$$

y aquí ya X_n, sólo restrictivamente es un polinomio que decimos es una solución de la ecuación (E), con la condición, como veremos, de escoger adecuadamente el camino de integración.

La prueba implicará para n entero positivo una confirmación de lo ya visto y en los demás casos una generalización de la anterior fórmula generalizada de O. Rodrigues.

Calculando y' e y'' en la [9] y recordando que $\varphi' p = \varphi (q - p')$ se tiene:

$$y' = \frac{\Gamma(n+1)}{2\pi i\, \varphi(x)} \int_{(c)} \frac{\varphi(z)\, p^n(z)}{(z-x)^{n+2}} \left[n + 1 - (z-x) \frac{q-p'}{p} \right] dz$$

$$y'' = \frac{\Gamma(n+1)}{2\pi i\, \varphi(x)} \int_{(c)} \frac{\varphi(z)\, p^n(z)}{(z-x)^{n+3}} \left[(n+1)(n+2) - \right.$$

$$\left. - 2(n+1) \frac{q-p'}{p} (z-x) + \left(q \frac{q-p'}{p^2} + \frac{p''-q'}{p} \right) (z-x)^2 \right] dz.$$

y sustituyendo en E se tiene:

$$E_2 = \frac{\Gamma(n+2)}{\varphi(x)\, 2\pi i} \int_{(c)} \frac{\varphi(z)\, p^n(z)}{(z-x)^{n+3}} \left[(n+2)\, p(x) - (z-x) \{ q(x) - \right.$$

$$\left. - 2\, p'(x) \} - (z-x)^2 \{ q'(x) - p''(x) + \frac{n}{2} p''(x) \} \right] dz$$

y teniendo presente que $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios de grado no mayores que 2 y 1 respectivamente, la expresión anterior puede escribirse:

$$- E_2 = \frac{\Gamma(n+2)}{\varphi(x)\, 2\pi i} \int_{(c)} \frac{d}{dz} \left[\frac{\varphi(z)\, p^{n+1}(z)}{(z-x)^{n+2}} \right] dz \qquad [9']$$

ahora bien, este segundo miembro será nulo, de consiguiente:

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\varphi(x)\, 2\pi i} \int_{(c)} \frac{\varphi(z)\, p^n(z)}{(z-x)^{n+1}} dz$$

será solución de E_2 si el contorno (C) lo fijamos en tal modo que la función:

$$J(z, x) = \varphi(z)\, p^{n+1}(z)\, (z-x)^{-n-2} \qquad [10]$$

partiendo de un punto de (C) recorra este circuito recobrando su valor inicial. Si en cambio partimos de la [9], interpretando a (C) no necesariamente como un contorno cerrado, obligada interpreta-

ción para deducirla de la fórmula de Cauchy, sino que tomamos.

$$y = \frac{\Gamma(n+1)}{\varphi(x)\ 2\pi i} \int_{(L)} \frac{\varphi(z)\ p^n(z)}{(z-x)^{n+1}}\, dz$$

siendo $[L]$ un cierto camino en el plano de la z para que ésta sea una solución de la E_2 basta con que la $J\ (z,\ x)$ definida por la [10] se anule en los extremos de L, el cual camino, no pasando L por x, daría lugar a una integral curvilínea de una función holomorfa, o sea, dependiente sólo de los extremos, que puedo escoger, para obtener el anulamiento, en las mismas raíces de $p\ (x) = 0$.

En el caso en que la ecuación E_2 es la:

$$(x^2 - 1)\frac{d^2 y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} - n(n+1)\, y = 0 \qquad [11]$$

$\dfrac{\varphi'}{\varphi} = \dfrac{0}{x^2 - 1}$, luego $\varphi =$ constante; $a = -1$; $b = 1$ y si n es entero la solución $y_1 = X = c_n \dfrac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$ con $c_n = \dfrac{1}{2^n\ n!}$ son exactamente los polinomios de Legendre y la solución [9] para este caso y cualquiera sea n será:

$$y_1 = \frac{\Gamma(n+1)}{2\pi i\ 2^n\ \Gamma(n+1)} \int_{(c)} \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}\, dz \qquad [12]$$

y por la [9′] al sustituir en la anterior ecuación diferencial tendremos que la correspondiente $J\,(z\,,\,x)$ será:

$$J\,(z\,.\,x) = (z+1)^{n+1}\,(z-1)^{n+1}\,(z-x)^{-n-2}$$

Indicando con $O\alpha$ el resultado de la operación de un giro completo alrededor de un cierto punto α se tendrá:

$$O_x\, J\,(zx) = J\,(zx)\ e^{-2n\pi i}$$

$$O_1\, J\,(zx) = J\,(zx)\ e^{2n\pi i}$$

Luego.

$$O_x\,.\,O_1\, J\,(zx) = J\,(zx)$$

Luego el camino (C) deberá ser tal que excluya al punto -1 incluyendo a x y $+1$ o excluya a $+1$ incluyendo a x y -1.

La integral [12] relativa al caso especial de ecuación [11] fué dada por Schläfli (1).

(1) V.: Whittater-Watson. *Modern Analysis.*

Para los restantes casos, si el camino de integración es cerrado, su determinación adecuada resultará de parecidas consideraciones aunque más complicadas por la introducción de $\varphi(z)$ (que en el caso L_e era uno) y de su forma particular, especialmente de la naturaleza entera, fraccionaria o irracional de los exponentes de sus ceros es que se deducirá el contorno (C) conveniente.

Las derivadas logarítmicas de probabilidades P las hemos usado hasta aquí variando algunas veces el aspecto de su escritura.

Fijemos nuestra atención en la forma ya usada:

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{q - p'}{p}$$

que también integrada nos da:

$$\varphi = \frac{1}{p(x)} e^{\int \frac{q}{p} dx} \qquad [13]$$

Pero siendo p y q polinomios a lo sumo de grados dos y uno respectivamente la [13] nos indica que:

$$F(x) = \int_a^b \varphi(y)\, e^{xy} . dy$$

es una solución de una ecuación diferencial del tipo de Laplace de segundo orden.

$$(A_0 + B_0 x) \frac{d^2y}{dx^2} + (A_1 + B_1 x) \frac{dy}{dx} + (A_2 + B_2 x)\, y = 0 \qquad [14]$$

y de la cual la solución $F(x)$ no sería otra cosa que la función generatriz de Cauchy, de la función de probabilidad dada por [13].

Para ello determinemos en base a la [13] los coeficientes A_0, A_1, A_2 y B_0, B_1, B_2 de la [14], existiendo las relaciones:

$$p(x) = B_0 x^2 + B_1 x + B_2$$

$$q(x) = A_0 x^2 + A_1 x + A_2$$

y recordando la hipótesis de los grados de p y q y si

$$p(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$$

$$q(x) = c_0 + c_1 x, \qquad [15]$$

será:

$$B_0 = b_2 \qquad B_1 = b_1 \qquad B_2 = b_0$$

$$A_0 = 0 \qquad A_1 = c_1 \qquad A_2 = c_0$$

la ecuación diferencial de Laplace:

$$b_2\, x \frac{d^2y}{dx^2} + (c_1 + b_1\, x) \frac{dy}{dx} + (c_0 + b_0\, x)\, y = 0 \qquad [16]$$

tiene por solución a la función generatriz en el sentido de Cauchy de la función de probabilidad P, dada por la [13] con p y q definidas por la [15].

La función de Laplace-Gauss era:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \quad ; \quad \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{-x}{1}$$

luego es

$$a_0 = b_1 = b_2 = 0 \quad ; \quad a_1 = -1 \quad , \quad b_0 = 1 \quad , \quad a = -\infty \; b = +\infty$$

la obtención de los polinomios ortogonales con $\varphi(x)$ aplicando la [1] daban:

$$\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \,.\, H_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\right]$$

Estos polinomios $H_n(x)$, de Hermite, verificarán, pues, la ecuación E_2:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + n\, y = 0$$

y la función característica de Cauchy, de la función $\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$, verificará la ecuación diferencial [14], y teniendo en cuenta los valores de las A y B arriba calculadas, en este caso tendremos:

$$-\frac{dy}{dx} + x\, y = 0 \quad \text{que nos da, integrando:} \quad y_1 = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

resultado ya antes obtenido por otras vías.

Consideremos por un momento la ecuación de Bessel:

$$\frac{d^2 \gamma}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\gamma}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)\gamma = 0$$

que haciendo, como es sabido, la sustitución. $\gamma = x^n . y$ se transforma en la:

$$B = x \frac{d^2y}{dx^2} + (2n + 1) \frac{dy}{dx} + xy = 0$$

la cual cae dentro del grupo de las ecuaciones de Laplace. Aplicándole el procedimiento corriente, tenemos:

$$y = \int_{(L)} F(z) \, e^{zx} . dz$$

y reemplazando en la B:

$$B = \int_{(L)} F(z) \, e^{zx} \, [(2n + 1) z + (z^2 + 1) x] \, dz$$

y como:

$$\int_{(L)} F(z) \, e^{zx} \, (z^2 + 1) \, xdz = (F(z) \, (z^2 + 1) \, e^{zx})_{(L)} -$$

$$- \int_{(L)} e^{zx} \frac{d}{dz} \{F(z) \, (z^2 + 1)\} \, dz$$

$$(F(z) \, (z^2 + 1) \, e^{zx})_{(L)} = 0 \qquad [18]$$

basta con tomar $F(z)$ tal que

$$(2n + 1) z \quad F(z) - \frac{d}{dz} \{F(z) \, (z^2 + 1)\} = 0$$

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{(2n - 1) z}{z^2 + 1} \; ; \quad F(z) = (z^2 + 1)^{n - \frac{1}{2}}$$

La condición [18] se verifica si L une los puntos $-i$ y $+i$, y la solución [17] es entonces:

$$y = \int_{-i}^{+i} (z^2 + 1)^{n - \frac{1}{2}} . e^{zx} . dz$$

y haciendo: $z = i\,t$

se tiene:

$$y = \int_{-1}^{+1} (1 - t^2)^{n - \frac{1}{2}} \, e^{ixt} . dt \qquad [19]$$

prescindiendo del factor i.

También, por ser:

$$e^{ixt} = \cos x\,t + i \operatorname{sen} xt$$

y el seno impar, queda la conocida fórmula:

$$y = \int_{-1}^{+1} (1 - t^2)^{n - \frac{1}{2}} \cos x\,t \,.\, d\,t\,.$$

Como $(1 - t^2)^{n-\frac{1}{2}}$ es solución de $\dfrac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \dfrac{(1 - 2n)\,t}{1 - t^2}$ la [19] nos dice que la solución de una ecuación de Bessel es la función característica, en el sentido de Levy de la función P que determina los polinomios ultraesféricos o en particular $\left(\text{para } n = \dfrac{1}{2}\right)$ de Legendre.

Resumiendo. De una función $\varphi(x)$ del grupo P

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{q - p'}{p} \qquad q = c_0 + c_1 x$$

$$p = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \quad \text{con} \quad p(a) = p(b) = 0,$$

deducíamos la sucesión de polinomios clásicos

$$X_n(x) = \frac{1}{\varphi(x)} \frac{d^n}{dx^n} [\varphi(x)\, p^n(x)]$$

los cuales nos conducen a las ecuaciones diferenciales

$$p\,y'' + q\,y' - n\left[q' + \frac{n-1}{2}\, p''\right] y = 0$$

y en general una solución particular será:

$$y = \frac{1}{\varphi(x)} \int_{(c)} \frac{\varphi(z)\, p^n(z)}{(z - x)^{n+1}}\, dz.$$

Los polinomios $X_n(x)$ son los denominadores de las reducidas n — ésimas del desarrollo en fracción continua de $\varphi(x)$.

La función característica de φ es solución de la ecuación

$$b_2\, x\, y'' + (c_1 + b_1 x)\, y' + (c_0 + b_0 x)\, y = 0$$

pero la función característica de $\varphi(x)$ es:

$$\psi(t) = \int_a^b \varphi(t)\, e^{tz} . \,dt = \alpha_0 + \alpha_1 x + \frac{\alpha_2}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha_n}{n!} x^n + \ldots$$

siendo $\alpha_n = \int_a^b \varphi(x)\, x^n\, dx$. Pero los α_n ; $n = 0, 1, 2 \ldots$ por ser $\varphi(x)$ del grupo P recurren, verificando la ecuación a diferencias finitas R.

Estas consideraciones bastan para evidenciar cómo el problema de la sumación de series divergentes se liga estrechamente con el de los momentos. Pero más especialmente este ligamen resulta no en el sentido de la sumación como la desarrollada por Cesaro, o sumación por medias aritméticas, y ni tampoco por el método exponencial del señor Borel, sino más bien en el sentido de la determinación de la función generatriz de la serie, idea que nos parece se inicia con Laplace y que aparece en las investigaciones modernas con un estudio profundo y particular realizado por Laguerre y luego extendido por las investigaciones célebres de Stieljes donde reaparecen las principales jornadas del teorema de los momentos que sentara Tchebycheff.

En el método de Cesaro dada la serie.

$$u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

y definidas las sumas parciales según las.

$$S_n = u_1 + \ldots + u_n$$

se adopta como suma S, si existe, el $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{S_1 + \ldots + S_n}{n}$ en correspondencia con la idea de media aritmética. Desgraciadamente, como lo señala el señor Borel, esta generalización no alcanza a resolver el problema de series, como, por ejemplo.

$$1 - 2 + 4 - 8 + 16 - \ldots$$

que veremos cómo sumamos de acuerdo a simples consideraciones de momentos. En su generalización el señor Borel hace intervenir la serie asociada

$$u(a) = u_0 + \frac{u_1 a}{1!} + \frac{u_2 a^2}{2!} + \ldots + \frac{u_n a^n}{n!} + \ldots$$

que resulta de ponderar cada término de la dada y adoptando como suma el valor.

$$S = \int_0^\infty u(a)\, e^{-a} \,.\, da\,. \qquad [20]$$

La ponderación exponencial del señor Borel da cuenta sólo de un grupo de series especiales. Se sabe cómo su autor ha basado su método en originales concepciones sobre los modos de crecimiento y es precisamente que se debe a ello la razón del éxito y del grupo relativo de la sumación exponencial. En efecto, la fórmula [20] es el resultado de haber partido de la definición de valor medio ponderando los términos de la serie constituída con las sumas parciales de la dada, o sea.

$$S(a) = S_0 + \frac{S_1 a}{1!} + \frac{S_2 a^2}{2!} + \ldots + \frac{S_n a^n}{n!} + \ldots$$

de donde, con Borel:

$$\frac{d}{da}[e^{-a} . S(a)] = e^{-a}[S'(a) - S(a)] = e^{-a} u_1(a)$$

siendo.

$$u_1(a) = S'(a) - S(a) = u_1 + \frac{u_2 a}{1!} + \frac{u_3 a^2}{2!} + \ldots$$

luego suponiendo que $\lim\limits_{a=\infty} e^{-a} S(a) = S$

$$\int_0^\infty e^{-a} u_1(a)\, da = \Big[e^{-a} S(a)\Big]_0^\infty = S - u_0$$

de donde, integrando por partes, la [20].

Ahora bien, estos métodos de sumación no son extraños a la forma de variación de S_n y concordantes con una verdadera interpretación de la teoría de las medias (1), siendo la variación de ellas la que, imponiendo un tipo adecuado de media orientará los métodos a desarrollar para cada grupo de formas de crecimiento. No obstante, prescindiremos de considerar la cuestión en este artículo el cual va formando su unidad a través del hilo conductor de los momentos, ideas éstas que deberíamos abandonar por un momento en el caso de continuar las reflexiones anteriores. Concretemos, pues, nuestra atención a las series de las formas.

$$D \sim d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \ldots + d_n x^n + \ldots \qquad [I]$$

$$\frac{e_0}{x} + \frac{e_1}{x^2} + \frac{e_2}{x^3} + \ldots + \frac{e_n}{x^{n+1}} + \ldots \qquad [II]$$

(1) V.: C. Dieulefait. *Sobre los valores medios*. En estos Anales. 1930.

Las del tipo I sugieren naturalemente la comparación con una función generatriz, característica de una función a determinar $\varphi(x)$:

$$\psi(t) = \int_a^b \varphi(x)\, e^{tx}\, dx = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{1!} x + \frac{\alpha_2}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha_n}{n!} x^n + \ldots$$

en la que $\varphi(x)$ puede ser del grupo P o de P generalizado o límite de un caso general P como en el problema general trascendente, al principio de estas líneas mencionado. Ello resultaría efectivamente si, haciendo en [I] $\alpha_n = n!\, d_n$ [21] la recurrencia que existiera entre estos $n!d_n$ fuese del tipo R. o R generalizado. En tal caso la [21] nos daría la sucesión $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ y con ella, supuesta la recurrencia de R de un orden finito k — ésimo, los α nos darían la $\varphi(x)$ por la relación

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{q - p'}{p}$$

siendo p un polinomio de grado $k - 1$ y q uno de grado $k - 2$. Luego siendo a y b dos ceros del polinomio $p(x)$ tendríamos:

$$D = \int_a^b \varphi(y)\, e^{yx} \,.\, dy \,.$$

Si en cambio consideramos la serie II ella puede pensarse como generada por la función

$$\int_a^b \frac{\varphi(z)}{x \pm z}\, dz = \int_a^b \varphi(z) \left[\frac{1}{x} \mp \frac{z}{x^2} + \frac{z^2}{x^3} \mp \ldots \right] dz =$$

$$= \frac{\alpha_0}{x} \mp \frac{\alpha_1}{x^2} + \frac{\alpha_2}{x^3} \mp \ldots$$

y se repetirían aquí las consideraciones anteriores. Es precisamente este último el tipo considerado por Stieljes y son condiciones para la existencia de $\varphi(z)$ las (S) que deben verificar las α como hemos visto al referirnos al método de Tchebycheff.

Consideremos la serie:

$$E(x) \sim 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$$

que para $x = 1$ da la conocida serie oscilante llamada euleriana.

Tomando $\alpha_n = (-1)^n\, n!$ se deduce: $\alpha_{n+1} + (n+1)\, \alpha_n = 0$ que

es del tipo R y nos conduce a:

$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{x}{x} = 1$. $\varphi(x) = e^x$; x variando entre 0 y — ∞ que sen
las raíces de $p = x$.

Luego

$$E(x) = \int_{-\infty}^{0} e^{y(1+x)}\, dy$$

de donde, la euleriana:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \int_{-\infty}^{0} e^{2y} . dy = \frac{1}{2}$$

resultado concordante con los conocidos razonamientos de Leibnitz basados en la probabilidad y contenidos en el método de Césaro.

Habíamos dicho que según Borel escapaba de este último método la serie:

$$C(x) = 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + \ldots \quad \text{para } x = 1.$$

Se tendrá aquí:

$$\alpha_n = n!\,(-1)^n\, 2^n$$

lo que da.

$$\alpha_{n+1} + 2(n+1)\,\alpha_n = 0$$

también recurrencia del tipo R, la cual nos conduce a:

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

y como $p(x) = 2x \quad a = 0 \quad b = -\infty$

siendo $\varphi(x) = e^{\frac{1}{2}x}$

Luego $C(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{\frac{1}{2}y} . e^{xy}\, dy$

y para $x = 1$

$$1 - 2 + 4 - 8 + 16 - \ldots = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{\frac{3}{2}y} . dy = \frac{1}{3}$$

Consideremos por último la conocida serie geométrica:

$$G(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

cuya función generatriz es, evidentemente, $\frac{1}{1-x}$ · Con los elementos anteriores se tendría: $\alpha_n = n$.

$$\alpha_{n+1} - (n+1)\,\alpha_n = 0$$

de donde:

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{-x}{x} = -1$$

lo que da $\varphi(x) = e^{-x}$ de donde, x varía entre 0 y $+\infty$.

Luego

$$G(x) = \int_0^\infty e^{-y[1-x]}\,dy$$

y en particular:

$$G(1) = \int_0^\infty dy = \infty$$

que es un punto de evidente divergencia esencial.

¿ MATEMATICAS O MATEMATICA ?

DISERTACION RADIOTELEFONICA (1)

Por JOSE BABINI

Estamos en 1937, exactamente a tres siglos del año en que una imprenta holandesa terminaba de imprimir un libro en francés, cuya influencia en la filosofía y en la matemática, ha sido, por igual, extraordinaria. Ya habréis advertido que me refiero al « Discurso del método para conducir bien la razón y buscar la verdad en las ciencias, además, la dióptrica, los meteoros y la geometría, que son ensayos de ese método », título largo, pero bien explicativo, del primer libro que, sin dar aún su nombre, publicó Renato Descartes.

Influencia bien justificada, pues el « Discurso », que sirve de introducción a los ensayos científicos, muestra, a través de un cuadro en el que se entrelazan íntimamente la vida y las ideas de Descartes, la atmósfera cultural de una época de transición y expone las concepciones que han de caracterizar una nueva era: la Edad Moderna, de la cual Descartes es uno de sus primeros voceros. Por otra parte el último de los ensayos: la geometría, marca una época en el desarrollo de la matemática, pues con él se crea una nueva rama de esta ciencia y se introducen en ella conceptos fundamentales.

Traigo este recuerdo de tercer centenario, no solo como un homenaje al gran pensador francés, sino también porque Descartes algo tiene que ver con el tema que dentro del brevísimo tiempo disponible, me propongo desarrollar y que, a pesar del título, no es un simple juego de palabras o una mera cuestión gramatical.

Es un hecho de observación diaria, que para designar ese conjunto de conocimientos de aritmética, álgebra, geometría, análisis, que constituye objeto de estudio o de investigación, se utilizan indistintamente dos vocablos. Algunos dicen matemáticas, en plural, otros decimos matemática, en singular. Por de pronto podría alegarse a

(1) Propalada el 21 de julio de 1937.

favor de esta última denominación, una razón de analogía, pues se dice física, química, biología y no físicas, químicas, biologías; pero esta razón, sin duda convincente, dejaría sin explicación el uso tan frecuente y generalizado del vocablo en plural en la ciencia matemática y solamente en ella. Es que en realidad, detrás de las bambalinas de este asunto aparentemente baladí, viven una serie de cuestiones históricas y científicas cuya consideración, espero, me ayudará a salvar el obstáculo que representa una disertación radiotelefónica sobre una ciencia tan abstracta como la matemática.

Si queremos remontarnos al origen de la ciencia matemática debemos situarnos en el siglo VI antes de C., en pleno florecimiento de la cultura helénica, cuando la escuela pitagórica elaboraba, en estrecha e íntima unión y comunión, ciencia y filosofía. Fueron los pitagóricos los que bautizaron con el nombre de matemática, vale decir ciencia por excelencia, un conjunto de conocimientos ordenados que, por razones vinculadas a su sistema metafísico, englobaba la aritmética, la geometría, la música y la astronomía.

De todas esas ramas fué la geometría la que avanzó más rápidamente; prueba de ello es la inmortal obra de Euclides, aparecida dos siglos después, y en la que bajo el nombre de « Elementos » se exponen, en 13 libros, los conceptos fundamentales y los teoremas elementales de la geometría, incluyendo también las propiedades conocidas de los números, expresadas en lenguaje geométrico. Si, pagando tributo a las exigencias lógicas actuales, reformamos convenientemente los fundamentos de esa geometría, todo el edificio euclídeo, verdadero monumento científico, rivaliza y sobrepasa en rigor y construcción científicos a muchos tratados modernos. Esta persistencia de los teoremas matemáticos, que se mantienen inconmovibles desde hace más de 20 siglos es una característica de la ciencia matemática, que la distingue de las demás ciencias y le confiere notas propias.

Por su parte la astronomía, y su útil matemático: la geometría esférica, se desarrollaba independientemente mientras surgían, por obra del genio griego, otras ramas de la ciencia, que por su índole especial se prestaban a ser construídas con el mismo rigor y método deductivo de la geometría, tales como la Optica geométrica debida a Euclides, la Estática e Hidroestática, debidas a Arquímedes. Todas estas ramas científicas son las que un milenio y medio después exhumará el Renacimiento, en su búsqueda afanosa del saber antiguo; a ellas se agregará una nueva rama, que viene del Oriente, pero no es griega; es el « álgebra », ciencia aparentemente distinta

a la geometría antigua y a las ramas de la Física geometrizada por los griegos.

Se explica entonces como a ese conjunto un poco abigarrado de conocimientos a los que, a pesar de su evidente parentesco, no podía conferírsele un carácter unitario, se le designara con el nombre: « Las Matemática », en plural. Así aparece también en Descartes cuando juzga y critica sus estudios escolares. Pero Descartes destaca de ese conjunto de conocimientos el álgebra y la geometría, a las que asigna un valor especial, y es precisamente sobre esas ramas y la lógica que funda sus célebres cuatro principios metódicos, pretendiendo haber reunido con ellos las ventajas de esas ramas, sin tener sus defectos.

Con ayuda de su método, Descartes se propone luego edificar una ciencia única con la cual pretende explicar, con raciocinios tan claros y evidentes como los teoremas geométricos y las propiedades algebraicas, todas las cosas del cielo, de la tierra, de las plantas y los animales, y entonces denomina esa ciencia « Matemática », ahora en singular, restituyendo al vocablo todo su valor etimológico y reservando para las « Matemáticas » el papel de envoltura de aquella ciencia universal, pues Descartes ve en ellas más un método que una ciencia en sí.

Pero esta tentativa grandiosa de instaurar una matemática universal, que con otro criterio renueva poco después Leibniz, no prospera y en su lugar aparece, como estudio científico de los fenómenos naturales la llamada Filosofía natural. El uso del término matemáticas se mantendrá, y hasta aparecerá poco después más justificado aún, pues se le incorporará nuevas ramas de la Física, construídas, no ya geométricamente, sino con el recurso matemático elaborado durante el siglo XVIII: el análisis infinitesimal. Son ellas la mecánica analítica, la mecánica celeste, las distintas teorías y doctrinas de la Física matemática. (El hecho de que en el establecimiento de estas nuevas ramas contribuyeron en gran medida sabios franceses: Lagrange, Laplace, Fourier, explica quizás la circunstancia de ser los autores franceses los que más persisten actualmente en la designación injustificada de « Matemáticas »).

Pero, a principios del siglo pasado, ocurrió un suceso de suma importancia para la matemática y de valiosas consecuencias para las demás ciencias. Se descubrieron las llamadas geometrías no euclidianas, descubrimiento que dió lugar a una revisión de los conceptos fundamentales de la matemática, de la que surgió concluyentemente que la matemática es una ciencia única, con método y

finalidad propios, y que no existe razón alguna para que albergue en su seno ramas de la Física ni para mantener el papel de doncella de la filosofía natural como lo fuera durante los siglos anteriores. Proclamada su autonomía, su unidad y su independencia respecto a la física, ya no se justifica pues la denominación anticuada de Matemáticas y sí, en cambio, la de Matemática, sin dar por supuesto al vocablo la pretenciosa acepción de los pitagóricos o de Descartes.

Después del advenimiento de la geometría no-euclidiana, la matemática se comportó un poco como un hombre, que al salir de la cárcel siente la necesidad de proclamar su libertad, cometiendo actos excesivos. Arrogante y un poco en tono de desafío, se puso a elaborar teorías, las más alejadas posible de las aplicaciones de la física: nacieron así otras geometrías extrañas, los espacios de cuatro, cinco, *n*, infinitas dimensiones, el cálculo diferencial absoluto, los números imaginarios, complejos, hipercomplejos, etc.

Pero la ciencia tiene también sus sorpresas. En efecto la física contemporánea se caracteriza precisamente por el uso desmesurado de toda esa matemática elaborada últimamente, que une a sus caracteres de abstracción, los de no ser intuitiva y de estar completamente desprovista de referencias a nuestras imágenes sensoriales, y, por eso, al parecer, absolutamente desvinculada del mundo exterior. Este hecho, que caracteriza a la física de hoy, distinguiéndola de la física clásica, ha planteado a la ciencia y a la filosofía una serie de nuevos problemas y ha conferido a la física una fisonomía tal que ha inquietado a más de un físico. Otros físicos, en cambio, ven en él un síntoma de lozanía y de fecundidad, un signo más del valor espiritual de la ciencia.

LA ESTRUCTURA DE LOS ESPECTROS Y LAS LINEAS ÚLTIMAS

Por el Dr. ADOLFO T. WILLIAMS

ABSTRACT

Spectral Structure and « raies ultimes ». — In this paper, complementary of others already published are described the Spectral terms and electronic configuratións which originated « raies ultimes ». Gotrian's diagrams are also included.

1. Introduccion. — Los progresos realizados en los últimos años en el estudio de los espectros atómicos nos han permitido completar nuestras investigaciones anteriores (1) y clasificar así, en sus respectivas series, la casi totalidad de las líneas últimas, lo que permite conocer los términos espectrales y las configuraciones electrónicas que les dan origen. Nos ha sido de gran utilidad para establecer los cuadros y los diagramas la obra de Bacher y Goudsmit (2).

2. Reglas de combinación de los términos. — Las reglas de combinación de los términos, llamadas reglas de selección o de transición y que tienen aplicación en el caso de las líneas últimas, son las siguientes:

a) Sólo son posibles las transiciones entre un término par y uno impar. Son términos pares e impares, respectivamente, aquellos

(1) *A. S. C. A.*, 97, página 15 (1924); 114, página 261 (1933); 118, página 88 (1934); 119, página 55 (1935). *Contribución al estudio de las ciencias. Serie matemático-física*, 4, página 359 (1928); 5, página 173 (1929). *Comptes rendus*, 187, página 761 (1928); 193, página 358 (1931); 200, página 230 (1935); 199, página 1201 (1934). *Nature*, 124, página 985 (1929), y 130, página 313 (1932). *Physikalische Zeitschrift*, 33, página 157 (1932).

(2) *Atomic Energy States*. — Mac Graw-Hill, New York, 1932.

para los cuales se verifica una u otra de las siguientes condiciones:

$$\Sigma l = 2n$$
$$\Sigma l = 2n + 1; \qquad [1]$$

donde l es el momento angular del movimiento orbital del electrón expresado en unidades cuantistas $h/2\pi$; cuando la suma determinada por las expresiones [1] teniendo en cuenta los valores de l de los electrones que dan origen a determinado término son pares o impares, el término es par o impar. Esta regla no vale en el caso de los campos eléctricos perturbadores originados por átomos vecinos o por fuentes externas. Otro caso de violación de esta regla se produce en los espectros de las nebulosas donde la presión es muy pequeña y las colisiones muy escasas.

b) Sólo son posibles aquellas transiciones para las cuales la variaciones del momento angular total J cambia así: $+1$, 0, -1; siendo prohibida la transición $J = 0 \rightarrow J = 0$. Esta regla también es violada en los campos magnéticos intensos y en la radiación de las nebulosas.

c) Solamente se produce en la emisión el salto de un solo electrón. Esta regla es solamente aproximada porque se producen transiciones originadas por el salto de dos electrones que tienen gran intensidad y persistencia.

d) En los espectros complicados las líneas intensas provienen de transiciones entre estados formadas por un estado semejante del ion.

3. Tablas y diagramas. — Las tablas han sido establecidas colocando los elementos (átomos neutros y átomos ionizados) las configuraciones electrónicas y los términos que éstas originan.

En la columna observaciones las anotaciones $2e$, $\Delta R = 2$ y $\Delta l = \pm 2$ significa que las líneas últimas provienen del salto de dos electrones o bien para aquellas en las cuales la variación ΔR y Δl es mayor que la unidad.

En cuanto a los diagramas se han dibujado en forma aproximada los valores numéricos de los términos. Además los núcleos funda-

mentales van indicados con círculos llenos; las combinaciones entre términos del mismo valor de L y R que son comunes a los átomos neutros y a los iones correspondientes, de acuerdo con la regla del corrimiento espectroscópico, van unidos con líneas llenas, con líneas de puntos las que no son comunes, y, finalmente, con trazos de puntos y rayas las líneas de intercombinación. Los diagramas de las figuras 1 a 10 corresponden a las tablas I a X, respectivamente.

TABLA I

Atomos de la primera columna y iones semejantes

Elementos	Términos	Configuraciones electrónicas	Observaciones
Atomos neutros H, Li, Na, K, Rb y Cs	$^2S - {}^2P^0$	$p^6s \longrightarrow p^6p$	
	$^2P^0 - {}^2S$	$p^6p \longrightarrow p^6s$	
	$^2P^0 - {}^2D$	$p^6p \longrightarrow p^6d$	
Atomos ionizados Be, Mg, Cu, Sr y Ba	$^2S - {}^2P^0$	$p^6s \longrightarrow p^6p$	
	$^2P^0 - {}^2S$	$p^6p \longrightarrow p^6s$	
Mg, Sr, Ca y Ba	$^2P^0 - {}^2D$	$p^6p \longrightarrow p^6d$	
Ba	$^2D - {}^2F^0$	$p^6d \longrightarrow p^6f$	
Atomos doblemente ionizados Be, Al, Y y La	$^2S - {}^2P^0$	$p^6s \longrightarrow p^6p$	
Y y La	$^2D - {}^2P^0$	$p^6d \longrightarrow p^6p$	
Atomos neutros Cu, Ag y Au	$^2S - {}^2P^0$	$d^{10}s \longrightarrow d^{10}p$	
	$^2P^0 - {}^2S$	$d^{10}p \longrightarrow d^{10}s$	
	$^2P^0 - {}^2D$	$d^{10}p \longrightarrow d^{10}d$	
Atomos ionizados Zg, Cd y Hg	$^2S - {}^2P^0$	$d^{10}s \longrightarrow d^{10}p$	
	$^2P^0 - {}^2S$	$d^{10}p \longrightarrow d^{10}s$	
	$^2P^0 - {}^2D$	$d^{10}p \longrightarrow d^{10}d$	
Atomos neutros Cu y Au	$^2D - {}^2D^0$	$d^9s^2 \longrightarrow d^9sp$	
	$^2D - {}^2P^0$	$d^9s^2 \longrightarrow d^{10}p$	2e
	$^2D - {}^2F^0$	$d^9s^2 \longrightarrow d^9sp$	
Au	$^2D - {}^4F^0$	$d^9s^2 \longrightarrow d^9sp$	$\Delta R = 2$

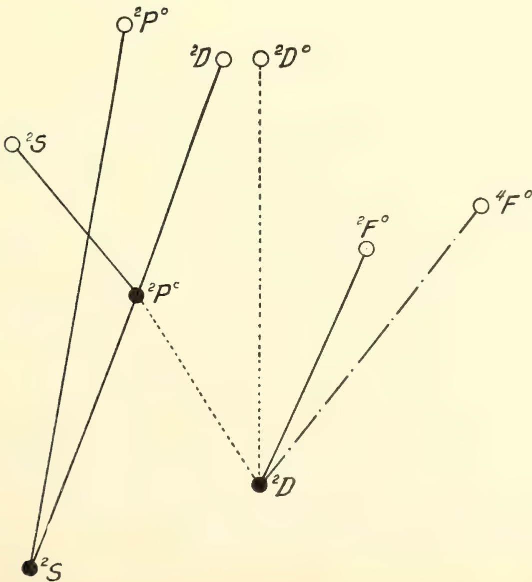


FIG. 1.

TABLA II

Elementos	Términos	Configuraciones electrónicas		Observaciones
Atomos neutros	$^1S - {}^1P^\circ$	p^6s^2 →	p^6sp	
Be, Mg, Ca, Br	$^3P^\circ - {}^3P$	p^6sp →	p^6pp	
y Sr	$^3P^\circ - {}^3D$		p^6sd	
Mg	$^1S - {}^3P^\circ$	p^6s^2 →	p^6sp	$\Delta R = 2$
Be, Mg, Ca	$^3P^\circ - {}^3S$	p^6sp →	p^6ss	
Ba	$^1S - {}^3D^\circ$	p^6s^2 →	p^6dp	$2e$, $\Delta R = 2$, $\Delta L = -2$
Ca	$^3P^\circ - {}^3P$	p^6sp →	p^6dd	$2e$
Mg	$^1P^\circ - {}^1D$		p^6sd	
Ca	$^3D - {}^3D^\circ$		p^6pd	
Ba	$^3D - {}^3P^\circ$	p^6sd →	p^6sp	
Ba	$^3D - {}^1F^\circ$		p^6sf	$\Delta R = 2$
Ca	$^3D - {}^3F^\circ$		p^6pd	
Atomos ionizados B y Al	$^1S - {}^1P^\circ$	p^6s^2 →	p^6sp	
B	$^1P^\circ - {}^1D$	sp →	p^2	
Al	$^1P^\circ - {}^1D$		p^6sd	
»	$^1P^\circ - {}^1S$	p^6sp →	p^6ss	
»	$^3P^\circ - {}^3D$		p^6sd	
»	$^3P^\circ - {}^3S$		p^6ss	
»	$^1S - {}^3P^\circ$	p^6s^2 →	p^6sp	$\Delta R = 2$
»	$^1D - {}^1F^\circ$	p^6sd →	p^6sf	
Atomos ionizados				
Y	$^1S - {}^1P^\circ$		p^6dp	$2e$
La, Lu	$^1S - {}^1P^\circ$	p^6s^2 →	p^6sp	
Lu	$^1S - {}^3P^\circ$		»	$\Delta R = 2$
Y	$^3P^\circ - {}^3D$	p^6sp →	p^6sd	
Sc, Y, La	$^1D - {}^1P^\circ$	p^6d^2 →	p^6dp	
La,	$^1D - {}^1P^\circ$		p^6sp	$2e$
Sa, Y, La y Lu	$^1D - {}^1D^\circ$		p^6dp	
Sc y La	$^1D - {}^1F^\circ$		»	
Y y La	$^1D - {}^3F^\circ$	p^6ds →	»	$\Delta R = 2$
Y	$^1D - {}^1P^\circ$		p^6sp	
La	$^1D - {}^3P^\circ$		»	$\Delta R = 2$
Sc, Y, La y Lu	$^3D - {}^3F^\circ$		p^6dp	
Sc, Y y La	$^3D - {}^3P^\circ$		»	
Y y La	$^3D - {}^1D^\circ$		»	$\Delta R = 2$
Y, La y Lu	$^3D - {}^3D^\circ$	p^6ds →	»	
La	$^3D - {}^1P^\circ$		p^6fd	$\Delta R = 2$
La	$^3D - {}^1F^\circ$		p^6dp	$\Delta R = 2$
Y	$^3F - {}^3F^\circ$		»	
Y	$^3F - {}^3D^\circ$		»	
La	$^3F - {}^3G^\circ$	p^6d^2 →	p^6fd	
»	$^3F - {}^1D^\circ$		p^6dp	$\Delta R = 2$
»	$^3F^\circ - {}^1F$	p^6fs →	p^6fs	$\Delta R = 2$
Sc e Y	$^1G - {}^1F^\circ$	p^6d^2 →	p^6dp	
La	$^3G^\circ - {}^3H$	p^6fd →	p^6f^2	

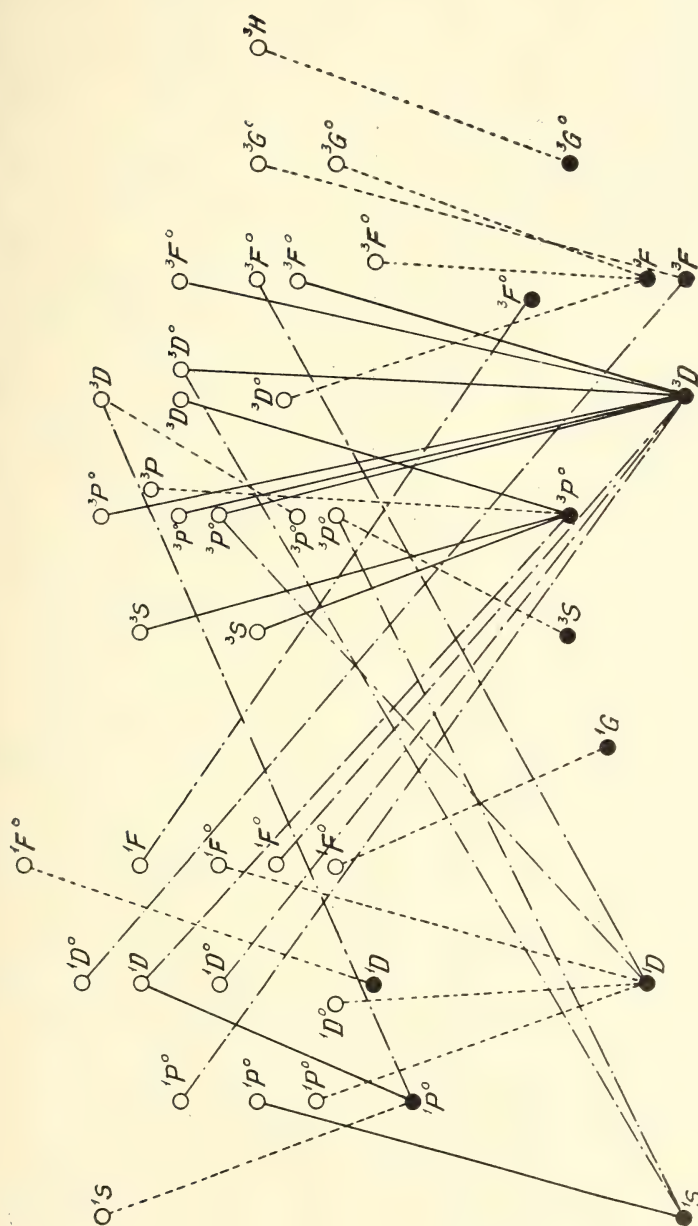


FIG. 2.

TABLA III

Elementos	Términos	Configuraciones electrónicas	Observaciones
Atomos neutros			
B, Al, Ga, In y Tl	$^2P^\circ$ — ^2S	$s^2p \rightarrow s^2s$	
Al, Ga, In y Tl	$^2P^\circ$ — ^2D	$s^2p \rightarrow s^2d$	
Tl	^2S — $^2P^\circ$	$s^2s \rightarrow s^2p$	
Atomos ionizados:			
C y Sn	^2D — $^2F^\circ$	$sp^2 \rightarrow s^2f$	2e
C	^2S — $^2P^\circ$	$sp^2 \rightarrow s^2p$	
C	$^2P^\circ$ — ^2D	$s^2p \rightarrow sp^2$	
Si y Pb	$^2P^\circ$ — ^2S	$s^2p \rightarrow s^2s$	
Si y Pb	^2S — $^2P^\circ$	$s^2s \rightarrow s^2p$	
Atomo doblemente ionizado	^2S — $^2P^\circ$	$s^2s \rightarrow s^2p$	
N	$^2P^\circ$ — ^2D	$s^2p \rightarrow sp^2$	
Atomos neutros:			
Sc, Y, La y Lu	^2D — $^2F^\circ$	$ds^2 \rightarrow dsp$	
Sc, Y	^2D — $^2D^\circ$	»	
La	^2D — $^2D^\circ$	$ds^2 \rightarrow d^2p$	
Y	^2D — $^2P^\circ$	$ds^2 \rightarrow dsp$	
Sc, Y, La	^4F — $^4G^\circ$	$d^2s \rightarrow d^2p$	
Sc	^4F — $^4F^\circ$	»	
Sc	^2G — $^2F^\circ$	»	
Atomos ionizados:			
Ti, Zr y Hf?	^2D — $^2F^\circ$	$d^2s \rightarrow d^2p$	
Ti y Zr	^2F — $^2G^\circ$	$d^2s \rightarrow d^2p$	
Ti, Zr y Hf?	^4F — $^4G^\circ$	$d^2s \rightarrow d^2p$	
Ti, Zr y Hf?	^4F — $^4D^\circ$	$d^2s \rightarrow d^2p$	
Ti y Zr	^4F — $^4F^\circ$	$d^2s \rightarrow d^2p$	
»	^4P — $^4P^\circ$	$d^3 \rightarrow d^2p$	
»	^4F — $^4D^\circ$	$d^3 \rightarrow d^2p$	
»	^2G — $^2F^\circ$	$d^3 \rightarrow d^2p$	
»	^2G — $^2G^\circ$	$d^3 \rightarrow d^2p$	
Ti	^2F — $^2F^\circ$	$d^2s \rightarrow d^2p$	
»	^2F — $^2D^\circ$	$d^2s \rightarrow d^2p$	
»	^2G — $^2H^\circ$	$d^2s \rightarrow d^2p$	
»	^4P — $^4S^\circ$	$d^2s \rightarrow d^2p$	
»	^4P — $^4D^\circ$	$d^2s \rightarrow d^2p$	
»	$^2G^\circ$ — ^2H	$d^2p \rightarrow d^2d$	
»	$^4F^\circ$ — ^4G	$d^2p \rightarrow d^2d$	
»	^4F — $^4F^\circ$	$d^3 \rightarrow d^2p$	
»	^2H — $^2G^\circ$	$d^3 \rightarrow d^2p$	
Zr	^2P — $^2S^\circ$	$d^2s \rightarrow d^2p$	
»	^2D — $^2D^\circ$	»	
Zr, Hf?	^2D — $^4F^\circ$	»	$\Delta R = 2$
Zr	^4P — $^4P^\circ$	$d^2s \rightarrow dsp$	
»	^4F — $^2D^\circ$	»	$\Delta R = 2$
»	^4F — $^2F^\circ$	$d^2s \rightarrow d^2p$	$\Delta R = 2$
»	^4F — $^4D^\circ$	$d^2s \rightarrow dsp$	
»	^4F — $^4F^\circ$	»	
»	^2G — $^2F^\circ$	»	
»	^4P — $^4D^\circ$	$d^3 \rightarrow dsp$	2e
»	^4F — $^4F^\circ$	»	2e

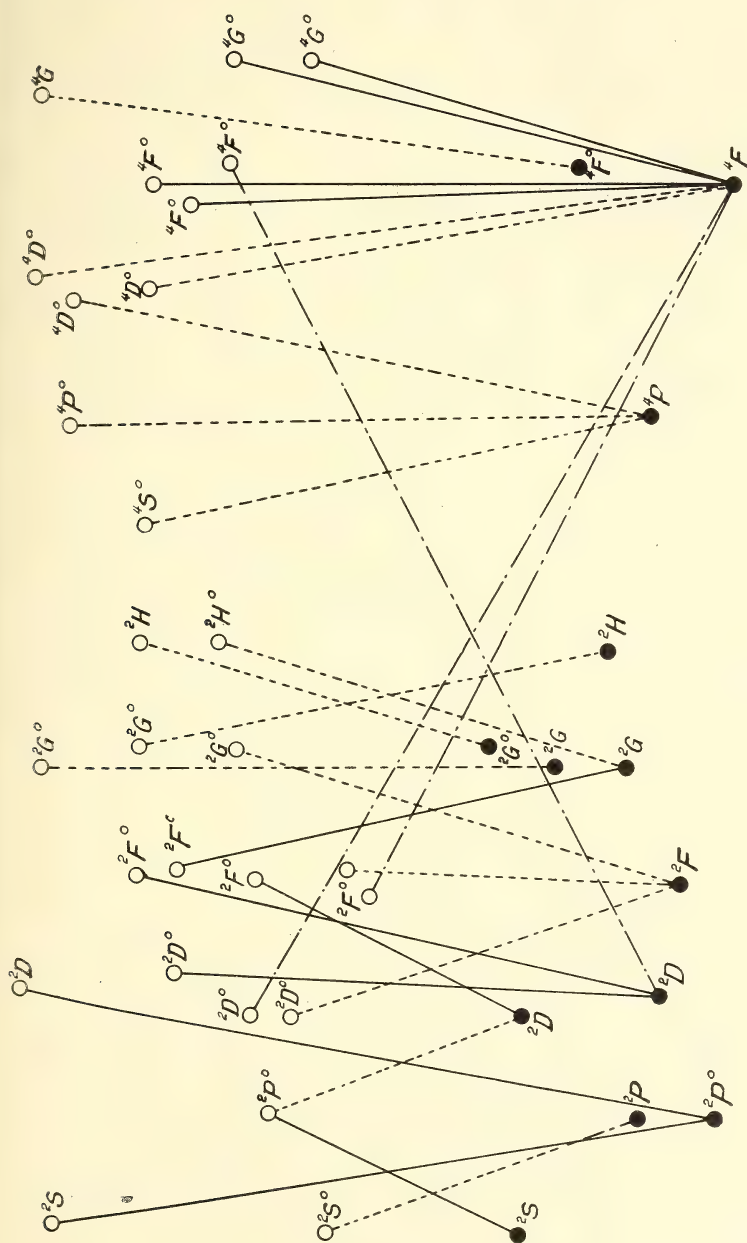

^4G
$^4G^\circ$
$^4G^\circ$
$^4F^\circ$
$^4F^\circ$
$^4F^\circ$
$^4F^\circ$
^4F
$^4D^\circ$
$^4D^\circ$
$^4D^\circ$
$^4P^\circ$
^4P
$^4S^\circ$
^2H
$^2H^\circ$
^2H
$^2G^\circ$
$^2G^\circ$
$^2G^\circ$
$^2G^\circ$
^2G
^2G
$^2F^\circ$
$^2F^\circ$
$^2F^\circ$
$^2F^\circ$
^2F
^2D
$^2D^\circ$
$^2D^\circ$
$^2D^\circ$
^2D
^2D
$^2P^\circ$
^2P
$^2P^\circ$
^2S
$^2S^\circ$
^2S

Fig. 3.

TABLA IV

Elementos	Términos	Configuraciones electrónicas	Observaciones
Atomos neutros:			
C, Si, Ge, Sn, Pb	$^1S - {}^1P^\circ$	s^2ps	
Ge, Pb	$^1S - {}^3P^\circ$	»	$\Delta R = 2$
Si, Ge, Sn, Pb	$^3P - {}^3P^\circ$	»	
Sn, Pb	$^3P - {}^1P^\circ$	»	$\Delta R = 2$
Ge	$^3P - {}^3D^\circ$	$s^2p^2 \longrightarrow s^2pd$	
Si, Ge, Sn, Pb	$^1D - {}^1P^\circ$	s^2ps	
Si	$^1D - {}^1D^\circ$	sp^3	
Ge, Sn, Pb	$^1D - {}^3P^\circ$	s^2ps	$\Delta R = 2$
Atomo ionizado:			
N	$^3P^\circ - {}^3D$	$s^2ps \longrightarrow s^2pp$	
Atomos neutros:			
Zr	$^3P - {}^3F^\circ$	d^3p	2e
»	$^3P - {}^3D^\circ$	»	2e
Ti	$^3F - {}^3D^\circ$	»	2e
»	$^3F - {}^3F^\circ$	d^2sp	
Zr, Ti	$^3F - {}^3G^\circ$	$d^2s^2 \longrightarrow$ »	
Ti	$^3F - {}^3G^\circ$	d^3p	2e
Zr	$^3F - {}^1D^\circ$	»	2e, $\Delta R = 2$
Ti	$^3F - {}^3D^\circ$	d^2sp	
Hf	$^3F - {}^3D^\circ$?		
»	$^3F - {}^3F^\circ$?	$d^2s^2 \longrightarrow$?	
»	$^3F - {}^3G^\circ$?		
Ti, Zr	$^5F - {}^5G^\circ$	$d^3s \longrightarrow d^3p$	
Ti	$^5F - {}^5F^\circ$		
Atomos ionizados:			
V	$^3G - {}^3H^\circ$	$d^3s \longrightarrow$?	
»	$^3H - {}^3I^\circ$		
»	$^5D - {}^5D^\circ$	d^3p	
»	$^5D - {}^5F^\circ$	$d^4 \longrightarrow$ »	
»	$^5D - {}^3D^\circ$	d^3p?	$\Delta R = 2$
V y Nb	$^5F - {}^5G^\circ$	d^3p	
V	$^5F - {}^5F^\circ$	»	
»	$^5F - {}^5D^\circ$	»	
Nb	$^5F - {}^5F^\circ$	$d^3s \longrightarrow d^3p$?	
»	$^5F - {}^5D^\circ$	»	
V	$^5F - {}^3D^\circ$	»	$\Delta R = 2$

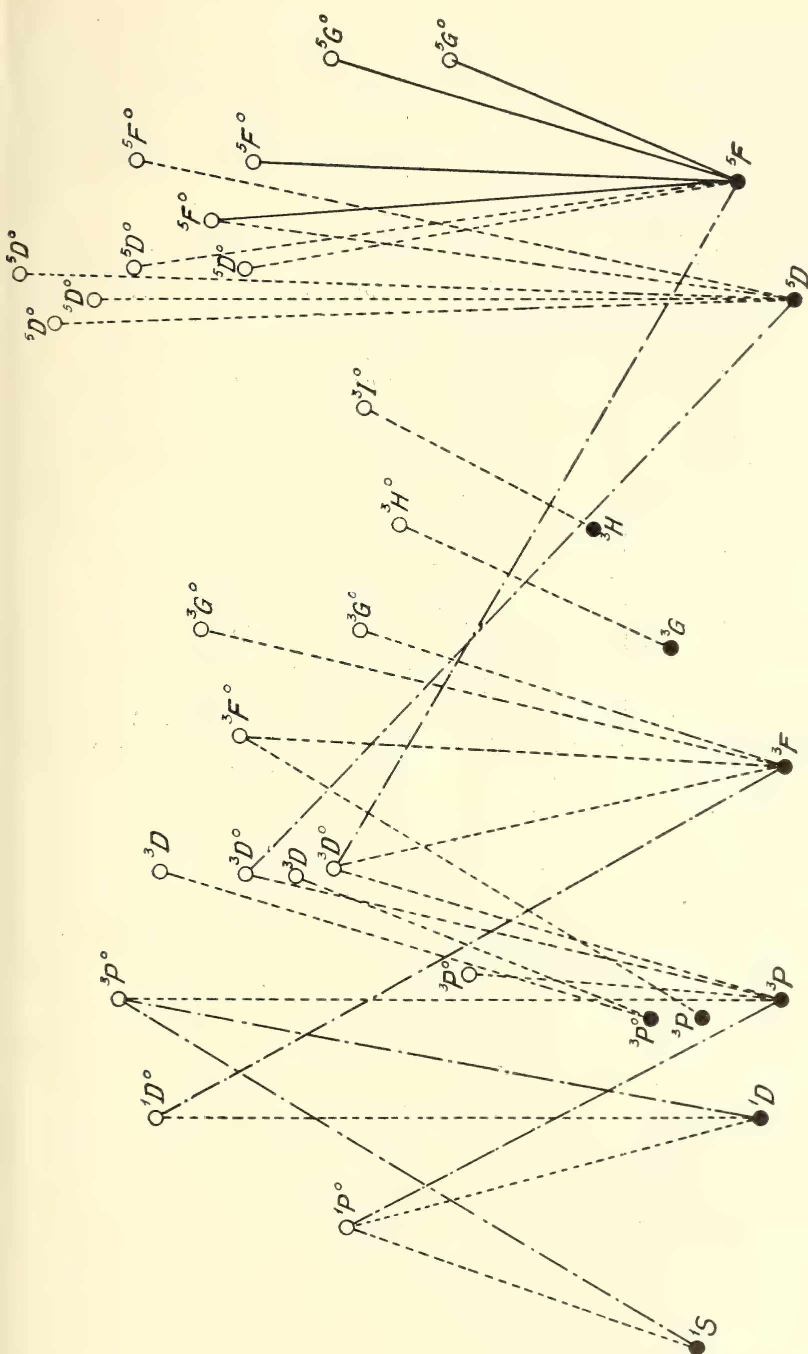

$^5G^o$
$^5G^o$
$^5F^o$
$^5F^o$
^5F
$^5F^o$
$^5D^o$
$^5D^o$
$^5D^o$
$^5D^o$
$^5D^o$
^5D
$^3I^o$
$^3H^o$
^3H
$^3G^o$
$^3G^o$
^3G
$^3F^o$
^3F
^3D
$^3D^o$
^3D
$^3D^o$
$^3P^o$
$^3P^o$
$^3P^o$
^3P
^3P
$^1D^o$
^1D
$^1P^o$
^1S

Fig. 4.

TABLA V

Elementos	Términos	Configuraciones electrónicas	Observaciones
Atomos neutros:			
N, P, As, Sb, Bi	$^4S^o$ — ^4P	s^2p^2s	
P, As, Sb, Bi	$^2D^o$ — ^2P	»	
As, Sb, Bi	$^2D^o$ — ^4P	$s^2p^3 \longrightarrow$ »	$\Delta R = 2$
As	$^2P^o$ — ^2D	»	
P, As, Sb	$^2P^o$ — ^2P	»	
N	^2P — $^2D^o$	$s^2p^2s \longrightarrow s^2p^2p$	
V	^6D — $^6D^o$	d^4p	
V	^6D — $^6P^o$	$d^4s \longrightarrow$ »	
V, Nb	^6D — $^6F^o$	»	
V	^4F — $^4G^o$	d^3sp	
V	^4F — $^4G^o$	$d^3s^2 \longrightarrow$?	
V	^4F — $^4D^o$	d^3sp	
Atomos ionizados:			
Cr, Mo	^6D — $^6F^o$	d^4p	
Cr	^6D — $^6P^o$	»	
Cr, Mo	^6D — $^6D^o$	»	
Cr	^6D — $^4P^o$	$d^4s \longrightarrow$ »	$\Delta R = 2$
Cr	^6D — $^4P^o$	?	$\Delta R = 2$
Mo	^6D — $^6P^o$	?	

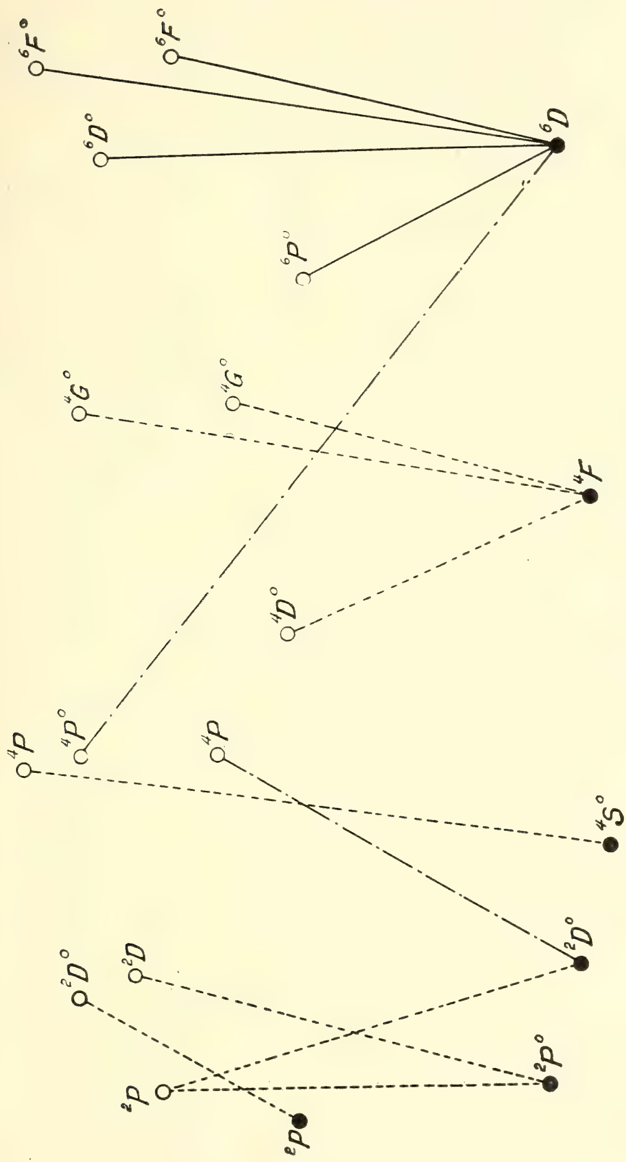


FIG. 5.

TABLA VI

Elementos	Términos	Configuraciones electrónicas	Observaciones
Atomos neutros:			
O, S, Se, Te	$^3P - ^3S^\circ$	$s^2p^4 \rightarrow s^2p^3s$	
Te	$^3P - ^5S^\circ$	»	$\Delta R = 2$
Te	$^1D - ^3S^\circ$	»	$\Delta R = 2, \Delta L = +2$
O, S, Se	$^5S^\circ - ^5P$	$s^2p^3s \rightarrow s^2p^3p$	
Cr, Mo	$^5D - ^5P^\circ$	$d^4s^2 \rightarrow d^5p$	2e
Cr	$^5D - ^5F^\circ$	d^4sp	
»	$^5D - ^5P^\circ$	»	
»	$^5D - ^5D^\circ$	?	
Cr, Mo	$^7S - ^7P^\circ$	$d^5s \rightarrow d^5p$	
»	$^5S - ^5P^\circ$	»	
Cr	$^5S - ^5P^\circ$	?	
Cr, Mo	$^7S - ^7P^\circ$	?	
Mo	$^5D - ^5F^\circ$	$d^4s^2 \rightarrow$?	
W	$^5D - ^5F^\circ$		
»	$^5D - ^5P^\circ$		
»	$^7S - ^7P^\circ$	$d^5s \rightarrow$?	
Atomos ionizados:			
Mn	$^5D^\circ - ^5P^\circ$	$d^6 \rightarrow d^5p$	
»	$^5S - ^5P^\circ$	$d^5s \rightarrow d^5p$	
»	$^7S - ^7P^\circ$		
»	$^7P^\circ - ^7D$	$d^5p \rightarrow d^5d$	

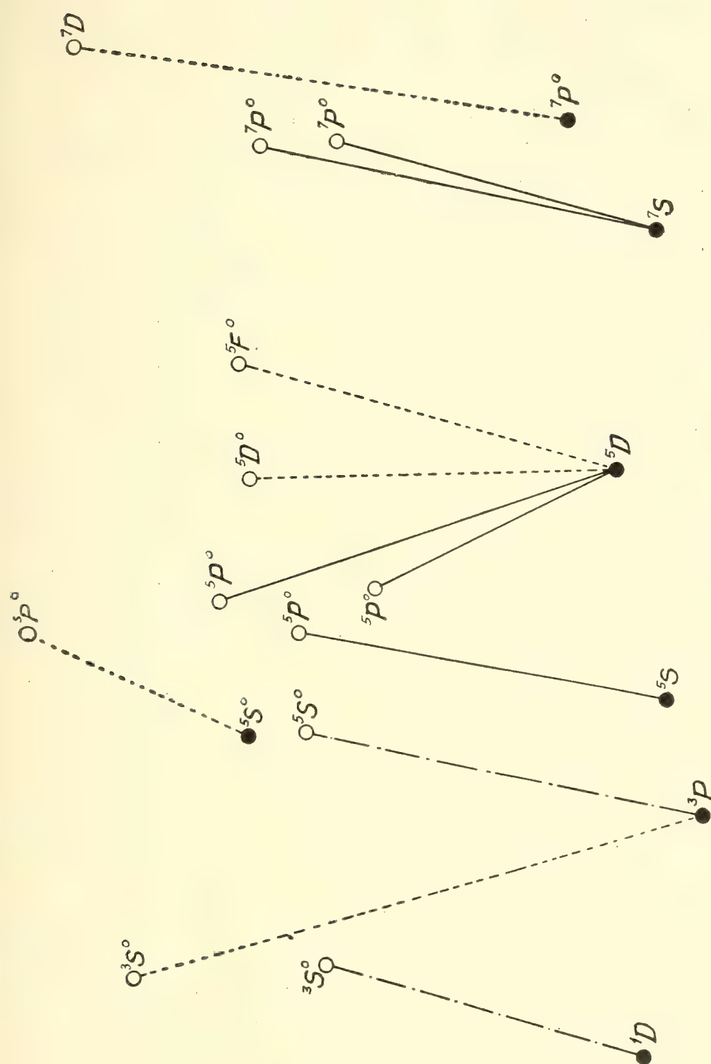

^7D
$^7P^o$
$^7P^o$
$^7P^o$
^7S
$^5F^o$
$^5D^o$
^5D
$^5P^o$
$^5P^o$
$^5P^o$
$^5P^o$
^5S
$^5S^o$
$^5S^o$
^3P
$^3S^o$
$^3S^o$
^1D

Fig. 6.

TABLA VII

Elementos	Términos	Configuraciones electrónicas	Observaciones
Atomos neutros:			
F	$^4P - ^4D^\circ$	$p^4s \longrightarrow p^4p$	
Cl, Br	$^2P^\circ - ^4P$	$s^2p^5 \longrightarrow s^2p^4s$	$\Delta R = 2.$
Mn, Re	$^6S - ^6P^\circ$	$d^5s^2 \longrightarrow d^5sp$	
Mn	$^6P^\circ - ^6S$	$d^5sp \longrightarrow d^5ss$	
Mn, Re	$^8P^\circ - ^8S$		
Mn	$^6D - ^6F^\circ$	$d^6s \longrightarrow$?	
Mn	$^4D - ^4F^\circ$	d^6p	
Atomos ionizados:			
Fe	$^4D - ^4F^\circ$	$d^6s \longrightarrow d^6p$	
»	$^4D - ^4D^\circ$		
»	$^4D - ^4P^\circ$		
»	$^6D - ^6F^\circ$		
»	$^6D - ^6D^\circ$		
»	$^6D - ^6P^\circ$		
»	$^4D - ^4D^\circ$	$d^7 \longrightarrow d^6p$	
»	$^4F - ^6F^\circ$		$\Delta R = 2.$

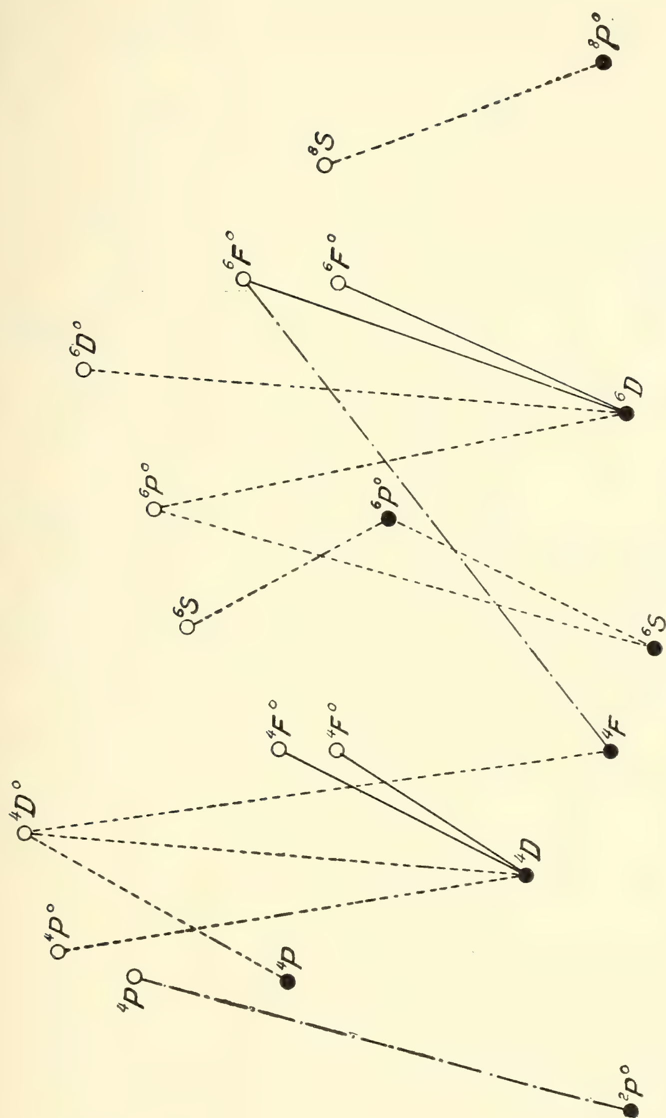


Fig. 7.

TABLA VIII

Elementos	Términos	Configuraciones electrónicas	Observaciones
Atomos neutros:			
Fe	$^5D - ^5P^\circ$	d^6sp	
»	$^5D - ^5D^\circ$	»	
»	$^5D - ^5F^\circ$	$d^6s^2 \longrightarrow$ »	
»	$^5D - ^5D^\circ$	d^7p	2*e*
»	$^5D - ^5F^\circ$	»	2*e*
Fe, Ru	$^5F - ^5F^\circ$	d^7p	
Fe, Ru	$^5F - ^5D^\circ$	d^6sp	
Fe	$^5F - ^3G^\circ$	d^7p	$\Delta R = 2.$
»	$^3F - ^5G^\circ$	$d^7s \longrightarrow$ »	$\Delta R = 2.$
»	$^3F - ^3F^\circ$	»	
»	$^3F - ^3D^\circ$	»	
»	$^3F - ^3D^\circ$	d^6sp	
»	$^7P^\circ - ^7D$	$d^6sp \longrightarrow d^6ss$	
Ru	$^5F - ^5G^\circ$	$d^7s \longrightarrow d^7p$	
»	$^3F - 13_5^\circ$	$d^7s \longrightarrow$?	$^{3,5}G_5^\circ$?
»	$^3F - 16_4^\circ$	? $\longrightarrow$?	
»	$^5F - 19_4^\circ$	$d^7s \longrightarrow$?	$^3G_4^\circ$?

FIG. 8.

TABLA IX

Elementos	Términos	Configuraciones electrónicas	Observaciones
Atomos neutros:			
Co, Rh	^4F — $^4F^\circ$		
»	^2F — $^4F^\circ$		$\Delta R = 2.$
»	^2F — $^2F^\circ$		
»	^4F — $^4D^\circ$	$d^8s \longrightarrow d^8p$	
»	^4F — $^4G^\circ$		
»	^2F — $^4G^\circ$		$\Delta R = 2$
»	^4F — $^2G^\circ$		$\Delta R = 2$
Co	$^4G^\circ$ — 27	$d^7sp \longrightarrow$?	
»	^2G — $^2F^\circ$	$d^7sp \longrightarrow d^8p$	2*e*
»	^2F — $^2G^\circ$	d^7sp	
»	^2F — $^2G^\circ$	d^8p	
»	^4F — $^3D^\circ$	$d^8s \longrightarrow d^7sp$	
»	^2F — $^2F^\circ$	»	
»	^2F — $^2D^\circ$	»	
»	^4F — $^4D^\circ$	d^7sp	
»	^4F — $^4F^\circ$	»	
»	^4F — $^4F^\circ$	$d^7s^2 \longrightarrow d^8p$	2*e*
»	^4F — $^4G^\circ$	d^7sp	
Rh	^4P — $^4D^\circ$	$d^8s \longrightarrow d^8p$	
»	^2F — $^4D^\circ$		$\Delta R = 2.$
»	$^4D^\circ$ — ^4F	d^8s	
»	$^2G^\circ$ — ^4G	$d^8p \longrightarrow$?	$\Delta R = 2$
»	$^4G^\circ$ — ^4H	?	
»	P° — D	? $\longrightarrow$?	
Atomos ionizados:			
Ni, Pd	^2F — $^4G^\circ$		$\Delta R = 2$
»	^2F — $^4F^\circ$		$\Delta R = 2$
»	^2F — $^2G^\circ$		
»	^2F — $^2F^\circ$		
»	^4F — $^4D^\circ$	$d^8s \longrightarrow d^8p$	
»	^2F — $^2D^\circ$		
»	^4F — $^4G^\circ$		
Pd	^2G — $^2H^\circ$		
»	^2G — $^2F^\circ$		

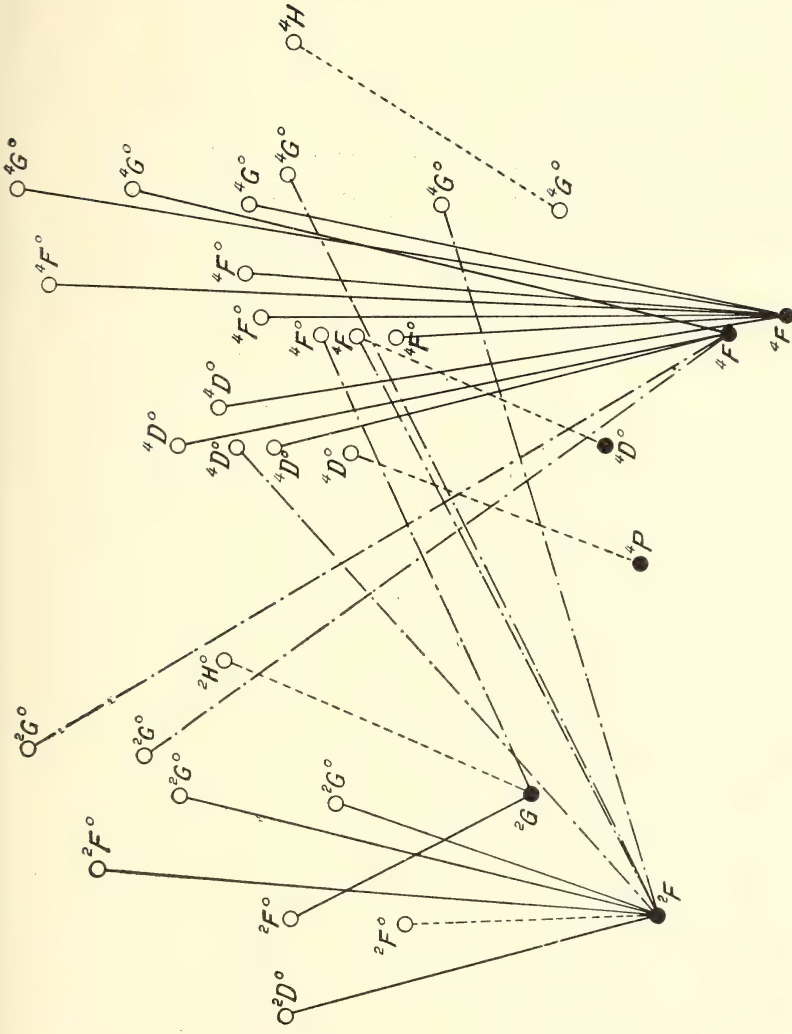

^4H
$^4G°$
$^4G°$
$^4G°$
$^4G°$
$^4G°$
$^4G°$
$^4F°$
$^4F°$
$^4F°$
$^4F°$
^4F
$^4F°$
^4F
^4F
$^4D°$
$^4D°$
$^4D°$
$^4D°$
$^4D°$
$^4D°$
^4P
$^2H°$
$^2G°$
$^2G°$
$^2G°$
$^2G°$
^2G
$^2F°$
$^2F°$
$^2F°$
^2F
$^2D°$

Fig. 9.

TABLA X

Elementos	Términos	Configuraciones electrónicas	Observaciones
Atomos neutros:			
Ni, Pd	^3D — $^3F^\circ$		
»	^3D — $^3P^\circ$	$d^9s \longrightarrow d^9p$	
»	^3D — $^3D^\circ$		
»	$^1F^\circ$ — ^1G	$d^9p \longrightarrow d^9d$	
»	$^3F^\circ$ — ^3G		
Ni	^1S — $^1P^\circ$	$d^{10} \longrightarrow d^9p$	
»	^1D — $^1F^\circ$	d^8sp	
»	^1D — $^1F^\circ$	d^9p	
»	^1D — $^1P^\circ$	»	
»	^1D — $^1D^\circ$	$d^9s \longrightarrow d^8sp$	
»	^1D — $^3F^\circ$	»	
»	^3D — $^3D^\circ$	»	
»	^3D — $^5F^\circ$	»	$\Delta R = 2.$
»	$^5G^\circ$ — ^5F	$d^8sp \longrightarrow d^8ss$	
»	^3F — $^5F^\circ$	d^8sp	$\Delta R = 2.$
»	^3F — $^3F^\circ$	$d^8s^2 \longrightarrow$ »	
»	^3F — $^3F^\circ$	d^9p	2*e*.
Pd	$^3D^\circ$ — ^3D		
»	$^3D^\circ$ — ^3F		
»	$^3P^\circ$ — ^3S	$d^9p \longrightarrow d^7d$	
»	$^3P^\circ$ — ^3P		
»	$^3P^\circ$ — ^3D		
»	^1D — $^3F^\circ$	$d^9s \longrightarrow d^9p$	$\Delta R = 2.$
»	^1D — $^1D^\circ$		
Atomos ionizados			
Ag, Cu	^1D — $^3F^\circ$		$\Delta R = 2$
Ag	^1D — $^3P^\circ$		$\Delta R = 2$
Cu, Ag, Au	$^3D^\circ$ — $^3P^\circ$		
Cu, Ag	^1D — $^3D^\circ$	$d^9s \longrightarrow d^9p$	$\Delta R = 2$
»	^3D — ^3F		
Cu, Ag, Au	^3D — $^3D^\circ$		
Ag	^1D — $^1F^\circ$		
»	^1D — $^1D^\circ$		
»	$^3D^\circ$ — ^3D	d^9s	
Au	$^3F^\circ$ — ^3D	$d^9p \longrightarrow$ »	
»	$^3F^\circ$ — ^3F	?	

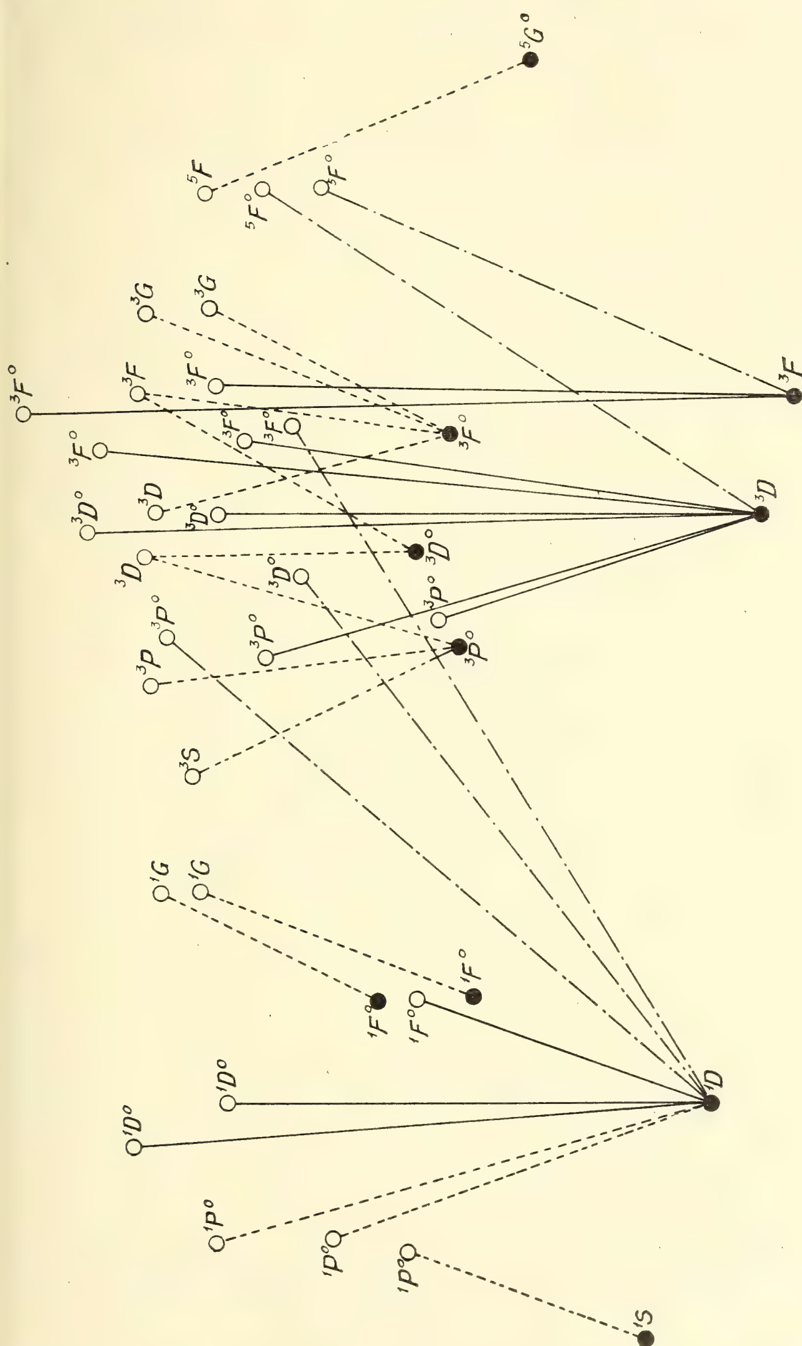


Fig. 10.

4. Resumen y conclusiones. — El cuadro XI resume los cuadros anteriores en forma numérica y muestra que la mayoría de las líneas últimas tienen como niveles iniciales los términos pares.

Tabla XI

	Atomos neutros		Atomos ionizados	
	Pares	Impares	Pares	Impares
I	47	32	26	2
II	22	95	20	26
III	25	31	68	12
IV	99	—	85	11
V	31	48	32	8
VI	62	12	28	—
VII	23	11	12	4
VIII	8	13	—	—
Fe, etc.	51	1	26	—
Co, etc.	63	4	—	—
Ni, etc.	57	15	25	—
Σ	488	262	322	58

La figura 11 resume las combinaciones encontradas.

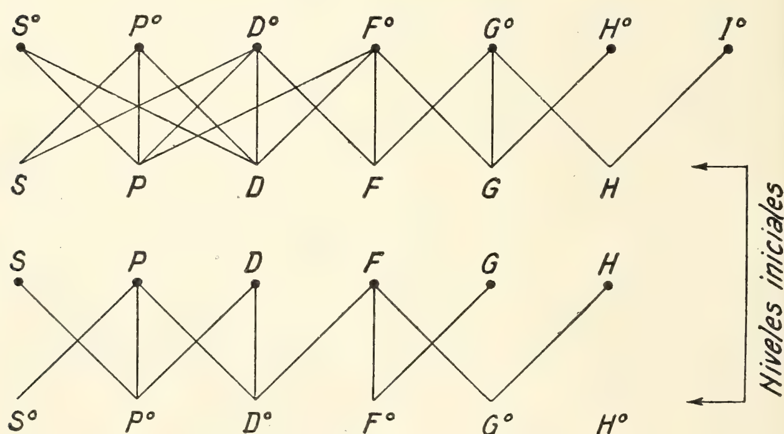


Fig. 11.

Estas conclusiones no son sino la confirmación de las halladas anteriormente y que figuran en las memorias que hemos citado.

Buenos Aires, Enero de 1938.

NUEVO MOTOR TERMICO

Por JOSE PIAZZA

Este dispositivo es el resultado de una nueva aplicación que hemos dado a la espiral; como en sus espiras se puede provocar o utilizar una diferencia de temperatura o de presión, el dispositivo puede funcionar sea como compresor o como motor.

El dispositivo de la figura 1 contiene en sus espiras una fase líquida y una fase gaseosa; girando el serpentín alrededor de su

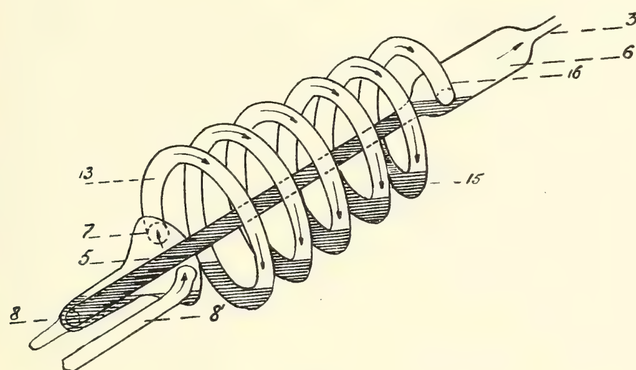


Fig. 1.

eje la fase líquda se mueve desde una extremidad hacia la otra. El bulbo 7 gradúa la cantidad de líquido que entra en el serpentín 13. Cuando la unión se encuentra en la parte baja entra en el serpentín la fase líquida, cuando se encuentra arriba entra la fase gaseosa. El eje está formado por un caño 5: dando al mismo una cierta inclinación y girando el dispositivo, la fase líquida sube en las espiras del serpentín, entra en el ensanchamiento del eje central 6 y baja por el caño axial 5 entrando de nuevo en el bulbo 7. La parte inferior está constituída por un cierre hidráulico 8 que impide al gas de escaparse en el caño central por la parte inferior.

En cuanto a la fase gaseosa podemos considerar dos casos típicos:

1) la misma no se condensa en el dispositivo;

2) la fase gaseosa se condensa en el dispositivo.

Según los casos la construcción del aparato será distinta.

En el primer caso la compresión o expansión de la fase gaseosa será de tipo isotérmico, en el segundo caso será de tipo adiabático.

Imaginamos una sola espira, de acuerdo a la figura 2. La parte que comunica con el bulbo figura cerrada, la otra que comunica con la otra extremidad del serpentín figura abierta.

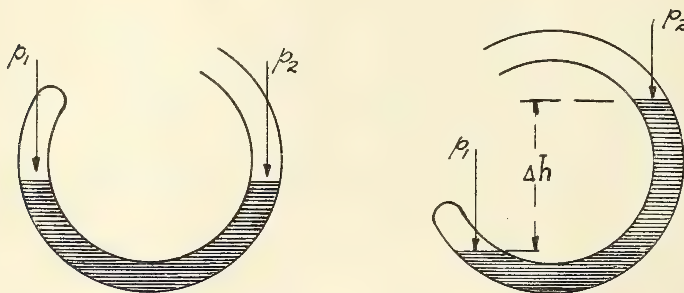


Fig. 2.

$p_1 = p_2$ $\qquad\qquad$ $p_2 + \Delta h = p_1$

$$A_1 = nRTln \cdot \frac{p_2}{p_1}$$

$$p_e - p_s = \Sigma \Delta h$$

$$\zeta = \lambda \frac{l}{d} + 2$$

Imaginamos primeramente el caso de la expansión isotérmica: si la fase líquida está al mismo nivel resulta que la presión p_1 será igual a la presión p_2 sobre las dos ramas de la espira; si hacemos girar la espira de un cierto ángulo, tenemos el caso de una compresión de acuerdo a lo indicado en la figura. Si la compresión es isotérmica el trabajo es proporcional a la diferencia de los logaritmos de la presión inicial y final. Durante esta compresión el centro de gravedad de la espira se ha desplazado y la nueva cupla tiende a dar al serpentín su posición primitiva. En este caso el gas comprimido en la espira hace funcionar el dispositivo como motor. El ciclo es completamente reversible. En las demás espiras sucede lo mismo, las diferencias de nivel

se suman y al final tenemos:

$$p_e - p_s = \Sigma \Delta h$$

siendo p_e la presión en el bulbo y p_s la presión a la salida del serpentín y $\Sigma \Delta h$ la sumatoria de las diferencias de nivel en las espiras.

Las pérdidas por rozamiento dependen de las características del aparato y el coeficiente de rozamiento es:

$$\zeta = \lambda \frac{l}{d} + 2$$

siendo l la suma de las longitudes de los cierres hidráulicos en el serpentín y d el diámetro del caño.

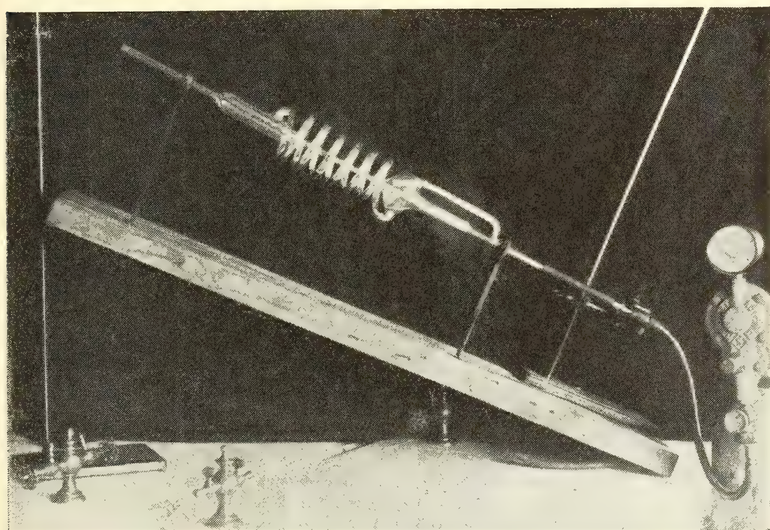


Fig. 3.

La realización del motor se nota en la figura 1 y en la fotografía (fig. 3). El motor está suspendido sobre dos cojinetes en posición inclinada. El gas entra lateralmente en el bulbo por el caño axial 8′, el gas se expande en el serpentín provocando en los cierres de mercurio una diferencia de nivel que provoca la rotación del dispositivo. El gas sale completamente expandido por el caño 3. La expansión se hace en forma sucesiva en cada espira y entonces el trabajo se acerca al máximo teórico. El dispositivo trabaja por superposición de

pequeños efectos hasta que la cupla de torsión venza la fuerza exterior.

Se ha substituído en otro modelo el gas comprimido por vapor producido en un balón acoplado al aparato en la parte inferior, dispuesto axialmente, y que gira con el dispositivo. El vapor sale en la parte superior al estado no condensado. Con este dispositivo se evita el contacto rotativo del caño fijo que conduce el gas comprimido con el caño axial de entrada. El dispositivo funciona con toda facilidad. En este caso la expansión no es isotérmica. Este aparato a más de un motor o compresor, según los casos, representa para el químico un saturador donde se pone en contacto íntimo una fase líquida con una fase gaseosa renovándose continuamente la superficie de contacto.

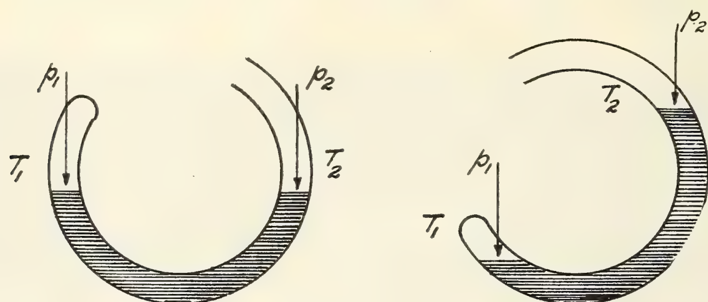


Fig. 4.

$p_1 = p_2$ $p_1 > p_2$

$T_1 = T_2$ $T_1 > T_2$

$$A_1 = Q \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\lambda}{RT^2} p$$

$$A \text{ total} = \frac{T \text{ hervidor} - T \text{ condensador}}{T \text{ hervidor}} Q$$

Ahora consideramos el segundo caso que es mucho más interesante o sea:

2) La fase gaseosa está constituída por el vapor saturado de la fase líquida. La figura 4 con sus fórmulas explica el funcionamiento del dispositivo. En este caso la realización corresponde a la figura

N° 5 y a la fotografía N° 6. La llama calienta el bulbo 7 y el vapor que se desprende se expande sucesivamente en las espiras del serpentín provocando la diferencia de nivel en los cierres y la rotación consiguiente del dispositivo. A medida que se expande, disminuye la temperatura y aumenta la cantidad de vapor, por el hecho que el mercurio de los cierres, disminuyendo la presión, si-

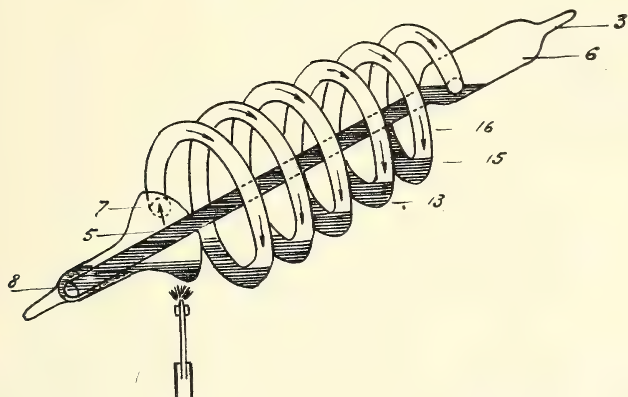


Fig. 5.

gue hirviendo aumentando en esta forma el rendimiento termodinámico del dispositivo. El trabajo tiende entonces a acercarse al valor máximo. El diámetro de las espiras tendría que aumentar a medida que se acerca a la extremidad superior del dispositivo.

En este modelo no se ha tomado en cuenta este hecho, pues en su contra influye la pérdida calórica. Como la tensión de vapor del mercurio se hace sensible recién arriba de 320° y el dispositivo trabaja a una temperatura superior, las pérdidas calóricas son enormes y sorprende el hecho de que una pequeña llama sea suficiente para hacer funcionar el motor.

Este aparato está completamente cerrado al vacío. El dispositivo 7 corresponde al hervidor y el dispositivo 6 al condensador. Este motor no tiene estator y el líquido no está sometido a pérdidas.

Para llegar a este resultado hemos tenido que armonizar todos los factores que intervienen, principalmente las dimensiones de cada órgano y la cantidad óptima de carga. En todo esto hemos sido secundados eficazmente por nuestro técnico en trabajos de vidrio señor Ricardo Kurtzer.

Este principio deja prever la posibilidad de dar a la fase líquida densidades aparentes sumamente elevadas, haciendo actuar en vez de la gravedad la fuerza centrífuga; es una posibilidad que tenemos

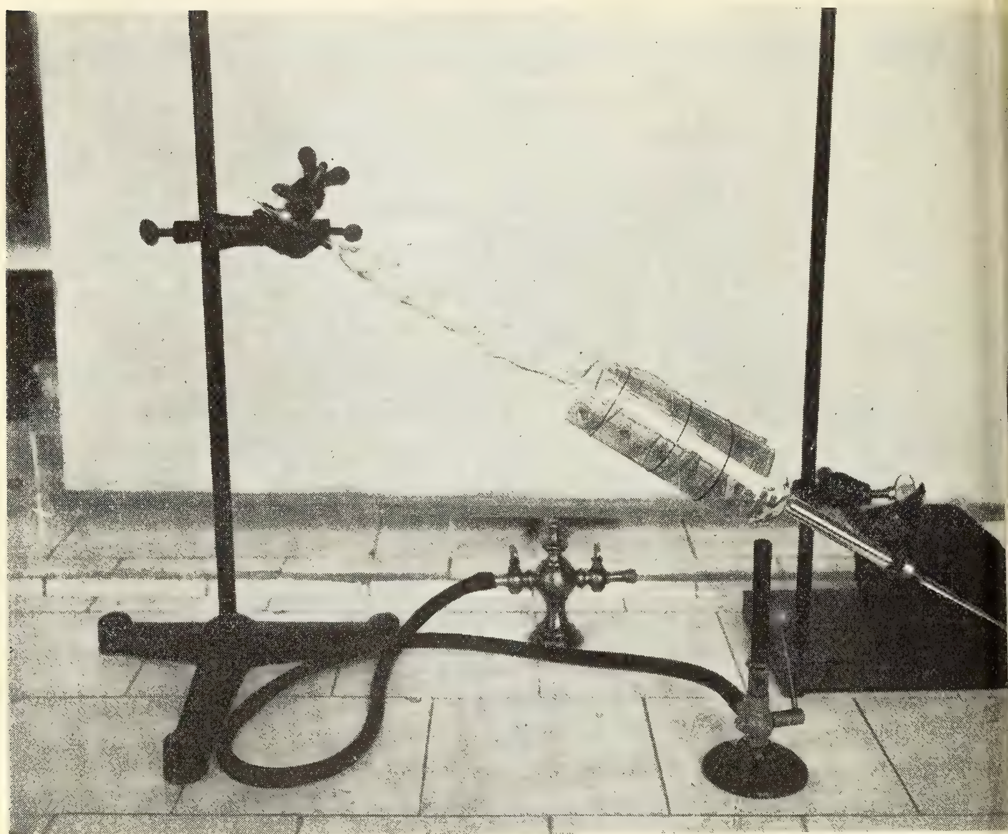


Fig. 6.

que estudiar, pues en esta forma, con un aparato sumamente reducido, se podría llegar a grandes potencias.

Santa Fe, Agosto de 1937.

Instituto de Investigaciones
Cientificas y Tecnologicas - Facultad de
Quimica Industrial y Agricola.
Universidad Nacional del Litoral

COTEJOS ECONOMICOS Y SELECCION ECONOMICA

Por el Ing. MAURICIO DURRIEU

(Continuación)

47. — Valor actual de una instalación, obra, estructura. — El concepto del valor actual de una instalación, obra o estructura, ha menester de una clara exposición, tanto para los fines de una definición propia como en atención a la variedad de los objetos y de las circunstancias a que dicho valor puede corresponder.

No bastan, a estos efectos, la breve enunciación que hiciéramos del valor actual en el Cuadro de los « Elementos del costo anual de servicio »; ni las accidentales referencias a dicho valor formuladas con ocasión de algunos cálculos en que interviene.

Para hacerse cargo de lo que representa el valor actual, es insuficiente definirlo como el *valor* que resta a una instalación, obra o estructura, en un instante dado, admitiendo que se la aproveche con el mejor tino y propiedad. La noción así expresada, resulta por demás escueta; no da explícita razón de la dependencia que ese valor guarda con algunos factores primordiales: la naturaleza del objeto a que el valor se refiere; la posibilidad de continuar utilizándolo; la condición, propicia o no, de esa utilización venidera; los medios viables para apreciar tal condición; —factores todos vinculados al establecimiento de la ley de variación del valor actual.

Aún cabe advertir que la determinación del valor actual, en materia de selección económica, supone evidente y fundamentalmente que las instalaciones, obras o estructuras tienen cumplida ejecución y conservación y son utilizadas cabalmente para sus fines ulteriores, principios, uno y otro, que encuadran aquella determinación.

Además, no es regla acertada la de introducir en la determinación del valor actual un concepto de estimación extrínseca, admitiendo que por alguna circunstancia de excepción, a los *a* años, el valor del objeto aumente o decrezca de una manera notable con

respecto al que normalmente y dentro de su aplicación anterior tendría. Los cálculos económicos no pueden entrar en esa vía especulativa. Los cotejos, en particular, fúndanse en previsiones normales y definidas. Es preferible no hacerlos si ha de desatenderse ese fundamento, y pasar a cálculos antojadizos.

En el terreno ideológico, fácil es sentar que toda instalación, obra o estructura, ofrece en un momento dado un valor actual, función de su utilidad que asimismo puede desdoblarse en dos partes, a saber: un *valor para uso,* correlativo de las condiciones en que dicha instalación, obra o estructura préstase a ser aprovechada, — y un *valor residual* o *de demolición,* constituído por el de aquellas partes materiales susceptibles de alguna utilidad cuando sea desarmada o desintegrada la instalación, etc., carente ya de provechosa aplicación como un todo. A este último valor redúcese, está claro, el actual cuando la instalación, obra o estructura alcanza su límite de duración.

Surge, entonces, de las consideraciones precedentes, que desde el momento en que un objeto entra en la actividad económica, su valor inicial, C, experimenta una *depreciación, desmedro* o *mengua,* D_a. La expresión que vincula estas dos cantidades con el valor actual, C_a, referida al día inicial de actividad, es

$$D_a = C - \frac{C_a}{(1+r)^a} \qquad [31]$$

y si hacemos asimismo

$$D_a = \frac{p}{100} C \qquad [a]$$

$$\frac{p}{100} C = C - \frac{C_a}{(1+r)^a} \quad ; \quad C_a = \frac{100-p}{100} C\,(1+r)^a \qquad [31_a]$$

Es lo usual, en la técnica, estimar D_a [1] en función de C, como en la (a) ; para deducir C_a, ocurre tener entonces presente que p no se refiere al año a, sino al inicial, y ese valor de p no puede ser ya el que corrientemente se utiliza cuando la [31] se escribe equivocadamente

$$D_a = C - C_a \,.$$

[1] Es comprensible que sólo experimentan menguas los objetos que *se desgastan* paulatinamente por el uso o desmerecen siquiera con el correr del tiempo. Para las inversiones de cuyo monto no es posible recuperar parte alguna, la mengua es naturalmente total.

Ha de comprenderse que no es éste el procedimiento conveniente para calcular C_a. Ninguna hipótesis simplista, así como ninguna ley matemática invariable, hallan cabida en la determinación de este valor. La estimación directa de C_a, es lo mejor, porque toma en cuenta los factores esenciales de que depende, y tantea las circunstancias que corresponden a la época para la cual se le estima.

El primer juicio acerca de C_a, es que tiene por límite inferior C_l, valor residual de la instalación, obra o estructura calculable por estimación de las partes materiales a obtenerse por demolición o desarme, con deducción del costo presupuesto de esa operación. Asimismo, C_a decrecerá ordinariamente entre C y C_l a partir del día inicial de la actividad. El primer supuesto debe tenerse por exacto, siempre que toda instalación, obra o estructura sea conservada y parcialmente renovada cada vez que corresponda; el segundo no lo es en general, porque las alternativas del estado de conservación pueden engendrar otras del valor de la instalación, etc., divergentes de la ley uniforme o regular de decrecimiento.

La consideración técnica mediante para determinar el valor actual de una instalación, obra, o en general de toda estructura compleja, debe atender cada vez el criterio teórico y los factores de la práctica. La tarea resulta, con ello, singularmente delicada: considera la materialidad del objeto, para sentar una *apreciación intrínseca* del mismo; pero también suele hacerse cargo de la conveniencia y de la posible adaptación del objeto a prestar algún oficio, con lo cual intervienen en las operaciones factores *externos* o *extrínsecos*.

Lo más cómodo, sin duda, es teorizar. Y en verdad, la teoría no debe quedar descartada de la investigación, porque suministra insustituibles elementos de juicio.

Mas, la abstracción que por su intermedio verifícase de muchos hechos, la dificultad de hacer intervenir y de aquilatar en una ley matemática los factores convenientes, y la inseguridad con que es frecuente tener que discernir los valores numéricos aplicables a esa ley, son otras tantas causas del desmerecimiento del método puramente teórico

Por ello, en numerosas oportunidades, cuando la persona que realiza el estudio posee una suficiente experiencia de las instalaciones, obras, etc., en tela de juicio, podrá alcanzar un buen resultado estimando empíricamente C_a y puede concederse a este procedimiento la precedencia sobre otro teórico falto de apoyo experimental.

Lo más acertado, no obstante, será que concurran ambos criterios en la circunstancia.

Las estimaciones empíricas del valor actual, responden a métodos variados y arbitrarios. Es difícil pautarlas.

Los procedimientos teóricos, por el contrario, admiten una clasificación. Pueden ser *generales* o *particulares; racionales* o *empírico-racionales*.

48. — Método racional general de determinación del valor actual. — Toda instalación, obra o estructura compleja, consta de un variado número de partes constitutivas que realizan conjuntos orgánicos. Una obra, p. ejemplo, hállase formada por trabajos o estructuras diversas. Cada parte concurre a integrar el todo con un valor que asimismo corre parejas con una duración. Puede ser ésta igual, mayor o menor que la de la propia obra, y resulta obvio que en cada caso, la parte tomada en cuenta no puede considerarse lisa y llanamente incluída en el conjunto por su valor de obtención e incorporación en él, desde que ocurrirá a menudo repararla o renovarla en oportunidad o medida distinta de otras partes. Es visible que según resulte el estado de la instalación, obra o estructura por efecto del uso, de los reparos y de las renovaciones en cada una de sus partes realizadas, la eficiencia de dicha instalación, obra, etc., se modificará. Ni simple, ni fácil de averiguar, es con frecuencia la ley de esta modificación.

Sin entrar en excesivas disquisiciones sobre el punto, es razonable clasificar las partes de una instalación u obra en *tres grupos*, a saber:

1º Partes del valor que se invierten una sola vez y no dan lugar a nuevos gastos (ejemplo: en las obras, las excavaciones de cimientos; los derechos de construcción; etc.). No se recuperan al terminar la vida de la instalación, obra, etc.

2º Partes que duran tanto o más que el todo, y requieren ciertos desembolsos por reparos cuya periodicidad puede sentarse; al terminar la duración del todo, acaso tengan esas partes cierto valor residual.

3º Partes que duran menos que el todo y exigen reparos y también renovaciones de periodicidad técnicamente definible. Al término de la vida del todo, podrán suministrar un valor residual.

Veamos, ahora, cómo intervienen estas distintas partes en el valor total, partiendo del aspecto intrínseco.

Partes del grupo primero.

Llamemos G_1 el valor original de una parte de esta naturaleza. Atenta la constancia de ese valor, la consunción paulatina del mismo a medida que transcurre la existencia, l, de la instalación, obra o estructura, hállase representada teóricamente por la amortización correspondiente. Cada unidad de ese valor, o sea cada 1 $, debe quedar totalmente amortizada a los l años, de manera que la anualidad respectiva es $d_l = \frac{r}{[(1+r)^l-1]\,(1+r)}$, y como esa anualidad, a los a años, ha reconstituído la parte amortizada del valor total en ese tiempo, la suma obtenida por cada 1 $ es $d_l z_a$, o sea

$$d_l\, z_a = \frac{r}{[(1+r)^l-1]\,(1+r)} \cdot \frac{[(1+r)^a-1]\,(1+r)}{r} = \frac{(1+r)^a-1}{(1+r)^l-1}$$

o con la transformación Benitz

$$d_l\, z_a = \frac{T_a\,(1-T_l)}{T_l\,(1-T_a)}\,.$$

Para todo el capital, pues, será

$$\Sigma\, G_1\, z_a\, d_l = \Sigma\, G_1 \frac{(1+r)^{a-1}}{(1+r)^{l-1}} = \Sigma\, G_1 \frac{T_a\,(1-T_l)}{T_l\,(1-T_a)}\,.$$

El valor restante, o actual, resulta ser:

$$\Sigma\, G_1\,(1-z_a\, d_l) = \Sigma\, G_1 \frac{[(1+r)^l-1]-[(1+r)^a-1]}{(1+r)^l-1} = \Sigma\, G_1 \frac{T_l-T_a}{T_l\,(1-T_a)} \quad [a]$$

Partes del grupo segundo.

Sea G_2 el valor inicial de una parte de esta categoría. Admitamos que su propia duración sea $p \geq l$, y se la repare de tanto en tanto, con un costo que importe una fracción variable de G_2. Durante el plazo a, correspondiente a la época en que se considera el valor actual, se tendrá:

Si $a < n$ ($n =$ plazo mínimo de reparo).

Amortizado: cuando G_{2_l} fuese el valor residual de la parte al fin del plazo l:

$$G_2\, d_l\, z_a = G_2 \frac{(1+r)^a-1}{(1+r)^l-1}$$

Valor restante:

$$G_2\left(1 - \frac{(1+r)^a - 1}{(1+r)^l - 1}\right) + \frac{G_{2_l}}{(1+r)^{l-a}} =$$

$$= G_2 \frac{(1+r)^l - (1+r)^a}{(1+r)^l - 1} + G_{2_l} \frac{(1+r)^a}{(1+r)^l}$$

Luego, para todas las partes similares:

$$\Sigma\, G_2 \frac{(1+r)^l - (1+r)^a}{(1+r)^l - 1} + \Sigma'.\, G_{2l} \frac{(1+r)^a}{(1+r)^l} \qquad [b]$$

Si $a > n$, el valor de la parte comprenderá el de los reparos periódicos. Para la de valor G_2, con costos saltuarios cuyo menor intervalo sea n, el costo total, en el plazo l, admitiendo la existencia de un valor residual G_{2_l}, sería:

$$\left[G_2 + \frac{S_n}{(1+r)^{n-1}} + \frac{S_o}{(1+r)^{o-1}} + \frac{S_p}{(1+r)^{p-1}} + \ldots + \frac{S_n}{(1+r)^{2n-1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{S_o}{(1+r)^{2o-1}} + \ldots + \frac{S_n}{(1+r)^{(xn-1)<a}} + \frac{S_o}{(1+r)^{(xn-1)<a}} + \ldots\right]$$

y de este costo lo amortizado en a años:

$$\left[G_2 + \frac{S_n}{(1+r)^{n-1}} + \frac{S_o}{(1+r)^{o-1}} + \frac{S_p}{(1+r)^{p-1}} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{S_n}{(1+r)^{2n-1}} + \ldots\right] \frac{(1+r)^a - 1}{(1+r)^l - 1}$$

Luego

Valor restante:

$$\left[G_2 + \frac{S_n}{(1+r)^{n-1}} + \frac{S_o}{(1+r)^{o-1}} + \ldots\right] \frac{(1+r)^l - (1+r)^a}{(1+r)^l - 1} + G_{2_l} \frac{(1+r)^a}{(1+r)^l}$$

Para el conjunto de partes:

$$\Sigma\left[G_2 + \frac{S_n}{(1+r)^{n-1}} + \frac{S_o}{(1+r)^{o-1}} + \ldots\right]\frac{(1+r)^l - (1+r)^a}{(1+r)^l - 1} +$$

$$+ \Sigma\, G_{2_l}\frac{(1+r)^a}{(1+r)^l} = \Sigma\left[G_2 + \frac{S_n}{(1+r)^{n-1}} + \frac{S_o}{(1+r)^{o-1}} + \ldots\right]\frac{T_l - T_a}{T_l(1-T_a)} +$$

$$+ \Sigma\, G_{2_l}\frac{1 - T_l}{1 - T_a} \qquad [c]$$

Partes del grupo tercero.

La expresión (c) es aplicable, con admitir que alguno de los valores, S_i, corresponda a una renovación que importaría un costo

$$S_i = G_3 - G_{3_l},$$

en que G_{3l} fuese el valor remanente de la parte en el momento de la renovación. Este valor G_{3_l} puede diferir del residual de la parte al final de la duración de la instalación, obra o estructura general, según la época relativa de la renovación anterior. Por ello debe ponerse G_{3_l} distinto de $G_{3_{l'}}$ para l' igual al intervalo entre renovaciones.

Obvio es que al calcular el valor actual de una instalación, obra o estructura por este procedimiento, no habrá que pensar en deducir el costo de reparos en el momento determinado por el plazo a, puesto que se supone la conservación satisfactoria de todo en su tiempo.

El valor actual, pues, de una instalación, obra o estructura que comprendiese partes de los tres grupos, estaría dado por la suma de las expresiones generales correspondientes a esos grupos:

$$(a) + (b) + (c).$$

No nos parece necesario plantear las expresiones posibles, en atención a su sencilla formación.

Más simple y breve, aunque un tanto menos propio, es evitar la intervención en los cálculos anteriores de los montos de reparos y renovaciones, y determinar para cada parte constitutiva el valor restante de obtención, más el residual, deduciendo de la suma de estos dos valores el importe de los reparos o restauraciones a eje-

cutarse de inmediato, en el supuesto de que faltó anteriormente la conservación normal adecuada.

Esta manera de calcular es objetable desde luego porque no considera los costos de reparos y renovaciones con montos adecuados a las épocas normales de inversión que les corresponden, y también porque la conservación y la restauración de una instalación, obra o estructura, aunque se las realice cumplida y oportunamente, demandan mayores expensas a medida que la instalación, obra, etc., envejece.

En verdad, difícil es prever con visos de propiedad los montos S para las distintas épocas en que ocurrirán reparos y renovaciones. En general, adóptanse criterios muy arbitrarios para realizar esa previsión, y es muy difícil razonar estas investigaciones. El cálculo del valor actual conforme lo indicamos, aunque más conveniente en el concepto teórico, dará en la realidad más o menos satisfactorios resultados según la prolijidad y el acierto con que se proceda. Son tantos los factores y elementos a considerarse, a menudo, que el calculista podrá fatigarse en la tarea de determinarles.

49. — Fórmula de los provechos equiproporcionales [1]. — Todo objeto vendido de *segunda mano*, tiene un valor actual indudable: así lo pone de manifiesto la transferencia realizada *a título oneroso*. Para establecer ese valor, cabe partir de varios supuestos, atendiendo al *tiempo transcurrido* desde la creación y utilización del objeto, y a las *circunstancias*, permanentes unas, como la acción de la intemperie, el desgaste en servicio, etc., y accidentales otras, como las conveniencias particulares, el desuso, etc. Se ve que si el desmedro es *materia de suposición*, el valor actual *ha de ser estimado*.

Evidente es que si se piensa realizar la estimación sopesando las conveniencias del adquirente de segunda mano, plantéase un nuevo problema económico, en más de una oportunidad distinto del que origina el cálculo donde ha de intervenir C_a.

Ha de meditarse este aspecto del procedimiento de investigación del valor actual que pasamos a tratar, ya que trae implícitamente al cotejo en estudio una nueva condición: la de considerar a C_a en una forma que puede diferir de la que corresuonde a la aplica-

(1) Establecida por el ingeniero norteamericano John C. Lounsbury Fish en su obra «Engineering Economics», Mc. Graw-Hill Book C° Inc., New York, 1923, 2ª ed., nº. 1706, p. 186.

ción dentro del primitivo objeto de la instalación, etc., y también susceptible de variar de un tipo a otro de instalación, etc., a cotejarse.

La fórmula que pasamos a ver, incluye esa condición.

El principio en que estriba, es el siguiente: « *Un precio equitativo por una estructura vendible de segunda mano, es aquél que habrá de producir al comprador y al vendedor razones iguales de los provechos anuales realizados con dicha estructura, a los capitales invertidos en adquirirla* ».

Sean, entonces,

l, la duración total (vida) de la estructura, en *años*;

a, la edad, en *años*, para la cual búscase el valor actual que por diferencia con el costo inicial, luego de trasladado a la misma época que éste (1), dará a conocer la depreciación (fórmula [31]);

z_a, la suma formada a los a años por una anualidad de 1 $, depositada al comienzo de cada año.

Para el vendedor de la estructura:

b', la utilidad anual media, en los a años;

e', el producto o las entradas medias, en los a años;

y_a, el costo anual medio de servicio, en los a años;

C, el primer costo de la estructura;

C_a, el valor actual de la misma, a los a años;

d_a, la anualidad a depositarse al comienzo de cada año para constituir un capital de 1 $ en a años;

r', la razón del interés anual y otras cargas fijas al primer costo;

P', el costo anual medio de funcionamiento o servicio de la estructura en los a años;

S', el costo anual medio de conservación de la estructura en los a años.

Para el adquirente de la estructura:

b'', la utilidad anual media para $l - a$ años, o sea el resto de la vida de la estructura;

e'', las entradas medias anuales en los $l - a$ años;

y_{l-a}, el costo anual medio de servicio en los $l - a$ años;

(1) Aquí planteamos el procedimiento con la misma rectificación de que dimos cuenta en lo precedente, y aplicada por lo demás, en todas nuestras fórmulas.

C_a, el valor actual de la estructura, que representa el primer costo para el adquirente;

C_l, el valor desidual de la estructura;

d_{l-a}, la anualidad a depositarse cada comienzo de año para constituir 1 $ al cabo de $l - a$ años;

r'', la razón del interés anual y otras cargas fijas al primer costo,

$$C_a - \frac{C_l}{(1+r)^{l-a}};$$

P'', el costo anual medio de funcionamiento o servicio en los $l - a$ años;

S'', el costo anual medio de conservación en los $l - a$ años.

Por la definición del método:

$$\frac{b'}{C - \dfrac{C_a}{(1+r)^a}} \qquad \frac{b''}{C_a - \dfrac{C_l}{(1+r)^{l-a}}} \qquad [a]$$

e indudablemente,

$$b' = e' - y_a \quad ; \quad b'' = e'' - y_{l-a} \qquad [b]$$

Mas, los costos anuales de explotación o servicio resultan de sumar las cargas fijas y las de marcha o producción y conservación expresadas en el cuadro general del número 17, esto es,

$$y_a = \left(C - \frac{C_a}{(1+r)^a}\right) d_a + \left(C - \frac{C_a}{(1+r)^a}\right) \frac{r'}{1+r} + P' + S' =$$

$$\left.\begin{aligned} &= \left(C - \frac{C_a}{(1+r)^a}\right)\left(d_a + \frac{r'}{1+r}\right) + P' + S' \\ y_{l-a} &= \left(C_a - \frac{C_l}{(1+r)^{l-a}}\right)\left(d_{l-a} + \frac{r''}{1+r}\right) + P'' + S'' \end{aligned}\right\} \quad [c]$$

Luego

$$\frac{e' - \left[\left(C - \dfrac{C_a}{(1+r)^a}\right)\left(d_a + \dfrac{r'}{1+r}\right) + P' + S'\right]}{C - \dfrac{C_a}{(1+r)^a}} =$$

$$= \frac{e'' - \left[\left(C_a - \dfrac{C_l}{(1+r)^{l-a}}\right)\left(d_{l-a} + \dfrac{r''}{1+r}\right) + P'' + S''\right]}{C_a - \dfrac{C_l}{(1+r)^{l-a}}}$$

de donde

$$\frac{C^2_a}{(1+r)^a}\left(d_a - d_{l-a} + \frac{r'-r''}{1+r}\right) +$$

$$+ C_a\left[e' + \frac{e''}{(1+r)^a} - C\left(d_a - d_{l-a} + \frac{r'-r''}{1+r}\right) -\right.$$

$$\left.- \frac{C_l}{(1+r)^l}\left(d_a - d_{l-a} + \frac{r'-r''}{1+r}\right) - \left(P' + S' + \frac{P''+S''}{(1+r)^a}\right)\right] =$$

$$= C\,[e'' - (P'' + S'')] +$$

$$+ \frac{C_l}{(1+r)^{l-a}}\left[e' - (P' + S') - C\left(d_a - d_{l-a} + \frac{r'-r''}{1+r}\right)\right]$$

Multiplicando por $(1+r)^a$ y dividiendo por $d_a - d_{l\text{-}a} + \dfrac{r'-r''}{1+r}$

$$C_a^2 + C_a\frac{(1+r)^a}{d_a - d_{l-a} + \dfrac{r'-r''}{1+r}}\left[e' + \frac{e''}{(1+r)^a} - C\left(d_a - d_{l-a} + \frac{r'-r''}{1+r}\right) -\right.$$

$$\left.- \frac{C_l}{(1+r)^l}\left(d_a - d_{l-a} + \frac{r'-r''}{1+r}\right) - \left(P' + S' + \frac{P''+S''}{(1+r)^a}\right)\right] =$$

$$= C\frac{(1+r)^a}{d_a - d_{l-a} + \dfrac{r'-r''}{1+r}}\,[e'' - (P'' + S'')] +$$

$$+ \frac{C_l}{(1+r)^{l-a}}\frac{(1+r)^a}{d_a - d_{l-a} + \dfrac{r'-r''}{1+r}}\left[e' - (P' + S') -\right.$$

$$\left.- C\left(d_a - d_{l-a} + \frac{r'-r''}{1+r}\right)\right]$$

Escribamos ahora

$$
\left.
\begin{aligned}
2g &= \frac{(1+r)^a}{d_a - d_{l-a} + \dfrac{r'-r''}{1+r}} \Bigg[e' + \frac{e''}{(1+r)^a} - \\
&\quad - \left(C + \frac{C_l}{(1+r)^l}\right)\left(d_a - d_{l-a} + \frac{r'-r''}{1+r} - \left(P' + S' + \frac{P''+S''}{(1+r)^a}\right)\right]; \\
m &= C \frac{(1+r)^a}{d_a - d_{l-a} + \dfrac{r'+r''}{1+r}} \Big[e'' - (P''+S'') + \\
&\quad + \frac{C_l}{(1+r)^{l-a}} \frac{(1+r)^a}{d_a - d_{l-a} + \dfrac{r'-r''}{1+r}} \Big[e' - (P'+S') - \\
&\quad - C\left(d_a - d_{l-a} + \frac{r'-r''}{1+r}\right)\Bigg]
\end{aligned}
\right\} [d]
$$

y sustituyendo

$$C_a^2 + 2g\, C_a = m$$

Añadamos g^2 a ambos miembros

$$C_a^2 + 2g\, C_a + g^2 = m + g^2$$

y de consiguiente

$$(C_a + g)^2 = m + g^2$$

Luego

$$C_a = -g \pm \sqrt{m + g^2} \qquad [32]$$

en la que g tiene por valor la mitad de la primera de las expresiones literales (d).

Esta fórmula permite el cálculo de C_a cuando sean estimados e', e'', r', r'', C_l, P' S', P'' y S'', pues los valores numéricos de d_a, d_{l-a}, $(1+r)^a$, $(1+r)^{l-a}$ y $(1+r)^l$ se calculan o hallan en tablas con el solo conocimiento de r, a y l. Conocido C_a, la [31] da la depreciación.

50. — *Casos particulares.* — Sea, en primer lugar, la hipótesis de que no exista provecho en el servicio de la estructura, sólo haya un interés del costo de producción (construcción) y los productos sean proporcionales a los servicios anuales o ejercicios respectivamente realizados por vendedor y comprador.

La primera parte de la suposición, equivale a sentar

$$b' = b'' = 0.$$

De consiguiente, en las (b), (nº 49),

$$e' - y_a = 0 \qquad e'' = y_{l-a} = 0$$

o

$$e' = y_a \qquad e'' = y_{l-a} \,. \tag{e}$$

La segunda parte de la hipótesis, es que

$$\frac{e'}{e''} = \frac{U'}{U''} \,,$$

si U' y U'' respectivamente son los ejercicios anuales del vendedor y del comprador.

Como las (e) permiten escribir:

$$\frac{y_a}{y_{l-a}} = \frac{U'}{U''} \qquad o \qquad \frac{y_a}{U'} = \frac{y_{l-a}}{U''} \,,$$

los costos medios anuales de servicio resultan, así, proporcionales a los servicios en toda la vida de la estructura, y llamando y_l el costo anual medio de servicio para toda la existencia de la estructura, así como U el aprovechamiento medio anual de la misma, también será cierto que

$$\frac{y_{l-a}}{U''} = \frac{y_l}{U} \tag{f}$$

Cuando pongamos en lugar de y_{l-a} e y_l sus expresiones detalladas como en las (c), obtenemos:

$$\frac{1}{U''}\left[\left(C_a - \frac{C_l}{(1+r)^{l-a}}\right)\left(d_{l-a} + \frac{r''}{1+r}\right) + P'' + S'' = \right.$$

$$= \frac{1}{U}\left[\left(C - \frac{C_l}{(1+r)^l}\right)\left(d_l + \frac{r_1}{1+r}\right) + P + S\right],$$

y despejado C_a,

$$C_a = \frac{\frac{U''}{U}\left[\left(C - \frac{C_l}{(1+r)^l}\right)\left(d_l + \frac{r_1}{1+r}\right) + P + S\right] +}{d_{l-a}}$$

$$\frac{+ \frac{C_l}{(1+r)^{l-a}}\left(d_{l-a} + \frac{r''}{1+r}\right) - (P'' + S'')}{d_{l-a} + \frac{r''}{1+r}} \tag{33}$$

valor deducido conforme a las ideas de H. P. Gillette, expuestas en las páginas 36 y siguientes de su « Handbook of Cost Data », (Mc Graw-Hill Book Comp. Inc., New York, 1920).

(Continuará)

BIBLIOGRAFIA

Goldsztaub (S.), *Quelques idées actuelles sur la structure des métaux et des Alliages*. 39 pág., 1936 (Hermann & Cía., Editor).

El autor pasa revista al estudio de las estructuras cristalinas de los metales puros, a la relación entre el sistema periódico y la estructura cristalina, a la relación entre el radio atómico y el sistema periódico, y finalmente al estudio de las aleaciones.

Sucintamente se exponen los hechos y las ideas que predominan actualmente sobre la cuestión. Respecto de las fuentes originales de estudios profundos el autor se remite a las obras clásicas y fundamentales de Bragg, Hume-Rothery, Dehlinger, y a la reciente monografía del segundo de los nombrados.

Este fascículo, es el N° 422 de la serie "Actualités Scientifiques et Industrielles", y el 2° de los asuntos metalográficos y metalúrgicos.

R. V.

Castro (R.), *Progrès dans la technique de la Métalographie Microscopique*. 58 págs. 1935. (Hermann & Cía., Editor).

Este fascículo, constituye el N° 301 de la serie "Actualités Scientifiques et Industrielles" y el primero de una serie referente a metalografía y metalurgia.

En un resumen breve, el autor trata las partes fundamentales relativas al asunto: Proporción de la muestra; el examen subjetivo y la reproducción de los espectros observados; el microscopio metalográfico y el futuro de los métodos micrográficos en esta rama de aplicación. Completa el trabajo una serie de 39 citas bibliográficas, donde el interesado puede contar con más amplias informaciones.

El folleto ofrece el interés propio de este tipo de publicaciones, que permiten en forma rápida y sintética ilustrar sobre el estado actual de las diversas ramas de las ciencias puras y aplicadas. Particularmente, merecen mencionarse los datos sobre el porvenir de los métodos micrográficos, y las citas correspondientes, que dan una idea concreta sobre el amplio campo de acción de estos estudios.

R. V.

Herzog (G.), *Les méthodes d'essai de corrosion des Métaux et alliages*. 78 páginas, 1936. (Hermann & Cía., Editor).

Forma el N° 437 de la serie "Actualités Scientifiques et Industrielles" y el 3° de los temas sobre metalurgia y metalografía.

El autor trata las nociones teóricas sobre la corrosión en medio húmedo; los métodos de valoración de la corrosión, indirectos y directos y los métodos de ensayo. Completa el trabajo, la enumeración de 59 citas bibliográficas. Además, 23 figuras permiten completar los conceptos del texto.

El fascículo forma un interesante resumen del estado actual de estos estudios y son numerosos los datos de valor que se exponen en la breve obra, particularmente en lo que se refiere a los métodos analíticos de estudio de la corrosión.

R. V.

PECHELBRONN, S. A. E. M. et FERRAUD, J., *Essais Physiques et Chimiques efectués sur les produits pétrolifères.* Un tomo 16 × 24, 465 páginas con 128 figuras en el texto. Precio por correo en Buenos Aires, 135 francos. Ch. Béranger, Paris y Lieja, 1937.

Fuera de los prefacios de H. Roy y H. Weiss y de la introducción firmada por J. Ferraud, esta obra publicada bajo el control de la dirección de servicios técnicos de la sociedad Pechelbronn en colaboración con el ingeniero J. Ferraud, consta de dos partes y un apéndice.

La primera parte, dividida en trece capítulos trata todo lo referente a ensayos físicos como ser: aspecto, olor, reflejo, color; densidad, viscosidad, destilación, puntos de inflamación y combustión, ensayos a bajas y altas temperaturas, ensayos mecánicos y de solubilidad, tensión superficial, tensión interfacial, ensayos de emulsión, ensayos eléctricos, tensión de vapor de las naftas, etc.

La segunda parte de veinte capítulos está dedicada a los ensayos químicos: investigación y dosaje del agua, de impurezas y sedimentos, dosaje de sedimentos potenciales en los fuel-oils, dosaje de grafito en un aceite grafitado, dosaje del asfalto, de la parafina, de los productos volátiles, ensayo de volatilidad, dosaje de cenizas y sales, dosaje de alcohol en los carburantes, dosaje de acidez y alcalinidad, índice de ácido, índice de saponificación; dosaje de productos saponificables y de jabones, investigación y dosaje de azufre y productos sulfurados, ensayo de combustión de kerosenes, propiedades de los combustibles para motores, índice de bromo, de amileno y de iodo, ensayos con ácido sulfúrico, determinación de carbón fijo, dosaje de gomas en las naftas, ensayo de alteración.

El apéndice complementa lo referente a color, viscosidad, ensayos al frío, mecánicos y de emulsión, así como dosaje de asfalto y ensayo de alteración. Sigue luego un glosario terminológico de productos petrolíferos y termina el volumen con un extracto bibliográfico.

Como puede colegirse por lo expuesto, este libro está llamado a ser un elemento de verdadera utilidad tanto para el fabricante como para el técnico consumidor, pues además de tratar en forma clara y detallada los distintos temas, se agregan en el texto conceptos aclaratorios tendientes a una mejor interpretación de los resultados arrojados por los distinos ensayos.

L. E. R.

Revisa Chilena de Historia Natural pura y aplicada, tomo XXXIX, Santiago de Chile, 1935.

Se ha incorporado a nuestra biblioteca el trigésimo noveno tomo de la prestigiosa Revista del epígrafe, que con tanto desinterés como dedicación dirige y edita nuestro miembro correspondiente en Santiago de Chile, el activísimo profesor Dr. Carlos E. Porter.

Con este tomo entra a cumplir la Revista cuarenta años de vida fecunda, habiendo constituído a través de ese lapso de tiempo, un alto exponente de la cultura científica chilena, efectuando una labor meritísima y manteniendo relaciones cordiales con los centros científicos y hombres de ciencia del mundo entero. No pocos investigadores argentinos han contribuído a redactar sus páginas, realizando así verdadera obra de confraternidad americana.

La existencia de tan importante publicación está íntimamente unida a la de su fundador y director, que le dedica todos sus afanes y hasta los ahorros de su peculio personal; ella constituye el trasunto de la vida abnegada y generosa del doctor Porter.

La *Revista Chilena de Historia Natural* ha publicado en los 39 tomos cerca de 1.500 colaboraciones originales, 1.100 extractos tomados de otras publicaciones, habiendo anunciado en su Seción Bibliografía más de 7.000 obras y revistas científicas.

Con motivo del fausto acontecimiento de haber entrado su Revista en sus 40 años, el doctor Porter ha recibido la satisfacción de que le lleguen del exterior de su país innumerables demostraciones de aprecio y solidaridad por su obra, mientras las autoridades y la opinión chilenas le tributaron expresivos homenajes de adhesión y afecto.

Nuestros *Anales* no pueden silenciar sus plácemes al doctor Porter y expresarle con cuanta simpatía siguen su labor.

M.

SOCIOS ACTIVOS

Aguilar, Félix
Albizzati, Carlos M.
Alvarez, Raúl J.
Allende Lezama, Luciano P.
Anastasi, Camilo
Anchorena, Juan E.
André, Enrique de
Andrioletti, Juan Luis
Añón Suárez, Vicente
Aparicio, Francisco de
Aráoz Alfaro, Gregorio
Arbecchi, Armando C.
Arce, Manuel J.
Arditi Thompson, H.
Armani, Aquiles
Arnaudo, Silvio J.
Avila Méndez, Delfín
Aztiria, Ignacio
Bado, Atilio A.
Bachmann, Enesto
Baglietto, Eduardo E.
Balbiani, Atilio
Bancalari, Agustín
Barabino Amadeo, S.
Barbieri, Antonio
Bargna, Juan L.
Barilari, Mariano J.
Barral Souto, José
Barrancos, Leónidas A.
Becke, Alejandro von der
Berrino, Juan B.
Bertino, José Carlos
Besio Moreno, Nicolás
Bianchi Lischetti, A.
Biggeri, Carlos
Blaquier, Juan
Boaglio, Santiago
Bolognini, Héctor
Bonanni, Cayetano A.
Bontempi, Luis
Bordenave, Pablo E.
Borruat, Luis
Borzi, Ana María
Bosch, Gonzalo
Bosisio, Anecto J.
Bottaro, Juan C.
Bozzini, Luis (h.)
Briano, Juan A.
Bunge, Juan C.
Buontempo, Guillermo
Butty, Enrique
Buzzo, Alfredo
Buzzo, Eduardo B.
Caillet Bois, Teodoro
Calandra, Raúl E.
Camus, Nicolás
Canale, Humberto
Carabelli, Juan José
Carbia, Rómulo D.
Carbone, Esteban
Carbonell, José J.
Cárcova, Enrique de la
Carelli, Antonio
Carelli, Humberto H.
Caride Massini, Pedro
Carman, Ernesto
Carrea, Juan Ubaldo
Casacuberta, Antonio
Castellanos, Alberto
Castello, Manuel F.
Castiñeiras, Julio R.
Celasco, Juan L.
Cock, Guillermo E.
Coni Bazán, F. A.
Curti, Orlando P.
Curutchet, Luis
Chanourdie, Enrique
Chizzini Melo, Aníbal F.
D'Ascoli, Lucio
Dassen, Claro C.
Dasso, Héctor
Dasso, Ricardo L.
De Cesare, Elías A.
De Fina, Armando L.
De la Ini, Juan E.
Dellepiane, Luis J.
Deulofeu, Venancio
Díaz, Emilio C.
Dieulefait, Carlos E.
Doello-Jurado, Martín
Dobranich, Jorge W.
Domínguez, Juan A.
Dubecq, Raúl E.
Dueñas, José
Duhau, Luis
Dupont, Enrique
Durañona y Vedia, A.
Durrieu, Mauricio
Edelberg, Benjamín
Escudero, Pedro
Faré, Santo S.
Fernández, Alberto J.
Fernández Díaz, A.
Fernández Long, S.
Figini, Angel
Figuerero, Hernando W.
Fischer, Gustavo Juan
Flores, Emilio M.
Floriani, Luis
Florit, Carlos J.
Forn, Carlos J.
Fossa Mancini, E.
Franceschi, Alfredo
Fürnkorn, Divico A.
Gadda, Carlos Manuel
Galmarini, Alfredo G.
Gandolfi Herrero, Augusto
Gandolfo, José S.
Gascón, Alberto
Gaspar, Fernando L.
Géneau, Carlos E.
Gerardi, Donato
Ghigliazza, Sebastián
Giagnoni, Bartolomé E.
Giannone, José
Gradín, Carlos
Grieben, Arturo
Gutiérrez, Ricardo J.
Haussler, Emilio
Herbin, Luis A.
Hermitte, Enrique
Herrera Vegas, M.
Herzer, Bernardo
Hickethier, Carlos F.
Hofmann, Herbert
Hortal, José Angel
Houssay, Bernardo A.
Hoyo, Arturo
Igartúa, Luis María
Irigoyen, Luis H.
Isetta, José
Ivanissevich, Ludovico
Jorge, José M.
Jakob, Cristofredo
Keiper, Guillermo
King, Diarmid O.
Kinkelin Pelletán, J. C. de
Kraglievich, Nicolás T.
Krapf, Eduardo
Labarthe, Julio
Lagunas, Simón
La Menza, Francisco
Laporte, Luis B.
Larco, Esteban
Lasso, Alfredo L.
Latzina, Eduardo
Ligniéres, Roberto
Lizer y Trelles, C. A.
Lombardi, Alberto
Loyarte, Ramón G.
Lozano, Nicolás
Lugones, Arturo M.
Llauró, José
Mac Donagh, E. J.
Magnin, Félix J.
Magnin, Jorge
Mainini, Carlos
Mallol, Emilio
Mamberto, Benito
Marcó del Pont, E.
Marchionatto, Juan B.
Maresca, Antonio J.
Marini, Tomás L.
Martignone, Eduardo
Marotta, F. Pedro
Marotta, R. Armando
Mata, Leopoldo
Méndez, Julio
Meoli, Gabriel
Meoli, Humberto
Mercau, Agustín
Mermoz, Francisco A.
Molfino, José F.
Molina Carranza, L.
Molle, Clotilde C.
Montes, Vicente E.
Moreno, Evaristo V.
Nágera, Juan José
Natale, Alfredo
Natale, Ernesto
Negrete, Lucía
Negri, Mario L.
Nelson, Ernesto
Nielsen, Juan
Oliveri, Alfredo E.
Ortega Belgrano, Raúl
Ortiz, Aníbal A.
Ortiz de Rosas, Jorge
Otamendi, Gustavo
Ottonello, Héctor
Páez, José María
Page, Franklin Nelson
Paitoví y Oliveras, A.
Paquet, Carlos
Parodi, Edmundo
Parodi, Lorenzo R.
Pasman, Raúl G.
Pasman, Rodolfo E.
Pastore, Franco
Paz Anchorena, José M.
Pérez Hernández, A.
Perrone, Cayetano
Pestalardo, Agustín
Pini, Aldo S.
Platz, Hubert
Podestá, Juan Carlos
Polti, Modesto
Posadas, Carlos
Quinos, José Luis
Quinterno, Bruno F.
Quiroga, Pedro R.
Raimondi, Alejandro
Raffo, Bartolomé M.
Ramaccioni, Danilo
Ramallo, Carlos M.
Ratto, Héctor R.
Rebuelto, Antonio
Rebuelto, Emilio
Reece, William Asher
Repetto, Blas Angel
Repossini, José
Ringuelet, Emilio J.
Rissotto, Atilio A.
Rivarola, Rodolfo
Robles, Angel A.
Rodríguez Aravena, S.
Rodríguez, Germinal
Roffo, Angel H.
Roffo, Juan
Roldán, Raimundo
Romero Brest, Enrique
Rokotnitz, Otto
Rospide, Juan
Rossell Soler, Pedro
Ruata, Luis E.
Ruiz Moreno, Isidoro
Ruiz Moreno, Adrián
Rumi, Tomás J.

Sabaria, Enrique
Sagastume Berra, A. E.
Salomón, Hugo
Sánchez, José Ricardo
Sánchez, Gregorio L.
Sánchez Díaz, Abel
Sánchez Sorondo, M. G.
Sanromán, Iberio
Santángelo, Rodolfo
Sarhy, Juan F.
Sarrabayrouse, Eugenio
Savon, Marcos A.
Schnack, Benno J.
Schmidt, Max
Schulz, Guillermo
Selva, Domingo
Sesma, Angel
Sheahan, Juan F.
Silva, Leónidas L.
Simons, Hellmut
Siri, Luis
Sobral, Arturo
Solari, Emilio F.
Solari, Miguel A.
Soler, Frank L.
Solórzano, Luis A.
Sordelli, Alfredo
Spinetto, David J.
Spota, Víctor J.
Storni, Segundo R.
Suárez, Angel
Taiana, Alberto F.
Taiana, Jorge
Tarragona, José
Tedeschi, Virgilio
Tello, Eugenio
Torre Bertucci, Pedro
Torello, Pablo
Tossini, Luis
Trelles, Rogelio A.
Trucco, Sixto E.
Valeiras, Antonio
Valentiner, Hugo
Valentini, Argentino
Valentinuzzi, Máximo
Vallebella, Colón B.
Vallejo, Segundo E.
Vanossi, Reinaldo
Varela, Rufino
Vecchi, Arístides de
Vela Huergo, Julio
Veyga, Francisco de
Vidal, Eduardo
Villalobos D., C.
Vignaux, Juan C.
Vinardell, Alberto
Volpatti, Eduardo
Wainer, Jacobo
White, Guillermo J.
Wauters, Carlos
Wysztelewski, W. de
Zamboni, Agustín
Zappi, Enrique V.
Zavalla, Carlos M.
Zuloaga, Angel M.

SOCIOS ADHERENTES

Bazzanella, José
Devoto, Carlos Alberto
Folcini, Martín L. G.
García, Eduardo D.
Glücksmann, Carlos E.
Goyena, Ricardo J.
Laporte, Julio A.
Magne de la Croix, P. A.
Milesi, Emilio Angel
Quevedo Capdevila, Eduardo A.
Recoder, Roberto F.
Repetto, Cayetano
Rusconi, Carlos
Somonte, Eduardo
Wechsler, Wolf

CASAS ADHERENTES

Angel Estrada y Cía.
Lutz, Ferrando y Cía.
Hijos de Atilio Massone
Otto Hess, S. A.
Est. Gráf. "Tomás Palumbo"
Jacobo Peuser, S. A. Ltda.

SOCIO VITALICIO

Huergo, Eduardo María

MIEMBROS PROTECTORES DE LA ORGANIZACION DIDACTICA DE BUENOS AIRES

Anchorena, Juan E.
Besio Moreno, Nicolás
Tornquist, E. y Cía. (Lda.)

SECCION CORDOBA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Ing. Pedro N. Gordillo; Vice-presidente, Dr. Miguel Fernández; Vice-presidente, Ing. Daniel A. García; Secretarios, Dr. Guillermo V. Stuckert; Prof. Tulio Mácola; Tesoreros, Dr. Juan Olsacher; Dr. Carlos C. Hosseus; Vocales, Ing. Clodoveo Pascualini; Dr. Agustín E. Larrauri; Dra. J. Gambastiani de Peláez; Arq. Salvador Godoy; Ing. Jorge E. Bobone; Dr. Federico Padula; Ing. Luis Chechi; Dr. Edwin Rothlin.

SOCIOS ACTIVOS

Achával, Luis
Aguiar, Henoch D.
Amaya, Arturo A.
Arrambide, Miguel
Bobone, Jorge E.
Bodenbender, G.
Bonet, Rafael
Borzacow, Wladimir
Brandan, Ramón A.
Broglia, Alberto A.
Buteler, Jesús E.
Camilloni, Carlos
Carlomagno, José
Chaudet, Enrique
Checchi, Luis
Deheza, Eduardo
Del Viso, Jacinto
De Tezanos Pinto, J.
Devoto, Heraclio A.
Espinosa, Manual
Esteban, Fernando
Fernández, Miguel
Fitz Simon, Sgo. E.
Fontana, Lorenzo P.
Fuchs, Guillermo J.
García, Daniel
Gavier, Daniel E.
Giménez de Azúa, F.
Godoy, Salvador A.
Gómez, Calixto A.
Gordillo, Pedro N.
Granillo Barros, M.
Hosseus, Carlos Curt
Jagsich, Juan
Kronfus, Juan
Lofayette Zimmer, M.
Larrauri, Agustín C.
Lutzow Holm, Olaf.
Mácola, Berardo A.
Mácola, Tulio

Mirizzi, Pablo Luis
Ninci, Carlos A.
Ninci, Raúl T.
Novillo Corvalán, S.
Olsacher, Juan
Padula, Federico
Pasqualini, Clodoveo
Peláez, J. Gambastiani de
Pilotto, Bernardo
Ponce Laforgue, C.
Roggeri, Domingo
Rothlin, Edwin
Sayago, Gumersindo
Schmiedecke, Augusto
Sigal, Moisés
Sparn, Enrique
Stuckert, Guillermo V.
Taravella, Ambrosio L.
Tarragó, Emeterio
Torres, Valeriano
Trebino, Natalio
Vercello, Carlos
Yadarola, Mauricio L.

SECCION SANTA FE

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Gustavo A. Fester; Vice-presidente, Dr. José Piazza; Secretario de correspondencia, Ing. Quím. Francisco A. Bertuzzi; Secretario de actas, Ing. Quím. José Cruellas; Tesorero, Ing. Quím. Enrique Virasoro; Vocal 1º, Ing. José Babini; Vocal 2º, Prof. Rolando Hereñú; Vocal suplente 1º, Prof. Julio Salaber; Vocal suplente 2º, Ing. Quím. Guillermo Berraz; Encargado de Biblioteca y Canje, Ing. Quím. Rodolfo Rouzaut; Encargado de Publicaciones, Ing. José Babini.

SOCIOS ACTIVOS

Anadón, Leónidas
Ariotti, Juan Carlos
Babini, José
Benet, Pedro José
Berraz, Guillermo
Bertuzzi, Francisco A.
Bonazzola, César J.
Borruat, Luis (hijo)
Borzone, Rodolfo
Bossi, Celestino
Caballero, Martín A.
Camo, José María
Cerana, Miguel
Claus, Guillermo
Courault, Pablo
Crouzeilles, A. L. de
Cruellas, José
Christen, Carlos
Christen, Rodolfo G.
Damianovich, Horacio
Falco, Federico
Fester, Gustavo A.
Frenguelli, Joaquín
Gollán, Josué (h.).
Gschwind, Eduardo P.
Guinle, Hugo José
Hereñú, Rolando
Hotschewer, Curto
Juliá Tolrá, Antonio
Kleer, Gregorio
Mai, Carlos
Mántaras, Fernando
Marelli, Hipólito
Martino, Antonio E.
Montpellier, Luis Marcos
Mounier, Celestino
Muzzio, Enrique
Nigro, Angel
Niklison, Carlos A.
Oliva, José
Peresutti, Luis
Piazza, José
Piñero, Rodolfo
Pozzo, Hiram J.
Ragonese, Arturo E.
Reinares, Sergio
Rouzaut, Rodolfo
Salaber, Julio
Salgado, José
Santini, Bruno L. P.
Schivazappa, Mario
Simonutti, Atilio A.
Tissembaum, Mariano
Urondo, Francisco E.
Virasoro, Enrique

SECCION MENDOZA

COMISION DIRECTIVA

Presidente honorario, Ing. José S. Corti; Presidente, Dr. Juan B. Lara; Vicepresidente, Ing. Agr. José Raúl Ponce; Secretario, Ing. Agr. Julio Tolosa (h); Tesorero, Ing. Cayetano C. Piccione; Bibliotecario, Sr. Adrián Ruiz Leal; Vocales: Dr. Eduardo Carette; Dr. Mario Bidone; Ing. Alfredo Rosenthal; Sr. Manuel Tellechea; Ing. Agr. Rafael E. Pontis.

SOCIOS ACTIVOS

Alurralde, Juan Carlos
Anzorena, Jacinto
Anzorena, Pedro
Ayala Castagnino, G.
Basso, Germinal
Benegas, Raúl
Bidone, Mario
Borsani, Carlos Pablo
Burgoa, Pedro A.
Carette, Eduardo
Croce, Francisco M.
Espinosa, Norberto A.
Flor Alvarado, José M.
Gabrielli, Francisco J.
Galeano, Edgardo
García, José Federico
Godoy Vergelin, G.
Gomensoro, José N.
Granzella, Sinibaldo
Guiard, Ricardo
Jofré, Alberto L.
Lara, Juan B.
Lucero, Braulio G.
Lugones, Manuel G.
Magistretti, Guillermo
Maneschi, Ernesto
Maroso, José Angel
Maveroff, Aquiles
Mayorga, Santiago C.
Miyara, Salomón
Paganotto, Juan P.
Pelaia, Dante
Piccione, Cayetano C.
Ponce, José Raúl
Pontis, Rafael E.
Rosales, Ranulfo S.
Rosenthal, Alfredo
Ruiz, Aníbal
Ruiz Leal, Adrián
Silvestre, Tomás
Stura, Angel C.
Tellechea, Manuel
Tolosa, Julio (h)
Toso, Juan P.
Villanueva, Miguel Angel

SOCIOS CORRESPONDIENTES

Aguilar y Santillán, R.	México
Amaral, Afranio de	San Pablo (Br.)
Avendaño, Leónidas	Lima
Alvarez, Antenor	Sgo. del Estero
Bonarelli, Guido	Gubbio (It.)
Borel, Emile	París
Bachmann, Carlos J.	Lima
Bragg, William Henry	Londres
Bolívar, Ignacio	Madrid
Bruch, Carlos	Olivos (B. A.)
Cabrera, Blás	Madrid
Campos Porto, Pablo	Río de Janeiro
Carabajal, Melitón M.	Lima
Corti, José S.	Mendoza
Darmois Georges	París
Dávila, Rubén	Santiago (Ch.)
Dabbene, Roberto	La Plata
Escomel, Edmundo	Arequipa (P.)
Fiebrig, Carlos	Munich (Al.)
Fontecilla Larrain, Arturo	Santiago (Ch.)
Fort, Michel	Lima
González del Riego, Felipe	Lima
Greve, Germán	Santiago (Ch.)
Guinier, Philibert	Nancy (Fr.)
Hadamard, Jacques	París
Hauman, Luciano	Bruselas
Hernández, Juvenal	Santiago (Ch.)
Hijar y Haro, Luis	México
Janet, Pierre	París
Jiménez de Asúa, Luis	Madrid
Kinart, Fernando	Amberes
Lahille, Fernando	Tarn (Fr.)
Langevin, Paul	París
Levi Civita, Tulio	Roma
Lobo, Bruno	Río de Janeir
Lehmann Nitsche, Roberto	Berlín
Mardones, Francisco	Santiago (Ch.)
Molina, Enrique	Concepc. (Ch.)
Monjarás, Jesús E.	México
Moretti, Gaetano	Milán
Oliver Schneider, Carlos	Santiago (Ch.)
Pereira d'Andrade, Lencastre	Nova Goa (I. P
Perrin, Tomás G.	México
Porter, Carlos E.	Santiago (Ch.)
Pi y Suñer, Augusto	Barcelona
Reyes Cox, Eduardo	Santiago (Ch.)
Rospigliosi y Vigil, Carlos	Lima
Rowe, Leo S.	New York
Shepperd, William R.	Wáshington
Tello, Julio C.	Lima
Villarán, Manuel V.	Lima
Vélez, Daniel M.	México
Valle, Rafael H.	México
Vitoria, Eduardo	Barcelona
Volterra, Vito	Roma

ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

ADOPTADOS PARA SUS PUBLICACIONES POR LA

ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

DIRECTOR: EMILIO REBUELTO

MARZO 1938. — ENTREGA III. — TOMO CXXV

SUMARIO

BUENOS AIRES
CALLE SANTA FÉ 1145

1938

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

SOCIOS HONORARIOS

CONSEJO CIENTIFICO

JUNTA DIRECTIVA

(1937-1938)

ADVERTENCIA. — Los colaboradores de los Anales son personalmente responsables de la tesis sustentada en sus escritos. Tienen derecho a la corrección de dos pruebas. Los que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos, deben solicitarla por escrito. Los manuscritos, correspondencia, etc., se enviarán a la sede social, Santa Fe 1145.

Impreso en los Talleres Gráficos "TOMAS PALUMBO" - La Madrid 321-325 - Buenos Aires

SOBRE LAS INTEGRALES DOBLES DE GAUSS, DE DARBOUX, DE SCHWARZ Y DE POISSON

Por J. C. VIGNAUX

RÉSUMÉ

Dans la presente Note, l'anteur étudie des intégrales doubles analogues aux intégrales simples de Gauss, de Darboux, de Schwarz y de Poisson; et étend a cette dermière le théorème classique de Poissón y el de Schwarz.

1. Vamos a estudiar en la presente Nota algunas integrales dobles, análogas a las clásicas integrales simples, de Gauss de Darboux de Schwarz y de Poisson.

Sea,

$$w = f(z, z') = u + i v$$

una función holomorfa de las variables complejas

$$z = x + i y \quad , \quad z' = x' + i y' ,$$

cuando el punto z pertenece a un dominio D del plano z y el punto z' es del dominio D' del plano de la variable z'.

Las funciones reales u y v de las cuatro variables reales (x, y, x', y') satisfacen a las condiciones de Poincare

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y'^2} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial x'} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \, \partial y'} = 0 \quad , \quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y'} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} = 0 , \end{array} \right.$$

y las denomina funciones *biarmónicas* (1).

(1) H. Poincare. *Acta Math.* t. XXII, (1899).

2. *Integral doble de Gauss.* — Supongamos ahora, que los dominios D y D' sean dos círculos de centro O y O', radio R y R', y limitados por las circunferencias C y C', respectivamente. El valor de la función $f(z, z')$, en un punto cualquiera (ξ, ξ') de este *bicilindro*, está dado por la integral doble de Cauchy-Hartogs [1].

$$f(\xi, \xi') = \frac{-1}{4\pi^2}\int_c dz \int_{c'} \frac{f(z, z')}{(z-\xi)(z'-\xi')} dz',$$

siempre que $f(z, z')$, sea holomorfa en el interior y sobre el contorno (C, C').

El valor de $f(z, z')$, en el origen $(0, 0')$, es por tanto

$$f(0, 0') = u(0, 0') + i\,v(0, 0') =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_c dz . \int_{c'} \frac{u + i\,v}{z\,z'} dz'.$$

Haciendo,

$$z = R\,e^{i\theta}\quad,\quad z' = R'\,e^{i\theta'}\qquad \begin{pmatrix} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta' \leq 2\pi \end{pmatrix}$$

y separando la parte real, de la imaginaria; se obtiene

$$u(0, 0') = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\theta, \theta')\,d\theta\,d\theta'; \qquad [1]$$

por tanto: *dada una función biarmónica* $u(x, x', y, y')$ *en un bicilindro* (C, C'), *su valor en el centro* $(0, 0')$, *es la media doble, de sus valores sobre las circunferencias* C' *y* C.

La fórmula [1], es la extensión a las funciones biarmónicas de la fórmula de Gauss relativa a las funciones armónicas ordinarias.

3. *Integral doble de Darboux.* — Sea, $u(A, B)$ una función biarmónica en el bicírculo (C, C') antes definido; es decir A es un punto del círculo C y A' un punto del círculo C'. La función de $u(A', B)$ donde A' designa un punto *fijo* del contorno C, es una función ar-

(1) H. Picard. *Traité d' Analyse*, t. II, (1926).
M. Goursat. *Cours d'Analyse* T. (II y III) Paris.

mónica ordinaria en el círculo C' (*función armónica parcial*), por tanto, ella se puede expresar mediante la integral de DARBOUX [1].

$$u(A', B) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(A', \psi')\, d\psi'_1 \qquad [1]$$

La expresión [1] define a su vez, para todo punto B del círculo C' una función armónica en el círculo C, que coincide con la función dada (A, B); por tanto resulta

$$u(A, B) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\psi, B)\, d\psi_1 \qquad [2]$$

según la fórmula de DARBOUX.

La integral [1], se puede escribir también, en la forma,

$$u(\psi, B) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\psi, \psi')\, d\psi',$$

y por lo tanto la [2] resulta

$$u(A, B) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\psi, \psi')\, d\psi_1\, d\psi'_1, \qquad [3]$$

que es la fórmula buscada.

[1] Si $u(x, y)$ es una función armónica, su valor en un punto ξ interior de una circunferencia C, está dada por la fórmula

$$u(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\psi)\, d\psi' \qquad [a]$$

Esta integral la deduce M. DARBOUX, de la fórmula de GAUSS

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\psi)\, d\psi,$$

mediante una simple transformación geométrica; y de ella pasa a la integral de POISSON con recursos de geometría elemental. (*Un peu de géométrie à propos d' intégrale de* POISSON *Bulletin des Sc. Math.* 1910).

M. SCHWARZ obtiene en cambio dicha fórmula a partir de la fórmula de POISSON con un cambio de variables (*Journal de Crelle.* T. LXXIV. *Gesammeete Math Abhandlungen,* t. II). Véase *Leçons sur les principes de l' Analyse»* de R. D' ADEHMAR p. 237, t. II (1913).

Debemos también citar sobre este particular, los trabajos de BOCHER (*Bull. Amer. Math. Soc.* 1877-78) y *Annals of Math* (1906) y la *Tesis de* FATOU (*Acta Mathematique,* t. 30).

M. JULIA, utiliza frecuentemente la integral de DARBOUX (*Cahier Scientifique*).

4. *Integral doble de Poisson.* — Sea $U(A, B)$ una función biarmónica en el *bicilindro* de centro $(0, 0')$ y radio (R', R'), y consideremos la integral doble

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} U(A', B') \frac{R^2 - r^2}{\overline{AA'}^2} \frac{R'^2 - r'^2}{\overline{BB'}^2} d\psi\, d\psi', \qquad [1]$$

donde A' y B', son puntos de C y C' respectivamente, r y r' las distancias de los puntos A y B, a los centros 0 y $0'$.

La integral

$$\frac{R^2 - r^2}{\overline{AA'}^2} \int_0^{2\pi} U(A', B') \frac{R'^2 - r'^2}{\overline{BB'}^2} d\psi',$$

donde A', es un punto fijo del contorno, es igual, según la fórmula de Poisson, a

$$\frac{R^2 - r^2}{\overline{AA'}^2} \cdot 2\pi U(A', B),$$

con lo cual la [1], resulta:

$$I = 2\pi \int_0^{2\pi} U(A', B) \frac{R^2 - r^2}{\overline{AA'}^2} d\psi.$$

Aplicando nuevamente a esta última integral, la fórmula de Poisson, se tiene

$$I = (2\pi)^2 U(A, B),$$

de aquí, y de la [1], se tiene finalmente,

$$U(A, B) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} U(A', B') \frac{R^2 - r^2}{\overline{AA'}^2} \frac{R'^2 - r'^2}{\overline{BB'}^2} d\psi\, d\psi' \qquad [2]$$

integral doble, análoga a la integral simple de Poisson.

Esta fórmula, se puede escribir también, en otra forma utilizando, coordenadas polares.

Sean (r, φ) y (r', φ') las coordenadas polares de los puntos A y B, (R, ψ) y (R', ψ'), las coordenadas de los puntos A' y B' del contorno C y C'; se tiene según la figura

$$\overline{AA'}^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos(\varphi - \psi)$$

$$\overline{BB'}^2 = r'^2 + R'^2 - 2r'R'\cos(\varphi' - \psi')$$

valores que sustituídos en la [2] nos da

$$u(r,\varphi;r',\varphi') = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\psi,\psi')$$

$$\frac{(R^2 - r^2)}{r^2 - 2\,r\,R\cos(\varphi - \psi) + R^2} \cdot \frac{R'^2 - r'^2}{r'^2 - 2\,r'\,R'\cos(\varphi' - \psi') + R'^2}\, d\,\psi\, d\,\psi'$$

5. Se puede obtener también la fórmula de Poisson, en la forma siguiente.

Sea $f(x, y)$ una función integrable en el dominio $\{0,2\pi\,;\,0,2\,\pi\}$ y sea

$$0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r' < 1, \quad 0 \leq \theta' \leq 2\pi\,.$$

Consideremos la integral doble [1]

$$f(r,\,\theta;\,r',\,\theta') =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int^{2\pi} f(\alpha,\alpha')\, R\left[\frac{1}{1 - r\,e^{i(\alpha-\theta)}} - \frac{1}{2}\right] R\left[\frac{1}{1 - r'\,e^{i(\alpha'-\theta')}} - \frac{1}{2}\right];$$

se tiene

$$R\left[\frac{1}{1 - r\,e^{i(\alpha-\theta)}} - \frac{1}{2}\right] = R\left[\frac{1 - r\,e^{i(\alpha-\theta)}}{(1 - r\,e^{i(\alpha-\theta)})^2} - \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{R\,(1 - r\,e^{i(\alpha-\theta)})}{|\,1 - r\,e^{i(\alpha-\theta)}\,|^2} - \frac{1}{2}$$

y como

$$1 - r\,e^{i(\alpha-\theta)} = 1 - r\cos(\alpha - \theta) - r\,i\,\mathrm{sen}\,(\alpha - \theta)\,.$$

de donde

$$|\,1 - r\,e^{i(\alpha-\theta)}\,|^2 = (1 - r\cos(\alpha - \theta))^2 + r^2\,\mathrm{sen}^2\,(\alpha - \theta)$$

$$= 1 - 2r\cos(\alpha - \theta) + r^2\,;$$

y

$$R\,(1 - r\,e^{i(\alpha-\theta)}) = 1 - r\cos(\alpha - \theta)$$

[1] $R(t)$ indica la parte *real* del complejo t.

resulta

$$R\left[\frac{1}{1 - r\, e^{i(\alpha - \theta)}} - \frac{1}{2}\right] = \frac{1 - r\cos(\alpha - \theta)}{1 - 2r\cos(\alpha - \theta + r^2} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1 - r^2}{2\,(1 - 2r\cos(\alpha - \theta) + r^2}\,.$$

Del mismo modo, se tiene

$$R\left[\frac{1}{1 - r'\, e^{i(\alpha' - \theta')}} - \frac{1}{2}\right] = \frac{1 - r'^2}{2\,(1 - 2\,r'\cos(\alpha' - \theta') + r'^2},$$

y substituyendo en la [1] estos valores, nos da

$$f(r, \theta\,; r', \theta') = \frac{1}{4\,\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha, \alpha')\,\frac{1 - r^2}{1 - 2\,r\cos(\alpha - \theta) + r^2}$$

$$\frac{1 - r'^2}{1 - 2\,r'\cos(\alpha' - \theta') + r'^2}\,d\alpha\,d\alpha'$$

que es la fórmula de Poisson.

6. También se puede llegar a la integral doble de Poisson partiendo de la integral doble de Cauchy-Hartog

$$f(\xi, \xi') = \frac{1}{(2\,\pi\, i)^2}\int_c dz \int_{c'} \frac{f(z, z')}{(z - \xi)\,(z' - \xi')}\,dz'$$

extendida sobre las dos circunferencias C, C'.

En otro lugar, obtenemos la integral doble de Poisson aplicando el método de Abel-Borel a la serie doble de Fourier (1).

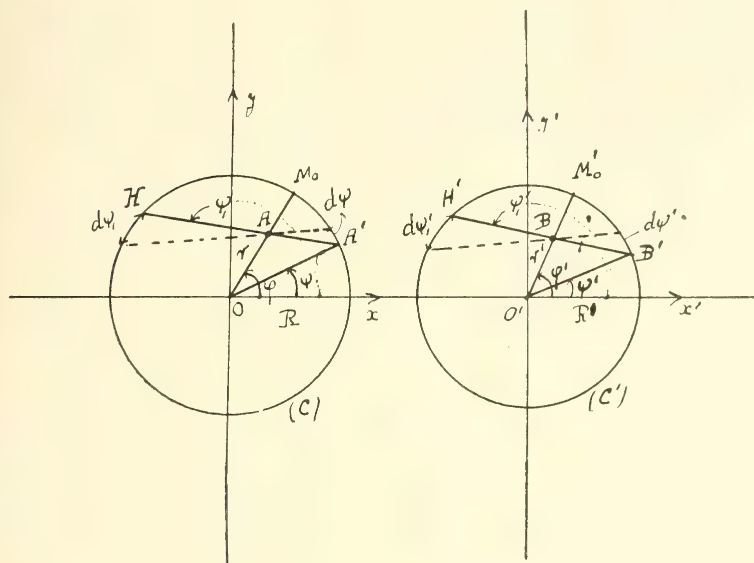
De la integral doble de Poisson, se puede deducir la integral doble de Darboux utilizando propiedades geométricas elementales.

En efecto; sean H y H' los puntos de intercepción de las rectas AA' y BB', respectivamente con las circunferencias C y C', y llamemos

(1) «*Sobre el método de Abel-Borel para las series doble y su aplicación a la serie de Fourier*». Contribución al Estudio ..... V. I. E. 3 1937. p. 411 La Plata.

con ψ_1 y ψ_1' las abscisas curvilíneas de estos puntos. Por los puntos A y B, trazemos las cuerdas m y m' *infinitamente próximos*, a las anteriores. Poniendo

$$\overline{A\,A'} = l \quad , \quad \overline{A\,H} = l_1 \quad , \quad \overline{B\,B'} = l' \quad , \quad \overline{B\,H'} = l_1'$$



resulta, de los dos triángulo formados

$$l\,l_1 = 1 - r^2 \quad , \quad \frac{d\,\psi}{l} = \frac{d\,\psi_1}{l_1} \, ,$$

$$l^2 = R^2 - 2\,r\,R\cos(\varphi - \psi) + r^2 \; ;$$

$$l'\,l'_1 = 1 - r'^2 \quad , \quad \frac{d\,\psi'}{l'} = \frac{d\,\psi_1'}{l_1'} \, ,$$

$$l'^2 = R'^2 - 2\,r'\,R'\cos(\varphi' - \psi') + r'^2 \; ;$$

valores que sustituídos en la fórmula [2′] del número anterior resulta la integral doble de Darboux

$$u\,(r\,,\varphi\,;r'\,,\varphi') = \frac{1}{4\,\pi^2}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi}\frac{l\,l_1\,.\,l'\,l'_1}{l^2\,.\,l'^2}\cdot\frac{l}{l_1}\cdot\frac{l'}{l_1'}\,u\,(\psi\,.\,\psi')\,d\,\psi'\,d\,\psi'_1$$

$$= \frac{1}{4\,\pi^2}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} u\,(\psi\,,\psi')\,d\,\psi'\,d\,\psi_1' \, .$$

Igualmente de esta última, se puede deducir la integral doble de POISSON, con transformaciones geométricas simples.

7. Daremos ahora un teorema relativo a la integral doble de POISSON, análogo al clásico teorema de POISSON para las integrales simples.

Teorema. — Sea $f(\psi, \psi')$ una función continua en el dominio $(0,2\pi)$, $(0,2\pi)$, $A(r, \varphi)$ y $B(r', \varphi')$, dos puntos interiores a las circunferencias C y C' de radios 1 y centros en O y O' respectivamente; $M_0(1, \varphi)$ y $M_0'(1, \varphi')$ dos puntos fijos cualquiera de C y C'; la integral doble de POISSON correspondiente a la función $f(\psi, \psi')$ es

$$F(r,\varphi;r',\varphi') = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi,\psi') \,.\, M(r,\varphi)\, M'(r',\varphi')\, d\psi\, d\psi'$$

donde

$$M(r,\varphi) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\psi)+r^2}, \quad \frac{1-r'^2}{1-2r'\cos(\varphi'-\psi')+r'^2} = M'(r',\varphi')$$

Nos proponemos determinar el límite doble de $F(r,\varphi;r',\varphi')$ cuando estos puntos A y B tienden *simultánea e independientemente* a los puntos M_0 y M'_0 de las circunferencias C y C' según sus radios OA y OB respectivos.

La integral doble F, podemos escribir en la forma

$$F = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}[f(\varphi,\varphi')+f(\psi,\psi')-f(\varphi,\varphi')]\, M(r,\varphi) . M'(r',\varphi')\, d\psi\, d\psi'$$

y como

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi,\varphi')\, M(r)\, M'(r')\, d\psi\, d\psi' = f(\varphi,\varphi')\int_0^{2\pi} M(r)\, d\psi . \int_0^{2\pi} M'(r')\, d\psi$$

$$= f(\varphi,\varphi') \,.\, 4\pi^2\,,$$

puesto que cada integral simple vale 2π, cuando $(r < 1, r' < 1)$,

se tiene

$$F = f(\varphi,\varphi') + \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2}\int_0^{2\pi}[f(\psi,\psi')-f(\varphi,\varphi')]\, M(r)\, M'(r')\, d\psi\, d\psi' \quad [1]$$

La integral doble que figura en el segundo miembro tiene por límite cero cuando $(r, r') \longrightarrow 1$. En efecto; de la continuidad de la

$f(\psi, \psi')$ sobre el contorno (C, C'), fijado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, se pueden determinar dos números positivos δ y δ' tal que

$$| f(\psi, \psi') - f(\varphi, \varphi') | < \varepsilon$$

para todos los puntos $(1, \psi)$ del arco de centro $(1, \varphi)$ y amplitud δ y todos los puntos $(1, \psi')$ de arco de centro $(1, \varphi')$ y amplitud δ'; y esto cualquiera sea la posición de M_0 sobre C y de M'_0 sobre C'. Fijados de este modo los números δ y δ', supongámolos constantes.

Sea s el arco de longitud $2\,\delta$ y S el resto de la circunferencia C, s' el :rco de longitud $2\,\delta'$ y S' el resto de la circunferencia C'; podemos descomponer la integral en la forma.

$$\int_C \int_{C'} = \int_s \int_{s'} + \int_S \int_{S'} + \int_s \int_{S'} + \int_S \int_{s'}$$

La primera integral del segundo miembro nos da tomando módulo

$$\left| \frac{1}{4\,\pi^2} \int_s \int_{s'} [f(\psi, \psi') - f(\varphi, \varphi')]\, M(r)\, M'(r')\, d\psi\, d\psi' \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{4\,\pi^2} \,.\, \varepsilon\, 2\,\pi \,.\, 2\,\pi = \varepsilon \,.$$

Sobre los arcos S y S' se verifica

$$1 - 2\,r \cos(\psi - \varphi) + r^2 > 2\,r - 2\,r \cos \delta = 2\,r\,(1 - \cos \delta)$$

$$1 - 2\,r' \cos(\psi' - \varphi') + r'^2 > 2\,r' - 2\,r' \cos \delta' = 2\,r'\,(1 - \cos \delta')$$

y si ponemos

$$M = \text{máx}\, | f(\psi, \psi') |, \quad \text{sobre } (C, C')$$

resulta

$$| f(\psi, \psi') - f(\varphi, \varphi') | < 2\,M$$

para todo punto $(1, \psi)$ de C y $(1, \psi')$ de C'.

De aquí se deduce que

$$\left| \frac{1}{4\,\pi^2} \int_S \int_{S'} [f(\psi\,,\,\psi') - f(\varphi\,,\,\varphi')]\, M(r)\, M(r')\, d\,\psi\, d\,\psi' \right| \leq$$

$$\leq \frac{2\,M}{4\,\pi^2} \, \frac{1 - r^2}{2\,r'\,(1 - \cos\delta')} \cdot \frac{1 - r'^2}{2\,r\,(1 - \cos\delta')}\, 2\,\pi\,.\,2\,\pi =$$

$$= \frac{M\,(1 - r^2)\,(1 - r'^2)}{2\,r\,(1 - \cos\delta)\,r'\,(1 - \cos\delta')}$$

expresión que tiende a cero cuando $(r\,,\,r') \longrightarrow 1$.

La tercer integral doble nos da

$$\left| \frac{1}{4\,\pi^2} \int_s \int_{S'} [f(\psi\,,\,\psi') - f(\varphi\,,\,\varphi')]\, M(r)\, M'(r')\, d\,\psi\, d\,\psi' \right| \leq$$

$$\frac{2\,M}{4\,\pi^2} \int_s |\, M(r)\, d\,\psi\,| \,.\, \int_{S'} |\, M'(r')\, d\,\psi'\,| \leq$$

$$\leq \frac{2\,M}{4\,\pi^2}\,.\,\pi\, \frac{1 - r'^2}{r'\,(1 - \cos\delta')} = \frac{M\,(1 - r'^2)}{2\,\pi\,(1 - \cos\delta')\,r'}$$

y ella tiende a cero para $r' \longrightarrow 1$.

Igualmente resulta:

$$\left| \frac{1}{4\,\pi^2} \int_S \int_{s'} [f(\psi\,,\,\psi') - f(\varphi\,,\,\varphi')]\, M(r)\, M'(r')\, d\,\psi\, d\,\psi') \right| \leq$$

$$= \frac{M}{2\,\pi}\, \frac{1 - r^2}{(1 - \cos\delta)\,r}$$

la cual tiende a cero para $r \longrightarrow 1$.

Según esto se concluye inmediatamente que la integral doble

$$\int_c \int_{c'} [f(\psi\,,\,\psi') - f(\varphi\,,\,\varphi')]\, M(r)\, M'(r')\, d\,\psi\, d\,\psi'$$

tiende a cero, cuando r y $r' \longrightarrow 1$; por tanto, según la [1] resulta

$$\lim_{r\,,\,r' \to 1} F(r\,,\,\varphi\,;\,r'\,,\,\varphi') = f(\psi\,,\,\psi')\,.$$

que constituye la extensión del teorema Poisson a la integral doble.

Una extensión análoga del teorema de SCHWARZ ha dado GEIRINGER, (*Monatshefte f. Math. in. Physik*), V. XXIX (1918).

A este resultado se llega también en el estudio de las *integrales dobles singulares a núcleo positivo*, que reservamos para otra Nota.

8. La integral doble de Poisson está intimamente ligada a la serie doble de Fourier. Vamos a expresar, en efecto la integral doble de Poisson en una serie doble de Fourier.

Se tiene

$$R\left[\frac{1}{1-r\,e^{i(\alpha-\theta)}}\right] = R\left[\sum_{0}^{\infty} r^n\,e^{i\,n\,(\alpha-\theta)}\right] = \sum_{0}^{\infty} r^n \cos n\,(\alpha-\theta)$$

y para $0 \leq r < 1$ fijo, esta serie converge absoluta y uniformemente respecto de α. Del mismo modo

$$R\left[\frac{1}{1-r'\,e^{i(\alpha'-\theta')}}\right] = \sum_{0}^{\infty} r'^m \cos m\,(\alpha'-\theta')\,.$$

para

$$0 \leq r' < 1\,.$$

Substituyendo estos valores en la integral doble

$$f(r,\,\theta;\,r',\,\theta') = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha,\beta)\,R\left[\frac{1}{1-r\,e^{i(\alpha-\theta)}}-\frac{1}{2}\right] R\left[\frac{1}{1-r'\,e^{i(\alpha'-\theta')}}-\frac{1}{2}\right] d\alpha\,d\beta$$

considerada en el número (5), resulta

$$f(r,\,\theta;\,r',\,\theta') = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha,\beta')\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos n\,(\alpha-\theta)\right] \left[\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty} r'^m\cos m\,(\alpha'-\theta')\right] d\alpha\,d\beta\,.$$

Además, se tiene

$$\left[\frac{1}{2} + \sum_1^\infty r^n \cos n(\alpha - \theta)\right]\left[\frac{1}{2} + \sum_1^\infty r'^m \cos m(\alpha' - \theta')\right] =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sum_1^\infty r^n \cos n(\alpha - \theta) + \frac{1}{2}\sum_1^\infty r'^m \cos m(\alpha' - \theta') +$$

$$+ \sum_{m=1}^\infty \sum_{m=1}^\infty r^n r'^m \cos n(\alpha - \theta) \cos m(\alpha' - \theta')$$

y las series que resultan son absolutamente convergentes; por tanto, se tiene

$$f(r, \theta; r', \theta') = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha, \alpha')\, d\alpha\, d\alpha' +$$

$$+ \sum_1^\infty r^n \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha, \alpha') \cos n(\alpha - \theta)\, d\alpha\, d\alpha' +$$

$$+ \sum_1^\infty r'^m \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha, \alpha') \cos m(\alpha' - \theta')\, d\alpha\, d\alpha' +$$

$$+ \sum_1^\infty \sum_1^\infty r^n r'^m \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha, \alpha') \cos n(\alpha - \theta) \cos m(\alpha' - \theta')\, d\alpha\, d\alpha'$$

Es decir, la serie doble de Fourier

$$f(r, \theta; r', \theta') = \sum_{m=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty B_{n,m}(\theta, \theta') \,.\, r^n r'^m \qquad (1)$$

donde

$$B_{o,o} = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (\alpha, \alpha')\, d\alpha\, d\rho'.$$

$$B_{n,o} = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha, \alpha') \cos n(\alpha - \theta)\, d\alpha\, d\alpha'$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

$$B_{o,m} = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha, \alpha') \cos m(\alpha' - \theta')\, d\alpha\, d\alpha'$$

$$(m = 1, 2, \ldots)$$

$$B_{n,m} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha, \alpha') \cos n(\alpha - \theta) \cos m(\alpha' - \theta')\, d\alpha\, d\alpha'$$

$$\begin{pmatrix} n = 1, 2, \ldots \\ m = 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$$

La fórmula (1) es válida en todo punto interior del sistema de círculos de radios uno. Si la serie doble de Fourier de la función $f(\alpha,\alpha')$ es convergente acotadamente para un valor de α y de α', la igualdad subsiste para $r = 1$, $\theta = \alpha$, $r' = 1$, $\theta' = \alpha'$.

En efecto, hemos visto que

$$\lim_{r,\, r' \to 1} F = f(\theta, \theta') ,$$

mientras que según el teorema de Hardy-Bronwich [1], el límite de la serie doble para $(r, r') \to 1$

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty B_{n,m}\, r^n \, . \, r'^m ,$$

es igual a la suma de la serie doble que se obtiene poniendo: $r = r' = 1$, $\theta = \alpha$, $\theta' = \alpha'$.

En su Tesis, M. W. Küstermann [2] deduce inversamente la integral doble de Poisson de la serie doble de Fourier y prueba la extensión del teorema de Schwarz.

9. En una memoria en curso de publicación, sobre la sumabilidad de la serie doble de Fourier y de la serie doble de Dirichlet con el método de sumación de Poisson, que hemos estudiado en otro lugar, se prueban, la extensión delos teoremas de Poisson y de Schwartz antes considerados, tomando el doble límite *no radialmente*, sinó *por caminos de Stolz.*

También será motivo de otra Nota, el estudio de la integral doble de Poisson-Stieljes análoga a la integral simple de Poisson-Stieljes

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - \varphi)}\, d\sigma(\theta) .$$

Estas últimas han sido recientemente motivo de interesantes investigaciones.

(1) *Proc. Lond. Math. Soc.* (1903).
(2) W. Küstermann, *Inaugural-Dissertation* (1913).

Febrero 1 de 1936, Buenos Aires.

SOBRE LOS DESARROLLOS EN SERIE DE POLINOMIOS ORTOGONALES DE VARIAS VARIABLES CUMPLIENDO LA CONDICION DE CONVERGENCIA EN MEDIA (*)

POR

FERNANDO L. GASPAR
Instituto de Estadística - Facultad de Ciencias Económicas
Universidad Nacional del Litoral

RÉSUMÉ

On efectue le développement d'une fonction $f(x, y)$ de carré integrable, dans le domaine D dans lequel elle est défini, en série de polynomes orthogonaux de deux variables.

Les polynomes, sont orthogonaux avec une fonction de pondération qui, dans le domaine D, est toujours positive.

Le domaine, dans ce cas, peut être fini ou infini.

Les coefficients du développement se calculent de telle manière que, l'erreur intégrale quadratique, soit minime et cette condition est celle que l'on nomme de convergence en moyenne, ce qui, en aucun cas, signifie une convergence ponctuelle.

On considère l'extension pour le cas de n variables ($n > 2$).

1. En un trabajo recientemente publicado (1) hemos definido un sistema $\{W_{r,s}(x, y)\}$ de polinomios de dos variables que, en

(*) En una próxima publicación, nos proponemos hacer una exposición, orgánica y de conjunto, sobre la teoría de la ortogonalidad en varias variables que, en notas separadas, venimos desarrollando, la que completaremos tratando cuestiones importantes que aun no han sido consideradas y desarrollando otras que, apenas, hemos dejado esbozadas en lo publicado.

Dicha exposición abarcará el caso ponderado y el sin ponderar. Mostraremos, en ella, cómo nuestra concepción de estas funciones, como funciones de los momentos y su definición por determinantes, es de una generalidad tal que permite abordarlas en el campo continuo y también en el discontinuo, de tanta importancia en las aplicaciones prácticas, lo que, por los métodos clásicos, no es posible. Agregaremos una bibliografía completa, sobre la materia, a partir de HERMITE y sus continuadores, en forma que permita apreciar el pequeño aporte que, con nuestro modesto esfuerzo, está en nuestra intención procurar a esta rama del análisis.

F. L. G.

(1) GASPAR F. L., *La ortogonalidad sin ponderación. El problema de Hermite*, en « Anales de la Soc. Cient. Arg. », Septiembre de 1937, E. III, T. CXXIV, Págs. 176-193.

un dominio finito D, cumplen la siguiente condición de ortogonalidad:

$$\iint_D W_{r,s}(x, y)\, W_{m,n}(x, y)\, dx\, dy = \varepsilon_{r,s/m,n}$$

Siendo el sistema $\{W_{r,s}(x, y)\}$ ortogonal y normal, con el símbolo $\varepsilon_{r,s/m,n}$ se expresa

$$\varepsilon_{r,s/m,n} \begin{cases} = 0 & r, s \neq m, n \\ = 1 & r, s = m, n \end{cases}$$

es decir, que la integral se anula cuando cualquiera de los dos subíndices, o ambos, son diferentes.

La definida, es la condición de ortogonalidad estricta o sin ponderación.

Si se desarrolla una función $f(x, y)$, de cuadrado integrable en D, en serie de $W_{r,s}(x, y)$, se tiene:

$$f(x, y) \cong C_{0,0} W_{0,0}(x, y) + C_{1,0} W_{1,0}(x, y) + \ldots + C_{m,n} W_{m,n}(x, y) + \ldots$$

La sucesión $\{C_{r,s}\}$ es la de los coeficientes de Fourier de $f(x, y)$ respecto del sistema $\{W_{r,s}(x, y)\}$ coeficientes que, como se sabe, hacían mínimo el error integral cuadrático

$$\iint_D [f(x, y) - S_{m,n}(x, y)]^2\, dx\, dy$$

donde

$$S_{m,n}(x, y) = C_{0,0} W_{0,0}(x, y) + C_{1,0} W_{1,0}(x, y) + \ldots + C_{m,n} W_{m,n}(x, y)$$

En este caso, la sucesión $\{S_{m,n}(x, y)\}$ converge, en media, hacia $f(x, y)$.

2. En el caso de ortogonalidad ponderada, una sucesión de polinomios $\{\lambda_{r,s}(x, y)\}$ forman un sistema ortogonal y normal respecto de una función $F(x, y)$ definida en un dominio, que puede ser finito o infinito, si se verifica:

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} F(x, y)\, \lambda_{r,s}(x, y)\, \lambda_{m,n}(x, y)\, dx\, dy = \varepsilon_{r,s/m,n}$$

Si el dominio fuera finito, la función $F(x, y)$ se consideraría nula fuera del contorno que lo limita y debe ser $F(x, y) > 0$, en dicho dominio.

En otro trabajo (1) hemos definido los polinomios $\lambda_{r,s}(x, y)$ ortogonales respecto de la función de Bravais, que designamos por $B(x, y)$ y hemos desarrollado una función de dos variables $f(x, y)$ en serie de dichos polinomios, con la función de Bravais, como función de primera aproximación, de la siguiente manera:

$$f(x, y) \cong B(x, y)\,[\Omega_{0,0}\lambda_{0,0}(x, y) + \Omega_{1,0}\lambda_{1,0}(x, y) + \\ + \Omega_{0,1}\lambda_{0,1}(x,y) + \Omega_{2,0}\lambda_{2,0}(x, y) + \ldots + \Omega_{r,s}\lambda_{r,s}(x, y) + \ldots] \qquad [1]$$

Siendo el sistema $\{\lambda_{r,s}(x, y)\}$ ortogonal y normal, los coeficientes $\Omega_{r,s}$ están definidos así:

$$\Omega_{r,s} = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\lambda_{r,s}(x, y)\,dx\,dy \qquad [2]$$

lo que resulta, por la propiedad de ortogonalidad de dichos polinomios, multiplicando ambos miembros de la fórmula [1] por $\lambda_{r,s}(x, y)$ e integrando.

Al ser

$$S_{m,n}(x, y) = B(x, y)\,[\Omega_{0,0}\lambda_{0,0}(x, y) + \\ + \Omega_{1,0}\lambda_{1,0}(x, y) + \ldots + \Omega_{m,n}\lambda_{m,n}(x, y)]$$

los coeficientes $\Omega_{r,s}$ calculados según la fórmula [2] no hacen mínimo el error integral cuadrático

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} [f(x, y) - S_{m,n}(x, y)]^2\,dx\,dy$$

(1) GASPAR, F. L., *Sobre los polinomios ortogonales a dos variables y generalización de la superficie de Bravais*, en « Anales de la Soc. Cient. Arg. », Febrero 1936, E. II, T. CXXI, págs. 74-96.

Dichos coeficientes hacen, en cambio, mínimo el error dado por la siguiente fórmula:

$$\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{f(x,y)}{\sqrt{B(x,y)}} - \sqrt{B(x,y)}\,[\Omega_{0,0}\,\lambda_{0,0}(x,y) + \right.$$
$$\left. + \ldots + \Omega_{m,n}\,\lambda_{m,n}(x,y)] \right\}^2 dx\,dy$$

la que, al ser la función de Bravais, en su forma reducida:

$$B(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\, e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}(x^2-2rxy+y^2)}$$

también puede ser escrita así:

$$2\pi\sqrt{1-r^2}\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{2(1-r^2)}(x^2-2rxy+y^2)}\,[f(x,y) - S_{m,n}(x,y)]^2\,dx\,dy$$

y esto no es otra cosa que la expresión del error integral cuadrático con el factor de ponderación

$$\frac{1}{B(x,y)} = 2\pi\sqrt{1-r^2}\; e^{\frac{1}{2(1-r^2)}(x^2-2rxy+y^2)}$$

Como $e^{\frac{1}{2(1-r^2)}(x^2-2rxy+y^2)}$ es creciente, resulta que, en esta medida del error, influyen preponderantemente los valores más alejados del origen.

3. Con el objeto de definir una función de dos variables $f(x,y)$ en serie de $\lambda_{r,s}(x,y)$, de manera tal, que sus coeficientes minimen el error integral cuadrático, con respecto a ese mismo desarrollo, lo hacemos así:

$$f(x,y) \cong \sqrt{B(x,y)}\,[\gamma_{0,0}\,\lambda_{0,0}(x,y) + \gamma_{1,0}\,\lambda_{1,0}(x,y) + \\ + \ldots + \gamma_{r,s}\,\lambda_{r,s}(x,y) + \ldots] \qquad [3]$$

Ahora, para calcular un coeficiente $\gamma_{r,s}$, se multiplican ambos miembros de la expresión anterior por $\sqrt{B(x,y)}\,\lambda_{r,s}(x,y)$, y se integra.

Al ser el sistema $\{\lambda_{r,s}(x,y)\}$ ortogonal y normal, respecto de $B(x,y)$, resulta:

$$\gamma_{r,s} = \int\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\sqrt{B(x,y)}\,\lambda_{r,s}(x,y)\,dx\,dy \qquad [4]$$

Siendo

$$\sigma_{m,n}(x,y) = \sqrt{B(x,y)}\,[\gamma_{0,0}\lambda_{0,0}(x,y) + \dots + \gamma_{m,n}\lambda_{m,n}(x,y)]$$

los coeficientes $\gamma_{r,s}$, calculados en la forma indicada, hacen mínimo el error

$$\delta_{m,n} = \int\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x,y) - \sigma_{m,n}(x,y)]^2\,dx\,dy \qquad [5]$$

4. $\delta_{m,n}$ es función de los coeficientes γ, y para que la condición de mínimo se cumpla, deberá verificarse:

$$\frac{\partial\,\delta_{m,n}}{\partial\,\gamma_{0,0}} = \frac{\partial\,\delta_{m,n}}{\partial\,\gamma_{1,0}} = \dots = \frac{\partial\,\delta_{m,n}}{\partial\,\gamma_{m,n}} = 0$$

En efecto, ejecutada la derivación para un $\gamma_{r,s}$ genérico, debe ser

$$\frac{\partial\,\delta_{m,n}}{\partial\,\gamma_{r,s}} = \int\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x,y) - \sigma_{m,n}(x,y)]\sqrt{B(x,y)}\,\lambda_{r,s}(x,y)\,dx\,dy = 0$$

Separando integrales y teniendo en cuenta la propiedad de ortogonalidad de los $\lambda_{r,s}(x,y)$ resulta

$$\int\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\sqrt{B(x,y)}\,\lambda_{r,s}(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \gamma_{r,s}\int\int_{-\infty}^{+\infty} B(x,y)\,\lambda^2_{r,s}(x,y)\,dx\,dy$$

Siendo el sistema $\{\lambda_{r,s}(x, y)\}$ ortogonal y normal, respecto de $B(x, y)$, la integral que figura en el segundo miembro, vale la unidad, es decir, se ha recaído en la fórmula [4], que define a dichos coeficientes.

Ahora sí, la condición de mínimo que expresa $\delta_{m,n}$ y define la fórmula [5] permite decir que la sucesión $\{\sigma_{m,n}(x, y)\}$ converge, en media, hacia $f(x, y)$, lo que en forma alguna significa una convergencia puntual.

5. Si hacemos

$$\Phi_{r,s}(x, y) = \sqrt{B(x, y)}\ \lambda_{r,s}(x, y)$$

el desarrollo dado por la fórmula [3] toma esta forma

$$f(x, y) \cong \gamma_{0,0}\,\Phi_{0,0}(x, y) + \dots + \gamma_{r,s}\,\Phi_{r,s}(x, y) + \dots$$

donde

$$\gamma_{r,s} = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\Phi_{r,s}(x, y)\,dx\,dy$$

es decir, que la sucesión $\{\gamma_{r,s}\}$ es la de los coeficientes de Fourier de $f(x, y)$ respecto del sistema $\{\Phi_{r,s}(x, y)\}$ siendo

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{r,s}(x, y)\,\Phi_{m,n}(x, y)\,dx\,dy = \varepsilon_{r,s/m,n}$$

El sistema de funciones (no ya de polinomios) $\{\Phi_{r,s}(x, y)\}$ es ortogonal y normal, en sentido estricto.

6. La extensión para el caso de n variables ($n > 2$), no ofrece dificultad alguna: si $\{W_{r,s,\dots,t}(x, y, \dots, z)\}$ es un sistema de polinomios, ortogonal y normal respecto de una función $F(x, y, \dots, z)$, definida en un dominio D, finito o infinito, en todo punto del cual

es $F(x, y, \ldots z) > 0$, el desarrollo de una función $f(x, y, \ldots, z)$, de cuadrado integrable en D, será de esta forma:

$$f(x, y, \ldots, z) \cong \sqrt{F(x, y, \ldots, z)} \sum_r \sum_s \cdots \sum_t A_{r, s, \ldots, t} W_{r, s, \ldots, t}(x, y, \ldots, z)$$

donde poniendo:

$$\Phi_{r, s, \ldots, t}(x, y, \ldots, z) = \sqrt{F(x, y, \ldots, z)}\, W_{r, s, \ldots, t}(x, y, \ldots z)$$

las constantes $A_{r, s, \ldots, t}$ son los coeficientes de Fourier de $f(x, y, \ldots z)$ respecto del sistema $\{ \Phi_{r, s, \ldots, t}(x, y, \ldots, z) \}$.

7. El método es de aplicación, inmediata, para la definición analítica de las superficies de frecuencias experimentales (1) dentro de nuestro concepto de la función de primera aproximación, como una función de probabilidad de dos variables, en relación estocástica.

(1) Gaspar, F. L., *La función de primera aproximación y la definición analítica de las superficies de frecuencias experimentales*, en « Anales de la Sociedad Científica Argentina », Enero de 1937, E. I, T. CXXIII, págs. 39-46.

LOS POTENCIALES DE EXCITACION DEL ATOMO DE Kr

Por ERNESTO SABATO

Las investigaciones realizadas hasta el presente. — Por métodos eléctricos, pocos trabajos han sido llevados a cabo.

En 1923, H. Sponer (1) investiga el recorrido de electrones a través de los gases nobles y encuentra, mediante el método de Hertz, curvas que para el Kr ofrecen máximos en 8.4 y 9.6 volts, hallando como potencial de ionización un valor que oscila entre 12 y 13 volts.

Simultáneamente, Dejardin (2) encuentra por el método de choque un punto crítico que atribuye a una línea de resonancia para 9.8 volts, un primer potencial de ionización para 12.7 y un segundo para 28.2 volts.

Por fin, G. Hertz y Kloppers (3) encuentran como potenciales de excitación los valores 9.9, 10.5, 11.5 y 12.1. Como potencial de ionización obtiene el valor 123.

La investigación espectroscópica es mucho más amplia y completa, comenzando con el trabajo de Ramsay y Travers (4). Modernamente, los trabajos más sistemáticos se deben a Meggers y sus colaboradores del Bureau of Standars. En 1929 presentan (5) un análisis completo y una reseña de todo lo concerniente al primer espectro del Kr, complementándola en 1931 y 1933 (6) con nuevas contribuciones a la clasificación de las series y dando una tabla de todos los términos identificados hasta ese momento. Además calculan como potencial de ionización el valor 13.93 volts.

Particularmente interesantes para nuestros fines son las investigaciones realizadas en el ultravioleta lejano. El primer trabajo im-

(1) Sponer: *Zeit. f. Phy.*, 1923, 81, 249.
(2) Dejardin: *Comp. Rend.*, 1923, 176, 894.
(3) Hertz y Kloppers: *Zeit. f. Phy.*, 1925, 31, 463.
(4) Ramsay y Travers: *Proc. Roy. Soc.*, 1898, 63, 405.
(5) Meggers, De bruin y Humphreys: *B. of St.*, 1929, 3, 129.
(6) Meggers, De Bruin y Humphreys: *B. of St.*, 1931, 7, 643.
(7) Meggers y Humphreys: *B. of St.*, 1933, 10, 427.

portante es el de G. Hertz y Abbink [8], quienes encuentran dos líneas de resonancia de longitudes 1235.8 A y 1164.9 A; los potenciales correspondientes son 9.99 y 10.60 respectivamente, en buen acuerdo con los obtenidos eléctricamente por Hertz y Kloppers.

En 1926, Taylor encuentra [9] las siguientes líneas:

1235.87
1164.90
1074.52
1067.11
1051.97
1041.38
1003.46

En 1928, Dorgelo y Abbink [10] encuentran las siguientes:

1235.85
1164.90
1134.89
1134.15
1003.54
1001.09
963.36
953.42
945.43

y considera que las líneas

1074.52
1067.11
1051.97
1041.38

atribuídas al Kr por Taylor pertenecen en realidad al X. Finalmente calcula para el potencial de ionización el valor 13.9 volts.

El último trabajo que conocemos es el de Beutler [11], quien estudia el espectro de absorción de los gases nobles en el ultravioleta lejano.

[8] Hertz y Abbink: *Naturw.*, 1926, 14, 648.
[9] Taylor: *Proc. Nat. Acad. Am.*, 1926, 12, 658.
[10] Dorgelo y Abbink: *Zeit. f. Phy.*, 1928, 47, 221.
[11] Beutler: *Zeit. f. Phy.*, 1935, 93, 177.

En este trabajo, Beutler encuentra, para las series de absorción del ultravioleta lejano, los límites

885.63 *A*

y 845.41 *A*

o en volts

13.93

y 14.59

que corresponden al nivel fundamental del Kr II, constituído por los términos

$^2P_{1/2}$ y $^2P_{3/2}$

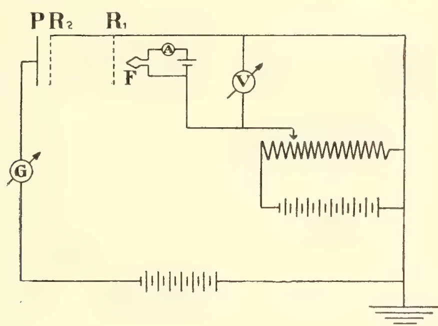


Fig. 1

Instalación y métodos empleados por nosotros. — La investigación ha sido llevada a cabo mediante los dos métodos eléctricos conocidos:

1° El método directo de Franck y Hertz.

2° El método fotoeléctrico.

La instalación utilizada está esquematizada en la figura adjunta. Los electrones son arrancados del filamento *F* que es puesto incandescente mediante corriente eléctrica; luego son acelerados por un potencial negativo *V* que puede variarse a voluntad mediante un potenciómetro. Entre las redes R_1 y R_2 los electrones se mueven por inercia, pues ambas están unidas a tierra; con ello se ofrece un amplio campo de choque a velocidad uniforme; además, el uso de las dos redes tiene la ventaja de que permite investigar por encima del potencial de ionización sin que los efectos de la misma se

dejen sentir sensiblemente, ya que, no habiendo entre las redes caída de potencial, los iones positivos formados no son atraídos hacia la placa P y tienen tiempo de recombinarse. En todo caso, los iones que pueden llegar a P son los formados entre R_2 y P, que forman una pequeña proporción.

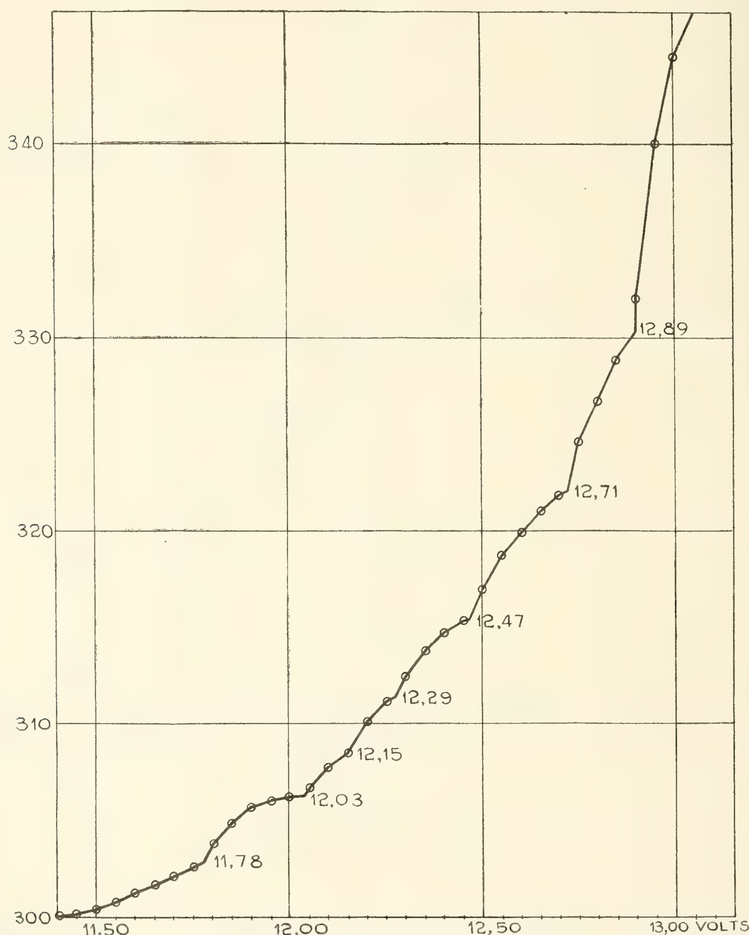


Fig. 2 *a*

Entre R_2 y P existe un potencial negativo que en el método directo es pequeño (alrededor de medio volt) y relativamente grande en el fotoeléctrico (por ejemplo, 40 volts).

El tubo de choque empleado por nosotros ha sido el utilizado ya en otras investigaciones análogas hechas en este mismo instituto. Es digno de mención el hecho de que la punta del filamento de

platino-iridio fué afinada para lograr así un punto de alta temperatura y como consecuencia una emisión casi puntiforme.

Para lograr potenciales definidos hemos tenido especial cuidado

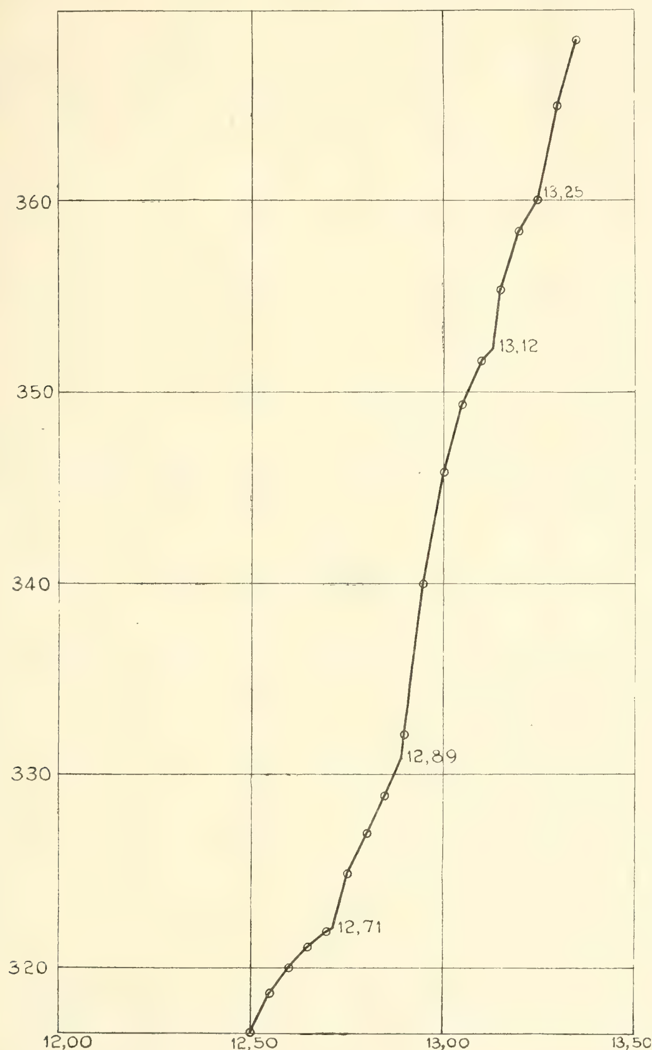


Fig. 2 *b*

con las aislaciones. Para ello hemos utilizado, como aisladores de los conductores, soportes de madera recubiertos de azufre, poniendo las llaves e instrumentos de medida sobre ebonita.

Antes de colocar el tubo de choque en la instalación se lo calentó

durante varios días a 400ª C, a fin de desengrasarlo perfectamente; una vez colocado en la instalación se mantuvo el vacío durante dos o tres días, calentando también las partes de aquélla que pudieran tener mayor cantidad de gas ocluído.

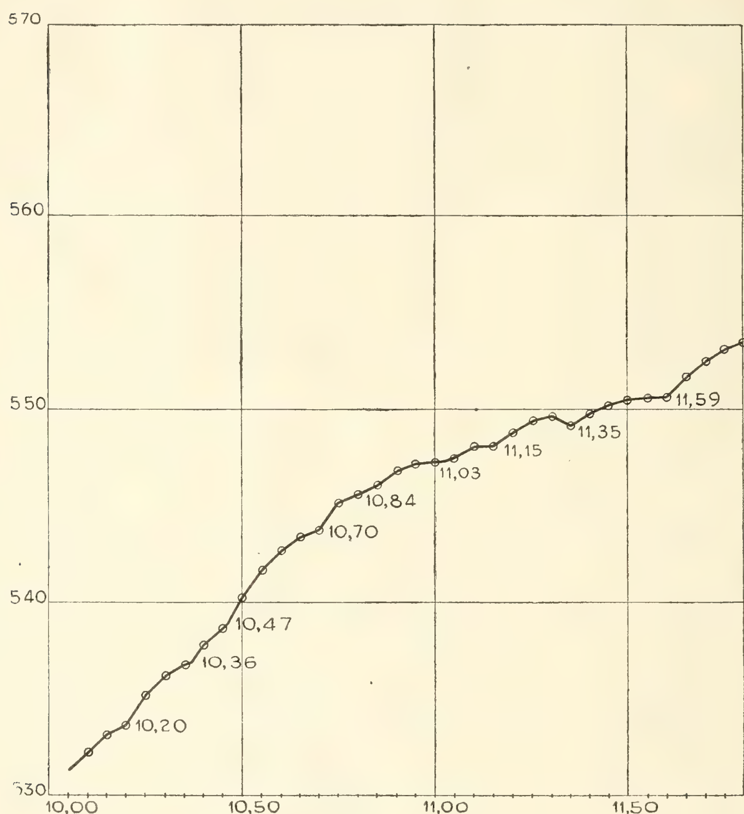


Fig. 3 *a*

Las medidas. — Hemos hecho gran número de curvas, siguiendo los dos métodos eléctricos, variando el potencial acelerador de a cinco centésimos de volt, utilizando presiones que iban desde 0.10 mm hasta 0.40, con intensidades de corriente en el filamento variables entre 1.3 y 1.5 amperes. Esto último tiene importancia, por cuanto la probabilidad de transición depende de la carga espacial.

El Kr era de la fábrica *Griesogen*, de Alemania, la cual lo garantiza como 100 % puro. Fué renovado repetidas veces, a fin de avar toda la tubuladura e impedir un enriquecimiento sensible

con gases de la atmósfera. Por otra parte, y a fin de evitar el pasaje de Hg desde la bomba, las medidas se realizaron siempre con aire líquido en trampas *ad-hoc*. Antes de comenzar las medidas se dejaba actuar el aire líquido durante unas diez horas.

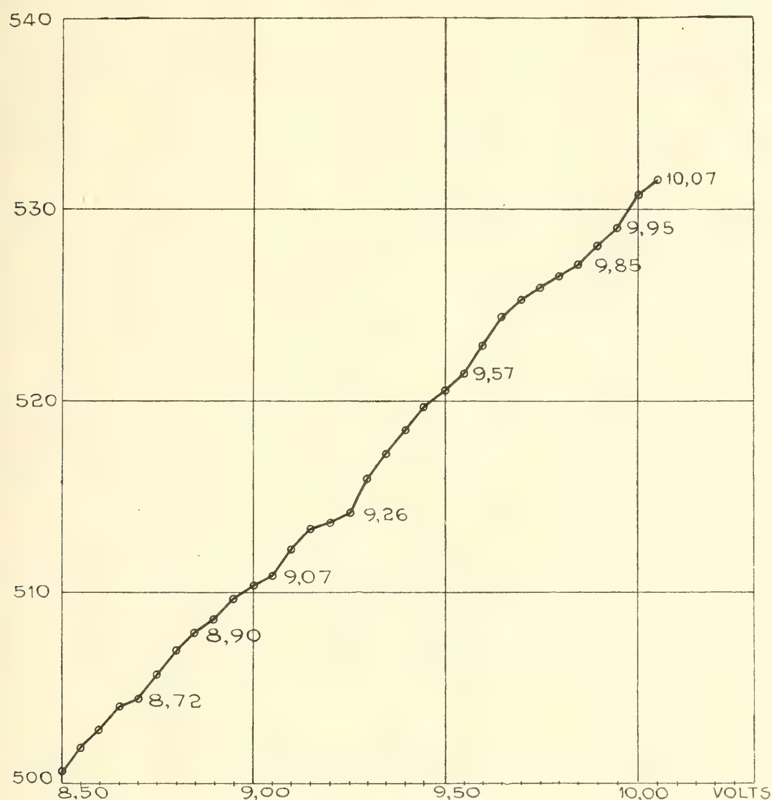


FIG. 3 *b*

LAS CORRECCIONES. — Son conocidas las diferentes causas de error que afectan a los métodos eléctricos. Una de las más importantes es que a lo largo del filamento se produce una caída de tensión del orden del volt, de manera que los electrones saldrían con diversa velocidad, según su punto de partida sobre el filamento. Este error puede reducirse bastante procediendo de la siguiente forma: En primer lugar, afinando el vértice del filamento se obtiene en él un punto de temperatura relativamente muy alta y con ello una emisión de electrones casi puntiformes; además, al filamento se le da la

forma de una V con el vértice vuelto hacia las redes, con lo cual la fuerza eléctrica es mucho mayor en el vértice que en los demás puntos.

La corrección global del tubo se ha hecho con la línea

$$1S - 2p_2$$

del Hg, que corresponde al potencial 4.86 volts, resultando así

$$\Delta V = + 1.30 \text{ volts}$$

Además es posible calcularla también mediante el primer potencial de resonancia del Kr que es de 9.99 según las investigaciones ópticas y de 8.67 en nuestras curvas.

La corrección varía en el orden de los centésimos con la temperatura del filamento y la presión del gas.

Los resultados corregidos. — De acuerdo con la corrección global, hemos obtenido los potenciales críticos que consignamos a continuación.

Método directo: 9.97; 10.20; 10.40; 10.60; 10.89; 11.13; 11.24; 11.40; 11.50; 11.61; 11.77; 11.98; 12.20; 12.30; 12.40; 12.62; 12.71; 12.85; 13.13; 13.31; 13.52; 13.71; 14.06; 14.30; 14.50;

Método fotoeléctrico: 12.80; 13.13; 13.33; 13.45; 13.59; 13.77; 14.01; 14.22; 14.42; 14.55.

Discusión de los resultados. — En la tabla I damos un cuadro de nuestros resultados, con las transiciones ópticas correspondientes.

Las líneas con ? han sido observadas por Dorgelo y Abbink en el espectro del Kr.

Desde el potencial 12.80, los valores anotados son los obtenidos mediante el método fotoeléctrico, que consideramos más sensible.

Como se ve, hay nueve potenciales encontrados eléctricamente a los que no corresponden líneas ópticas. Estos potenciales pueden corresponder a transiciones prohibidas, que aparecen en nuestro caso gracias a la perturbación eléctrica. Con esta idea hemos calculado, a partir de la tabla de términos dada por Meggers y Humphreys, las transiciones que podrían dar origen a esos potenciales. Hemos construído así la tabla II.

TABLA I

Opticamente					Pot. obs.	Obs.
Int.	λ	ν	Combinación	Pot. calc.		
30	1235.85	80916	$(4p)^{6\,1}S_0 - (4p)^5\,5S_4$	9.99	9.97	muy intenso
—	—	—	—	—	10.20	débil
	1177.7 ?	84911	—	10.48	10.40	»
20	1164.88	85846	$(4p)^{6\,1}S_0 - (3p)_5\,5S_2$	10.60	10.60	muy intenso
3	1134.89	88114	—	10.88	10.89	
—	—	—	—	—	11.13	
—	—	—	—	—	11.24	
—	—	—	—	—	11.40	
	10.66.7 ?	93747	—	11.57	11.50	intenso
—	—	—	—	—	11.61	»
—	—	—	—	—	11.77	»
—	—	—	—	—	11.98	»
5	1003.54	99647	$(4p)^{6\,1}S_0 - (4p)^5{}_{3/2}\,4d_2$	12.30	12.30	»
	1001.09	99891	$(4p)^{6\,1}S_0 - (4p)^5{}_{3/2}\,6S_4$	12.3	12.40	
	980.7 ?	—	—	12.59	12.62	
—	—	—	—	—	12.71	intenso
2	963.36	103803	$(4p)^{6\,1}S_0 - (4p)^5{}_{3/2}\,7d_5$	12.81	12.80	»
3	945.43	105772	$(4p)^{6\,1}S_0 - (4p)^5{}_{3/2}\,7S_4$	13.06	13.13	»
	923.70	108260	$(4p)^{6\,1}S_0 - (4p)^5{}_{3/2}\,6d_2$	13.16	13.33	»
	922.64	108385	$(4p)^{6\,1}S_0 - (4p)^5{}_{3/2}\,8S_4$	13.38	13.45	
	1910.75	109800	$(4p)^{6\,1}S_0 - (4p)^5{}_{3/2}\,9S_4$	13.55	13.59	intenso
	899.74	111143	$(4p)^{6\,1}S_0 - (4p)^5{}_{3/2}\,11S_4$	13.72	13.77	»
	885.63	112914	1° ionización del *Kr I*	13.93	14.01	muy intenso
	869.5	115010	$(4p)^{6\,1}S_0 - (4p)^5{}_{1/2}\,9S_1$	14.20	14.22	
	858.17	116527	$(4p)^{6\,1}S_0 - (3p)^5{}_{1/2}\,11S_2$	14.39	14.42	
	845.41	118285	2° ionización del *Kr I*	14.55	14.55	intenso

TABLA II

Combinación	ν calc.	λ calc.	Pot. calc.	Pot. obs.
$P_0 - 2\,P_{10}$	91168	1096.88	11.25	11.24
$P_0 - 2\,P_9$	92294	1083.49	11.39	11.40
$P_0 - 2\,P_7$	92964	1075.69	11.48	11.50
$P_0 - 1\,S_3$	95191	1050.52	11.75	11.77
$P_0 - 2\,P_4$	97595	1024.64	12.05	11.98
$P_0 - 2\,P_2$	97944	1020.99	12.09	12.10
$P_0 - 3\,P_7$	103313	967.93	12.75	12.71

Restarían los potenciales 10.20; 11.13; 10.40; 10.89; 11.61; 12.62. Los cuatro últimos tienen líneas correspondientes en el ultravioleta observadas por Dorgelo y Abbink. pero aún no han podido ser clasificadas.

Conclusiones generales. — 1° Hemos hallado los potenciales críticos del Kr por los dos métodos eléctrico, encontrando 27.

2° Catorce de ellos corresponden a transiciones ópticas conocidas y clasificadas. El resto no tiene correspondencia con líneas observadas o clasificadas: Cinco potenciales se las puede correlacionar con transiciones caculadas en base a la tabla de términos; otros cuatro corresponden a líneas observadas pero no clasificadas; por último hay dos a los cuales no corresponden líneas observadas ni combinaciones posibles entre términos.

3° Finalmente, hemos hallado potenciales por encima del valor 14.05, los que se explican teniendo en cuenta que el Kr neutro tiene dos límites de series en el ultravioleta lejano, correspondientes al nivel fundamental del Kr II, que es un doblete.

Al dar por terminada esta memoria, deseo dejar constancia de mi sincero agradecimiento al Dr. Ramón G. Loyarte, por haberme sugerido el tema de investigación y por haberme guiado y alentado continuamente en el curso de ella.

Instituto de Fisica de la Universidad

La Plata, octubre de 1936.

EL DOBLE TRIODO PARA POTENCIOMETRIA Y DETERMINACIONES CON ELECTRODO DE VIDRIO

Por REINALDO VANOSSI

Recientemente nos hemos ocupado de la aplicación del tipo de válvula electrónica « doble tríodo », como base de un voltímetro para análisis potenciométricos en general, introducido por primera vez por Hiltner mediante el empleo de la válvula alemana NZ 420; luego aplicado por algunos autores norteamericanos con válvulas de esta procedencia y finalmente por nosotros con la válvula 19 de distintas marcas comerciales.

En esa oportunidad, aparte de tratar los detalles referentes a construcción y aplicaciones del sencillo aparato, nos hemos referido al empleo de una serie de tres pilas patrón (Obata: 0.1419 V; Oholm: 0.6718 V, y Weston: 1.0183 V) adaptadas al aparato y que permiten, mediante serie u oposición, obtener un conjunto de f. e. m. para calibrar la válvula, y así, prescindir del empleo de un potenciómetro adicional, para el caso de que se aplique el voltímetro a mediciones directas de f. e. m., de pilas de menos de 1 MΩ de resistencia.

Por razones inherentes al tipo de válvulas que tratamos, no se pueden hacer determinaciones, con el aparato indicado, con pilas de alta resistencia interna, como son las construídas sobre la base del electrodo de vidrio, en las cuales esa resistencia comúnmente está en el campo de los mega Ohms; en estos casos, el equilibrio entre los dos tríodos de la válvula se altera por la sola introducción de esa alta resistencia y la sensibilidad de la curva I_a/V_g disminuye, proporcionalmente, en cierto grado, con el aumento de la resistencia de la pila.

En el deseo de poder disponer de un aparato, para aplicación general, de construcción simple y funcionamiento preciso, dentro de la aproximación exigible en procesos analíticos, hemos buscado la solución, que lo adaptara a las mediciones de pilas con electrodo de vidrio de cualquier resistencia interna. Ella se satisface aplicando el principio de la descarga de un condensador sobre las dos grillas

del doble tríodo, lo que produce, con amplificación, un impulso en el galvanómetro o miliamperímetro colocado en el circuito anódico, siempre que el condensador, por acción de la carga de un sistema formado por un potenciómetro en oposición a la pila a medir, esté en desequilibrio respecto del sistema de la doble grilla de la válvula. El impulso es relativamente proporcional al valor del indicado desequilibrio, lo que permitiría un método balístico, directo, pero siempre se ha de preferir, por múltiples razones, aplicar este principio como método de « cero », es decir dando al potenciómetro un valor equivalente al de la pila, en cuyo caso límite no se producirá impulso en el galvanómetro anódico.

De los métodos para medir f. e. m. de pilas de alta resistencia resulta sencillo y accesible el que se funda en el empleo de un condensador, un sistema « potenciómetro-pila », o la pila directamente, y un galvanómetro balístico: su único inconveniente es la alta sensibilidad exigible al galvanómetro.

Ha sido aplicado, entre otros, por Beans y Oakes ([1]) para determinaciones de pH en agua pura, mediante electrodo de hidrógeno y calibrando los impulsos del galvanómetro por aplicaciones de distintas f. e. m.; Brown ([5]) emplea esta técnica para pilas de alta resistencia; Jones y Kaplan ([9]) operan por oposición, con condensador de papel de 44 micro F; Dole ([6]) aplica el dispositivo de los dos autores anteriores al caso de electrodos de vidrio y demuestra la no polarización de las pilas por empleo de este método. Estos autores operan, a diferencia de Beans y Oakes, disponiendo en oposición la pila a medir con un potenciómetro; por otra parte un método semi-balístico ha sido propuesto por Beans y Walden ([2]), llevando el potenciómetro a unos 10 mV del equilibrio, respecto de la pila, y determinando el valor final por la deflexión del galvanómetro previamente calibrado; este método ha sido aplicado, después, por Neuss y Rieman ([13]). Morton ([11], [12]) emplea un método balístico directo, y Bennewitz y Kellner ([3]) se refieren, también, al método de cero (por oposición) y al balístico, calibrando el galvanómetro. Britton y Robinson ([4]) han determinado pK de ácidos, mediante electrodo de vidrio, por el método de cero.

De estas técnicas, la que se refiere al método de cero (por oposición exacta, mediante potenciómetro), es la más segura, pues que no exige un calibrado del galvanómetro, ni tener en cuenta la relación entre el tiempo de carga y la resistencia de la pila, ni la capacidad del condensador. En todo caso, los detalles referentes al método balístico directo pueden consultarse en los trabajos de Beans y Walden ([2]), Britton y Robinson ([4]) y Morton ([12]).

En nuestras determinaciones hemos adoptado este método con las precauciones propias, como base de control para las mediciones obtenidas con el aparato de doble tríodo construído de acuerdo con las indicaciones que se darán. Se empleó: una doble llave a palanca montada sobre parafina, para evitar pérdidas eléctricas, con las manijas aisladas mediante espesa capa de parafina o, también, con buen resultado, aisladas por tubitos de material silíceo de alta calidad dieléctrica: esta doble llave permite, por una parte, conectar el condensador al sistema de oposición « pila-potenciómetro », y por la otra, a un galvanómetro (« Mirravi », sensibilidad 2.2. 10^{-8} A, 1 mm/1 m, resistencia interna 70 ohms), de modo que, interpuesto el condensador en el medio, se puede cargar a éste y luego descargarlo sobre el galvanómetro. El condensador debe ser de alta calidad, no sólo desde el punto de vista de su aislación y resistencia interna, sino en particular relativamente libre de absorción y cargas residuales, lo que, en nuestro caso, se comprobó, porque después de 10 minutos de reposo, previa descarga, no dió desviación visible en el galvanómetro (los condensadores de papel, comunes, son completamente inservibles, por esta razón, y los de mica, tipo radiotelefónico, son sólo a veces utilizables, pues a menudo, dentro de los 10-20 seg., ya manifiestan carga residual, lo que imposibilita cargarlo, con el sistema a medir, durante mayor tiempo, con la consiguiente pérdida de aproximación).

Mediante C. de un micro F. y tiempo de carga, en el límite del equilibrio, de 60-100 seg. (y sólo algunos segundos, cuando el sistema pila-potenciómetro acusa algunas decenas de mV de desequilibrio), con electrodo de vidrio de unos 30 M ohms de resistencia, hemos obtenido aproximación de 0,5 mV (es decir, mejor que 0.01 pH); con electrodo de pocos M ohms, se puede alcanzar la décima de mV. En días de mucha humedad no se han notado anormalidades en la comparación con los datos obtenidos con el aparato a válvula, lo que se justifica pues que las fugas eléctricas externas en el electrodo de vidrio y condensador gravitan igualmente en las dos técnicas (por otra parte, mediante las precauciones de rigor, esas fugas se han limitado al mínimo).

Electrómetro a válvula « doble tríodo ». — El mismo principio anterior se ha aplicado en este caso, pero descargando el condensador sobre las dos grillas de la válvula. En consecuencia, si se tiene el aparato montado, según el circuito fundamental de Hiltner, para determinaciones de análisis potenciométrico, sólo será suficiente

agregar una llave (Q) que permita, por una parte, conectar las dos grillas al dispositivo que se empleará para mediciones directas de f. e. m. (X)., y, por otra parte, a un nuevo dispositivo (Y) con la llave doble, de tipo semejante al empleado en el método directo a que hemos hecho referencia. Esta doble llave (K) permite conectar el condensador al sistema « pila-potenciómetro » o a las grillas.

Ante todo debe insistirse en el máximo cuidado en la aislación y, en particular, en la aislación del condensador respecto de las rillas. Como medio simple se puede emplear parafina neutra y limpia; igualmente conveniente es el material silíceo especial que existe en el comercio, aunque molesto para trabajarlo.

El empleo de un tríodo, tipo electrométrico (especial) en conjunción con un condensador, ha sido estudiado por Morton ([11]), exigiendo, galvanómetro de relativamente alta sensibilidad; este autor también se refiere al empleo de los tríodos comunes, lo que no nos ha dado resultado aceptable. Hemingway y Arnow ([7]), han propuesto un circuito de dos válvulas tríodos (UX 240 o UX 222), y, más recientemente, otro con tres válvulas (77 y 85) ([8]), de alguna complicación para el operador no muy familiarizado con la técnica radiotelefónica.

Por nuestra parte, nos referiremos a las características de las partes fundamentales del aparato: Válvula, Condensador y Resistencia entre grillas; respecto de lo demás (potenciómetros anódicos, resistencia de protección, etc.), ha sido tratado en el anterior artículo ([14]).

Válvula. — Hemos ensayado el tipo 19 (Cunningham, Tung Sol, Saira) y el tipo B 21 (Gecovalve), con resultado semejante. Todas ellas son « doble tríodo » de calentamiento directo, V_f:2V. A pesar de que los diversos ejemplares ensayados no han acusado anormalidades fundamentales, sin embargo algunos han mostrado cierta influencia a las acciones de capacidad y han exigido mayores precauciones de aislación. Para evitar complicaciones en la construcción del aparato (blindaje, etc.), conviene dar preferencia a válvulas de menor susceptibilidad, en este sentido.

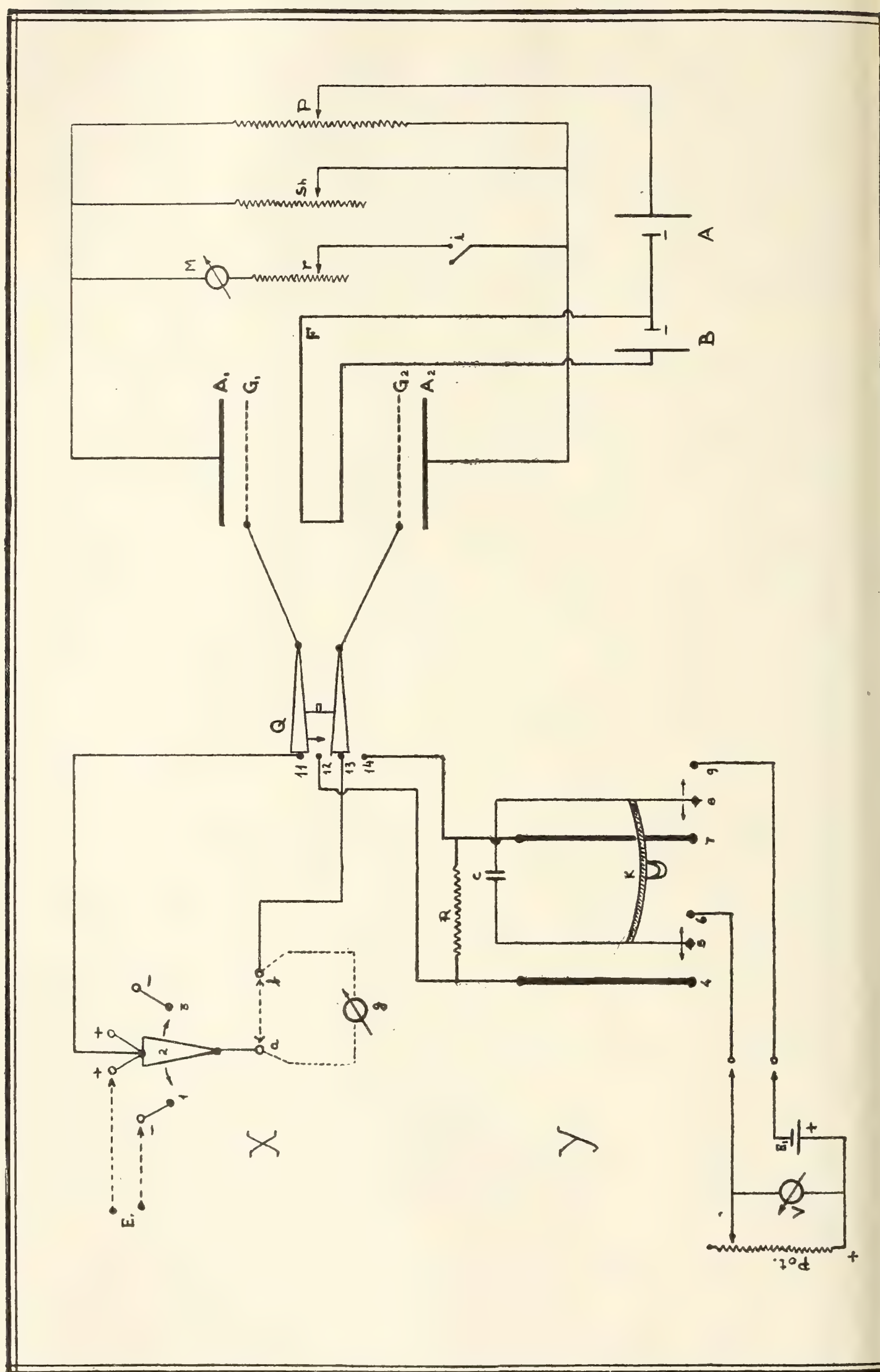
Un voltaje de ánodo de 45 V, se ha demostrado apropiado; mayor voltaje, si bien aumenta algo la sensibilidad, disminuye la regularidad de funcionamiento y exige mayor aislación, etc. Por otra parte con 45 V (batería seca) la constancia en el equilibrio de los dos tríodos es elevada (por horas). Como instrumento de medida, en el circuito anódico se emplea un galvanómetro tipo balístico, o de baja resistencia, sensible, 1 div. a 1 microampere, pudiéndose emplear tam-

bién un miliamperímetro de baja resistencia y de sensibilidad semejante.

La válvula debe funcionar, cuando se la emplea para hacer las mediciones con condensador, en posición de equilibrio, es decir con el galvanómetro en cero, o cerca de él, pues en lugares alejados de ese punto aumenta la asimetría de las dos grillas, lo que conviene evitar. La conexión a tierra del polo negativo de la batería anódica (o de filamento), elimina la posibilidad de impulsos anormales en el galvanómetro; por lo tanto, es muy conveniente, sin que sea imprescindible, particularmente con algunos tipos de válvula.

Condensador (*C*). — En términos generales, conviene un valor de 0.05 a 0.2 micro F. (valor óptimo 0.1), de mica, alta aislación (más de 10^{10} ohms) y libre de cargas de absorción y de cargas residuales, dentro de cierto tiempo. Condensadores de menor capacidad, acusan poca sensibilidad, al decargarlos sobre las grillas; de mayor capacidad, exigen más tiempo de carga y pueden producir mayor « doble impulso » en el galvanómetro al efectuar la descarga; los del tipo de papel parafinado, debido a la absorción y a los residuos de carga, que se manifiestan casi inmediatamente, no sirven. Respecto de este factor, los condensadores comunes de mica de tipo radiotelefónico, pueden ser utilizados, siempre que las cargas residuales no se manifiesten antes del tiempo de carga a que debe someterse aquél cuando se está en las proximidades del equilibrio de potencial « potenciómetro-pila », que es cuando ese tiempo debe ser mayor: así, por ejemplo, para una resistencia del electrodo de vidrio de 20-30 megaohms, puede requerirse, en el límite, un período de carga de unos 10 seg. para una aproximación de 0.5 mV; y, proporcionalmente, menos para menor resistencia (y recíprocamente). De modo que para macroelectrodos de baja resistencia, los condensadores comunes son, en general, aprovechables; en cambio para microelectrodos, a menudo de alta resistencia, debe exigirse calidad superior, la que se determina, en cada caso, por un ensayo previo sobre la misma válvula. Por otra parte, se podrá operar, en todo caso, limitando el tiempo de carga de acuerdo con el período de no aparecimiento de las cargas residuales; pero entonces, disminuirá la aproximación de la medición.

Con los condensadores comunes, de mica, no hemos observado polarización de las pilas de electrodo de vidrio, lo que se justifica por la alta resistencia y la pequeña cantidad de electricidad de carga y de absorción del dieléctrico.



Referencias de la Figura 1

A; Batería anódica (Pila seca) 45-90 V.

B; Acumulador, 2 V.

P; Potenciómetro anódico 10.000 ohms (en una de las ramas existe, en serie, una resistencia de 500 y otra de 50 ohms para afinar cuando se opera con alto V_a.

Sh; Resistencias en serie de 25.000, 1000 y 200 ohms, para poder llevar I_a, del miliamperímetro o galvanómetro M, a un valor dado con aplicación de V_g. Puede ser innecesario pero permite mayor elasticidad de operación.

r; Resistencia protectora de M, 100.000 ohms.

i; Interruptor.

M; Miliamperímetro de 300 micro A, para potenciometría general; o Galvanómetro sensible a 1 micro A, para método balístico.

A_1, A_2; Placas o ánodos del doble tríodo; G_1, G_2, grillas; F, filamento.

Q; Llave que permite conectar G_1 y G_2, mediante los contactos 11 y 13 al dipositivo X, para operar en análisis potenciométricos y mediciones directas de *f.e.m.*; y mediante 12 y 14 al dispositivo Y, para operar por el método balístico.

X; Material de zócalo de alta aislación. Los polos de las pilas a estudiar E, se conectan en 2 y en 1 ó 3; estando la palanca 2 en la posición de la figura la pila no actúan sobre grillas, pero sí lo hacen si se desplaza instantáneamente hacia 1 ó 3, donde están enchufados los polos contrarios de esas pilas.

Si no se desea medir I_g, se une por un puente, a y b.

g; Galvanómetro sensible 10^{-9} A o más, sólo utilizable en casos especiales, en que se mide I_g.

Y; Material de zócalo de alta aislación. El sistema potenciómetro y pila E_1, se disponen en oposición, pudiendo agregarse un voltímetro V si el potenciómetro no está calibrado (más conveniente es prescindir de V y operar con Pot. calibrado), y se conectan a 6 y 9.

Si la doble llave K está en contacto con 6 y 9, el condensador C (0,1 micro F) se carga con el sistema « potenciómetro-pila ». Si se lleva el contacto a 4 y 7, el condensador se descarga sobre G_2, G_1, a través de R (1-5 M ohms).

Para mayor comodidad conviene que los contactos de 5 y 8 con 4 y 7 ó con 6 y 9 puedan hacerse estables a voluntad mediante machihembrado a resorte suave. La manija de K debe tener muy alta aislación.

La aislación externa del condensador debe ser máxima; y, sobre todo, respecto de las grillas de la válvula, como ya se indicó. De lo contrario se producen pérdidas y se obtienen influencias de capacidad y un doble impulso en el galvanómetro — es decir, hacia un lado y hacia el otro — al aplicar el contacto del condensador a las grillas, lo que dificulta la observación exacta del punto de equilibrio. Este doble impulso se manifiesta más, si no está la conexión a tierra y si el condensador es de más alta o muy baja capacidad, y, por otra parte, también, más perceptible con valor alto de R y con algunas válvulas más que con otras. La humedad atmosférica no influye si la construcción es correcta, pero puede ser necesario encerrar al condensador en un recipiente con agente deshidratante. La disposición de los polos de C, respecto de grillas, debe fijarse una vez por todas (pequeñas influencias de asimetría interna de C).

Resistencia entre grillas (R). — En general, corresponde emplear un valor de 1 a 5 megaohms, de tipo común radiotelefónico.

Al conectar el condensador, previamente descargado por « corto circuito », a las grillas, unidas por esta resistencia, se observa generalmente un impulso en el galvanómetro, lo que indica una diferencia de potencial entre las grillas. Esta diferencia aumenta con el valor de R; debiéndose, siempre, determinarla mediante el empleo del potenciómetro, el cual dará, para determinada posición de los polos de aquél, respecto de las grillas, un cierto potencial, de signo particular para cada grilla y para el cual no se nota impulso. Este potencial de equilibrio, constituye el « ensayo en blanco » que se tendrá en cuenta en las determinaciones subsiguientes; y, en verdad, viene a corresponder no sólo a la diferencia de potencial entre las grillas, sino también a la pequeña influencia del condensador sobre el régimen de la válvula y el pequeño error que el mismo potenciómetro puede acusar en su punto cero (es común que un potenciómetro en su punto cero, dé, en rigor, un pequeño valor de f. e. m.).

En las válvulas ensayadas y para R de 1-2 mega ohms, hemos hallado un valor del ensayo en blanco de 0 a 1.5 mV. Es evidente que, aumentando R, aumentará ese voltaje, aumentando algo la sensibilidad; así, por ejemplo, con una válvula, empleando 5 mega ohms, hemos podido operar con una sensibilidad de 0.2-0.3 mV, con un ensayo en blanco de 2 mV. El valor de este ensayo en blanco puede acusar pequeñas variaciones en los primeros momentos de funcionamiento de la válvula, pero luego se estabiliza. El empleo de R mayor que los valores indicados, podría convenir para aumentar

un poco la sensibilidad de algunos ejemplares de válvulas, pero, entonces, se corre el riesgo de las fluctuaciones que puede experimentar con el tiempo el importe ya mayor de ese ensayo en blanco, aparte que también comienzan a observarse acciones de capacidad y de « doble impulso » (en algunas válvulas, a partir de 10 a 20 mega ohms); con todo, se elegirá para cada válvula un valor de R, que, manteniendo el ensayo en blanco, dentro de pocos mV, y no notándose impulsos anormales, permita una sensibilidad de 0.5 mV para electrodos de vidrio de resistencia moderada, con un tiempo de carga, en el límite del equilibrio, de algunos segundos.

Funcionamiento del aparato. — Efectuadas las conexiones a baterías, se deja unos 2-3 minutos para que se normalice el funcionamiento de la válvula. Empleando V_a de 45 V, V_c de 2 V, la estabilidad de la corriente en el circuito anódico es casi perfecta. Con las precauciones inherentes a estos aparatos, se lleva a cero, mediante el potenciómetro anódico, el galvanómetro o amperímetro (se supone que está conectado a grillas el sistema Y y que el valor óptimo de R ha sido elegido en los ensayos previos, de acuerdo con las directivas indicadas; por otra parte, la doble llave K está en posición tal que C y R están aplicados a grillas — posición 4 y 7. El potenciómetro — de tipo sensible a 0.2-0.5 mV puede ser suficiente, para esta clase de determinaciones — se conecta a 6 y 9, en la posición que le corresponde).

No debe observarse impulso en el galvanómetro, al acercar la mano o tocar la manija de K, ni al colocarla en punto neutro (5 y 8): si esto sucede, debe atribuirse a deficiencias de aislación, o alto valor de R, C o V_a, como ya se indicó (aparte del ejemplar de válvula). Luego se establece « corto circuito » en el C (desconectado de grillas) por unos instantes, y en seguida se conecta de nuevo a grillas para observar el impulso producido por la diferencia de potencial entre las grillas; este impulso debe ser igual al que se obtiene conectando primero C al potenciómetro colocado en posición cero, y luego descargado sobre grillas, pues de lo contrario indica (dentro de iguales períodos de « corto circuito ») error en el potenciómetro. Se determina, después, el valor que debe darse al potenciómetro, eligiendo la polaridad que corresponde, para obtener impulso cero, valor que se aceptará como « ensayo en blanco ». Por otra parte, se debe establecer el tiempo que transcurre antes de que se manifiesten las cargas residuales de C, para lo cual, en un nuevo ensayo, se carga a éste, con el potencial de equilibrio, recién mencionado, y dejándolo

luego períodos de tiempo variables en « estado libre », o sea K en porción 5-8), se lo va descargando sobre grillas: llamaremos « tiempo límite de carga », al período de libertad de C (o sea, todo aislado), que ya permite, al descargarlo sobre las grillas, manifestar un impulso. Es aceptable un tiempo límite compatible con las exigencias de carga del tipo de electrodo de vidrio que se emplee y la aproximación requerida; así, a más del ejemplo citado en el párrafo « Condensador », puede mencionarse que, para un micro electrodo de 300 mega ohms se requiere, para mantener la aproximación de 1 mV, un tiempo de carga, en el límite, de 40-60 segundos. La humedad atmosférica, si C no está en cámara seca, influye algo sobre el tiempo de aparecimiento de cargas residuales.

Se tendrá en cuenta, el signo del potencial de cada grilla, vale decir, el signo del ensayo en blanco, para deducirlo de las mediciones posteriores. Este valor, si es bajo, se mantiene constante, pero conviene confirmarlo periódicamente; por este motivo es aconsejable que se mantenga lo más bajo, compatible con la sensibilidad que se exige del aparato (aumenta con R y con V_a).

Mientras se efectúan estas determinaciones previas, se notará si los impulsos del galvanómetro son netos, sin doble impulso apreciable (*). En nuestros ensayos con diversas válvulas, hemos podido aprovechar algunas particularmente « susceptibles », dentro de una sensibilidad de 0.5-1 mV, operando con C de 0.05 micro F, V_a de 27 V, R de 5 mega ohms; sin embargo, el inconveniente del bajo V_a es la falta de proporcionalidad entre la magnitud del impulso del galvanómetro y el potencial aplicado, lo cual no permite apreciar rápidamente los nuevos valores que conviene dar al potenciómetro para alcanzar el punto de equilibrio. Estos datos permiten establecer cómo de la coordinación de esos diversos factores pueden elegirse condiciones óptimas de operación.

Por otra parte, debe agregarse que, operando con distintos valores de R, V_a y C, y considerando el respectivo ensayo en blanco, los datos obtenidos en la medición de f. e. m. de pilas, concuerdan entre sí, dentro de los límites de sensibilidad en que se opera.

La medición con la pila en estudio se efectúa simplemente colocando el potenciómetro en oposición con aquélla y conectando los polos libres a los enchufes correspondientes (6 y 9). Como esos polos,

(*) No siempre es posible evitar un pequeño doble impulso, el cual no impedirá, si es poco notable, observar el impulso principal hacia un lado u otro del cero del galvanómetro cuando el potenciómetro está a 0,5-1 m V de diferencia del equilibrio.

debido a la forma del dispositivo, quedan aislados de las grillas porque se mantiene K apoyado en 4-7, no hay peligro de alterar el régimen de la válvula por contacto a tierra, ni de polarizar la pila mientras se opera. Además, manteniéndose el contacto de grillas con C, mientras se fija un valor al potenciómetro, se da tiempo a que el condensador se equilibre respecto del sistema de las grillas; y esto permite que sea real el primer impulso que se obtenga, al descargar C sobre grillas, después de haberlo cargado con el potenciómetro-pila (de otra manera, el primer impulso debería despreciarse, porque si C no ha tenido tiempo de equilibrarse con las grillas, el potencial que adquiera al cargarse con la pila puede ser anormal).

El tiempo de carga del C con el « potenc.-pila » (contacto de K con 6-9), en los primeros ensayos será de 1 seg. para electrodos de 20-30 mega ohms, y este período irá aumentando a medida que se llega cerca del equilibrio, pudiendo establecerse, en los toques finales, unos 10 seg., lo que significa que en 1-2 minutos se tiene la medición final. Para electrodos de alta resistencia puede exigirse un tiempo total de 2-4 min., para mantener la aproximación de 0.5-1 mV. Por otra parte, como no gravita I_g sobre la pila, considerando el principio del aparato, no hay polarización posible de la pila.

La aproximación adecuada es de 0.5 mV (algo menos de 0.01 pH), bien suficiente para estas determinaciones; sin embargo, en trabajo común puede satisfacer 1 mV, lo cual significa mayor rapidez de operación y menos exigencias en la construcción del aparato. Recíprocamente, seleccionando las partes del aparato, se puede alcanzar una aproximación de 0.2 mV, con las precauciones relativas al aparato mismo y aumentando las que corresponden al electrodo de vidrio (p. ej. pérdidas de fuga).

Si las determinaciones de pH, por electrodo de vidrio, se efectúan sobre la base de una determinación previa con solución buffer y aceptando un valor medio constante, en la escala de pH, de $\frac{RT}{F}$, determinado por calibración del electrodo, no es necesario establecer previamente el valor del ensayo en blanco, ni determinar el potencial de asimetría de la membrana de vidrio; lo único que interesa, en estos casos, es la constancia de los mismos.

La determinación del ensayo en blanco y de asimetría sólo puede interesar para establecer que sus valores no sean altos, lo que significaría una mayor constancia. Por otra parte, para mediciones absolutas de f. e. m. esos valores deben conocerse.

Supongamos un caso práctico:

Designaremos a las grillas, mediante G_1 y G_2; supondremos que al aplicarles el potenciómetro, encontramos que un valor de + 1 mV, actuando sobre la G_2, da el equilibrio, lo que constituye el « ensayo en blanco ».

Para la determinación del potencial de asimetría del electrodo de vidrio introducimos un electrodo de calomel en la solución interior de referencia, y otro (saturados) en la exterior, que en este caso es la misma que la interior (pH = 1.06, 20°C). El equilibrio se obtiene conectando el polo + del potenciómetro con el electrodo de calomel interior, constituyendo, así, los polos del sistema « potenciómetro-pila », por una parte, el polo — del potenciómetro aplicado a la G_1 y por la otra el electrodo de calomel exterior, aplicado a la G_2. El valor que da el potenciómetro es de 1.5 mV.

Para la determinación de la f. e. m. de la pila construída mediante una solución de pH desconocido, que se coloca exteriormente, obtenemos el equilibrio conectando el polo + del potenciómetro con el electrodo de calomel exterior, resultando, entonces, polos del sistema, el polo — del potenciómetro aplicado a G_1 y electrodo de calomel interior aplicado a G_2. En el equilibrio, se obtiene 133.5 mV (20°C). Admitiremos que para el electrodo de vidrio empleado, dentro de la zona de operación, el valor del factor, determinado por una calibración previa, es de 0.0578.

En este caso el potencial de asimetría del electrodo de vidrio se debe sumar al potencial obtenido con la solución en estudio porque, esa asimetría crea un potencial negativo en la solución exterior el cual disminuye el potencial positivo producido por la solución a medir. Ahora bien, para calcular los valores reales del potencial de asimetría y del de la pila con la solución desconocida se tendrá en cuenta que, de acuerdo con el « ensayo en blanco » obtenido, la G_2 debe adquirir un potencial de 1 mV respecto de la G_1, para que se mantenga el equilibrio en la válvula, al aplicar el condensador previamente sometido a la acción del sistema de carga « potenciómetro-pila ». Esto significa que el polo negativo del potenciómetro, aplicado a la G_1, es 1 mV más negativo, o sea que el valor que nos da el potenciómetro es 1 mV mayor que el que se obtendría si no existiese este « ensayo en blanco ». (Efectivamente, como al efectuar la medición de la asimetría tenemos que conectar positivo de potenciómetro con calomel interior, resulta que se aplican a las grillas los polos negativos del potenciómetro y de la pila y de estos dos actuará como polo positivo el menos negativo. En este caso,

ya que la G_2 exige + 1 mV, significa que el polo del potenciómetro conectado a G_1, será negativo, o sea que en el estado actual del sistema de oposición, el potenciómetro actúa con mayor f. e. m.; y este valor en exceso, respecto del que tendría, frente a un aparato de medida que no tuviese anomalía, es precisamente de 1 mV).

Entonces, el potencial de asimetría real es de 0.5 mV, con signo positivo, en nuestro caso, para la solución interior.

Un razonamiento concordante aplicado al dato obtenido con la pila construída con la solución a medir, nos dará un valor de 132.5 mV para la f. e. m. real, y como valor corregido por la asimetría 132.5 + 0.5 = 133 mV, positivo para la solución exterior.

Si el potencial de asimetría hubiese tenido valor negativo, es decir que para obtener el equilibrio hubiese estado conectado el polo positivo del potenciómetro con el calomel exterior, entonces no sería necesario corregir los valores, como en el caso anterior, pues que al restar se anularía.

El ejemplo indicado basta para establecer en general el razonamiento que corresponderá en cualquier otro caso, como p. ej., si la grilla G_1 requiriese un potencial positivo, o para el caso de que la oposición « potenciómetro-pila », se efectuase por los polos negativos. Análogamente si se opera con electrodo interior de quinhidrona o de Mc Innes y Dole ([10]).

En las operaciones habituales, el asunto se simplifica porque basta determinar la f. e. m. de una pila con una solución buffer externa de pH concido, y a partir de este dato, suponiendo que se conoce el factor de incrementación para el electrodo de vidrio que se aplica, deducir directamente el pH de acuerdo con la f. e. m. correspondiente. En este caso, el dato obtenido con la solución buffer, sirve de punto de partida y lleva incluído el importe del « ensayo en blanco » y de la asimetría del vidrio.

Conclusiones

Se propone un aparato sobre la base de la válvula electrónica del tipo « doble tríodo », para mediciones de f. e. m., y de uso general, por cuanto, aparte de la aplicación a análisis potenciométricos, como ya ha sido establecido por otros investigadores, permite determinaciones sobre pilas de alta resistencia (centenas de mega ohms), del tipo, por ejemplo, de electrodo de vidrio. En el primer caso la medición se efectúa por lectura directa en el miliamperímetro anódico, previa calibración de la válvula con potenciómetro o me-

diante una serie de tres pilas patrón que pueden disponerse en serie u oposición; en el segundo caso se aplica el principio de la descarga sobre grillas de un condensador, el cual se carga con las diferencias de potencial de un sistema « potenciómetro-pila », empleándose, entonces, el aparato por la técnica balística de « cero » y deduciéndose, por lo tanto, la f. e. m. de la lectura en el potenciómetro de oposición e introduciendo, si es necesario, las correcciones establecidas por los ensayos previos. En estos casos la aproximación es de 0.5 mV (pudiendo aumentarse), y el tiempo de medida 1-2 minutos.

Facultad de Ciencias Exactas,
Fisicas y Naturales
Bs. Aires

BIBLIOGRAFIA

(1) Beans, H. T., and Oakes, *J. Am. Chem. Soc.*, 42, 2116 (1920).
(2) Beans, H. T., and Walden, G. H., ibid, 50, 2673 (1928).
(3) Bennewitz, K., and Kellner, E., *Z. Anal. Chem.*, 102, 1 (1935).
(4) Britton, H. T. S., and Robinson, R. A., *Trans. Far. Soc.* 28, 531 (1932).
(5) Brown, W. E. L., *J. Sc. Instr.*, 2, 12 (1924).
(6) Dole, M., *J. Am. Chem. Soc.*, 53, 620 (1931).
(7) Hemingway, A., and Arnow, E. L., *Ind. Eng. Chem.* (*Anal. Ed.*), 5, 278 (1933).
(8) Hemingway, A., ibid, 7, 203, (1935).
(9) Jones, G., and Kaplan, B. B., *J. Am. Chem. Soc.*, 50, 1845 (1928).
(10) Mc Innes and Dole, M., ibid, 52, 29 (1930).
(11) Morton, C., *J. Chem. Soc.*, 2977 (1931).
(12) Morton, C., ibid, 256 (1934).
(13) Neuss, J. D., and Rieman W., *J. Am. Chem. Soc.*, 56, 2238 (1934).
(14) Vanossi, R., *Anales Asoc. Química Argentina*, 25, 54 (1937).

LA ARQUITECTURA MOLECULAR EN BIOQUIMICA

Por el Dr. CARLOS A. SAGASTUME (1)

PROFESOR TITULAR DE QUIMICA BIOLOGICA EN LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Los edificios moleculares son construídos por los organismos, con sujeción a un plan arquitectónico que responde a las exigencias de la función bioquímica a cumplirse.

En la evolución de los estudios de las ciencias físico-químico-biológicas, o dicho con más exactitud, de los conocimientos que a su respecto ha ido adquiriendo el hombre, se pueden señalar cuatro etapas nítidamente demarcadas:

1º *Observación y registro de los fenómenos.* — En esta primera fase, el hombre de estudio se ha limitado a tomar nota de los fenómenos que sus sentidos le permitieran percibir ocasional o reiteradamente.

2º *Interpretación de su causalidad.* — Surgen en esta segunda etapa las hipótesis, teorías y doctrinas con que se ensaya la explicación de los fenómenos observados.

3º *Imitación de los fenómenos naturales.* — Trata el hombre en esta tercera fase, de repetir experimentalmente los fenómenos naturales cuyo mecanismo acaba de conocer o aquellos que deberá resignarse a manejar empíricamente.

4º *Utilización de los descubrimientos anteriores.* — La humanidad cosecha en esta última etapa, el beneficio de los descubrimientos anteriores, tanto en el aspecto estrictamente teórico, como en el de la utilización práctica.

(1) Conferencia dada en el salón de actos de la Sociedad Científica Argentina el 25 de Septiembre de 1936.

La bioquímica, la más joven de las ramas de las ciencias químicas, se halla en el período de transición entre la primera y la segunda de las fases. Las tímidas tentativas para alcanzar la tercera, han resultado hasta hoy infructuosas.

Al comprometer con la Sociedad Científica Argentina un ciclo de tres conferencias, pensé ocuparme del tríptico más interesante de la bioquímica actual: pigmentos, vitaminas y hormonas.

Defiriendo a ciertas insinuaciones, resolví cambiar de programa y tocar también algunos problemas de carácter didáctico.

He tenido bien en cuenta que iba a hablar ante un auditorio de especialistas en muy diferentes ramas científicas, razón por la cual me he esforzado en que esta exposición sea llana y comprensible en todas sus partes.

En una de las conferencias del ciclo que recientemente tuve el honor de pronunciar en la Universidad de Córdoba [1], puse de relieve la importancia bioquímica de la ciclización molecular. Según lo afirmara en esa oportunidad, la ciclización molecular en los organismos constituye uno de los problemas bioquímicos de mayor enjundia. ¿Dónde, cómo, cuándo y para qué se opera tan importante proceso?

Los cuerpos cíclicos están dotados de mucha mayor estabilidad que los acíclicos y ésta se acentúa más aún, si los ciclos se convierten en núcleos.

Sabido es que los organismos vegetales nos ofrecen no sólo los primeros ejemplos de síntesis de moléculas orgánicas, si que también de ciclización de las mismas: glucidos, lipidos, protidos, pigmentos, taninos, resinas, perfumes, alcaloides, etc.

Nos llevaría muy lejos discurrir acerca del mecanismo de origen de las moléculas cíclicas en los seres vivos y de su función bioquímica, pues para ello deberíamos plantear problemas de ontogenia y de filogenia química, de gran lalitud y profundidad.

Limitémosnos a recordar que la ciclización molecular ha sido y es aún considerada facultad privativa de los vegetales, por numerosos investigadores y entre ellos por sabios de la talla de Osborne, Abderhalden, Lambling, etc. Otros, en cambio, impugnan esta tesis, arguyendo que el organismo animal es capaz, por ejemplo, de efectuar la elaboración de la molécula de colesterol. Los que se sitúan en una posición intermedia, adoptan una opinión ecléctica al negar al ani-

[1] Conferencia dada en representación de la Universidad de La Plata, en la Facultad de Ciencias Médicas de la Universidad de Córdoba, el 17 de Julio de 1936.

mal la aptitud para ciclizar directamente, pero al concedérsela en cuanto a la unión entre sí de varios núcleos de origen exógeno. Tal hecho ocurriría con los núcleos pirrólicos de elaboración vegetal, que luego el animal acoplaría para formar sus porfirinas y sus hemoglobinas.

Podemos destacar que lo que sobre este punto se sabe, es que si bien es cierto que la ciclogénesis es cumplida con más frecuencia y generalidad en las plantas, no puede ya negarse que se realiza también, aunque en muchísimo menor grado, en los animales.

Lo que constituye hoy verdad científica inconcusa, es que los grandes procesos fisiológicos, los de mayor trascendencia, tales como la síntesis de las moléculas orgánicas, la respiración, el estímulo de la actividad de los órganos de reproducción,, la neutralización en la economía de los productos tóxicos del metabolismo, se producen gracias al concurso de las moléculas cíclicas.

Para poner de relieve la importancia de la ciclización molecular, sería menester considerar en detalle muchos cuerpos de cierto interés fisiológico y ese no es hoy mi propósito. Si me he referido a ella, es por cuanto en el curso de esta disertación tendré que destacar que esa elaboración de ciclos y de núcleos, que esa edificación molecular, se ajusta a planes arquitectónicos que se repiten o asemejan, toda vez que deba cumplirse idéntica o análoga función fisiológica.

Vamos a registrar notables coincidencias de estructuras moleculares, en cuerpos cuyo parentesco es de difícil admisión y en otros casos, núcleos ampliamente difundidos en la naturaleza, cuya genealogía química resulta fácil descubrir.

Me limitaré en esta exposición a ensayar una breve síntesis acerca del prominente papel de los pigmentos en los organismos vegetales y animales. Veremos la importancia del esqueleto tetrapirrólico en los pigmentos metabolizantes; del esqueleto del ciclopentenefenantreno en los esteroles, geninas y hormonas sexuales; del núcleo cromógeno del flavinio, así como de las cadenas alifáticas adosadas al núcleo ciclopentenefenantreno.

I. — Jerarquía bioquímica de los pigmentos

Sin riesgo de incurrir en error ni en exageración, podemos afirmar que las sustancias más importantes que la naturaleza nos ofrece son los pigmentos; que las moléculas edificadas por los seres vivientes

a las que se les ha asignado mayor jararquía bioquímica, son los pigmentos. Tal es la tesis que paso a probar con esta disertación.

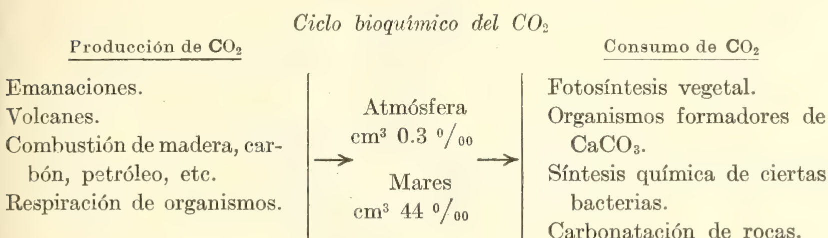
El mejor argumento en favor de nuestro postulado es el siguiente: la materia orgánica se origina con el indispensable concurso de las plantas verdes, o sea del pigmento verde denominado clorofila.

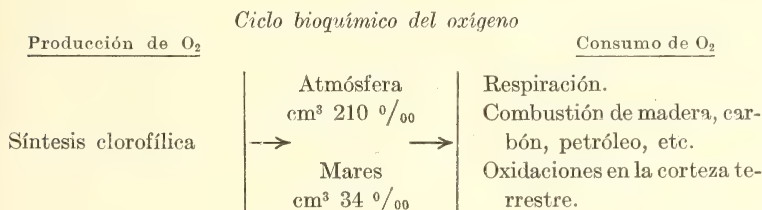
El gran alquimista, Van Helmont, creador de la yatroquímica, apoyó hace tres siglos, en una interesantísima experiencia, hoy clásica y de gran valor histórico, su oposición a las teorías aristotélicas acerca de la composición de la materia orgánica y de la nutrición de los vegetales. En un pote colocó 90 kilos de tierra desecada y en ella plantó una vara de sauce de 3 kilos de peso, la que fué regada diariamente con agua de lluvia durante 5 años. La rama o gajo de sauce habíase convertido en un árbol de 73 kilos, es decir, con un aumento de 70 ks. en 5 años. En el mismo lapso de tiempo, el peso de la tierra sólo había disminuído en 60 gramos. De este experimento, Van Helmont extrajo dos conclusiones, una exacta y otra errónea: *a*) el gran aumento de peso de la planta no se produjo a expensas del suelo; *b*) la materia construída por la planta fué suministrada por el agua con que ésta era regada.

Mariotte demuestra después que las sustancias minerales que contienen las cenizas de las plantas, provienen del suelo. Malpighi sugiere que las hojas eran los órganos productores de las sustancias necesarias al desarrollo del vegetal. Priestley descubre en 1773 que las plantas confinadas en una atmósfera de aire fijo (CO_2) producen, en el término de varios días, grandes cantidades de aire *deflogisticado* (oxígeno). Se suceden las pacientes y fructíferas investigaciones experimentales de Scheele en Suecia, del médico holandés Ingen-Housz en Austria con el patrocinio de la casa reinante. Se establece así que las plantas respiran, consumiendo oxígeno y produciendo CO_2, pero que al propio tiempo, y esto último a la luz solar, fijan CO_2 y liberan oxígeno. Aparece en escena Lavoisier y establece la naturaleza de la combustión, con lo que se esclarece el problema del ciclo bioquímico de esos dos gases.

En 1840 publica Liebig su obra *La química orgánica y sus aplicaciones a la agricultura y a la fisiología.* Demuestra Liebig que las hojas verdes absorben el CO_2 atmosférico y elaboran con el concurso de la luz solar, moléculas orgánicas de alta complejidad. Prueba también que los vegetales, con agua, CO_2 y sales minerales, viven, crecen y evolucionan normalmente, y además de ello, han purificado la atmósfera en beneficio de los animales.

Bien sabido es que los gases comunes de la atmósfera cumplen ciclos que implican dos grandes fases: ingreso o incorporación a la materia viviente y egreso de ésta y retorno al medio externo. Recordaremos brevemente los ciclos del oxígeno y del CO_2.



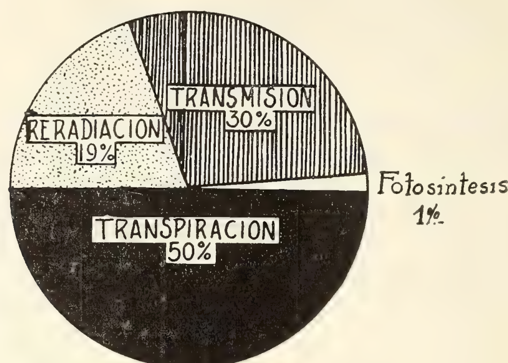


Sus cantidades respectivas en la atmósfera se mantienen practicamente constantes por cuanto los grandes procesos contrapuestos que acabamos de recordar se equilibran admirablemente. Y este equilibrio dinámico que condiciona la vida, es obra de un pigmento: la clorofila. Las hojas verdes, además de efectuar la fotolisis del CO_2 con liberación de oxígeno, edifican moléculas, como los azúcares, almidones, grasas y proteínas que han de servir de alimento al organismo animal aportando al propio tiempo que el material indispensable para la reparación del desgaste funcional, la energía necesaria para el cumplimiento de las funciones biológicas.

Las grandes síntesis que el vegetal efectúa son reacciones endotérmicas que se pueden cumplir porque la energía calórica la suministra el sol. Esto equivale a decir que la energía solar, se transforma, con el concurso de la clorofila, en energía química contenida en las moléculas elaboradas, y luego al demolerse estos edificios moleculares por transformaciones exotérmicas, retorna la energía química a su forma originaria: calor. Por ello se dice, con toda propiedad, que el pigmento clorofílico es un conmutador de energía.

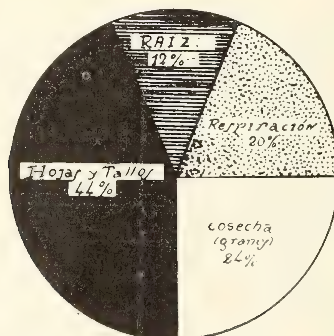
La energía calórica de origen solar que la superficie de la tierra recibe, es enorme: 1,5 caloría por centímetro cuadrado cada minuto;

pero la que se utiliza en el proceso de la fotosíntesis sólo representa el 1 % de la que sobre la hoja incide:



El material sintetizado por la planta se distribuye en sus distintas partes y cierta fracción del mismo, 20 %, es insumido en los gastos de la vida vegetal, especialmente en la respiración:

Distribución del material elaborado durante el proceso de fotosíntesis



El resto de ese material, el 80 %, queda a disposición del animal, el cual, al utilizarlo como alimento, devuelve al medio exterior el carbono al estado de CO_2 y la energía calórica acumulada por la planta. Se trata de un ciclo bioquímico material y energético en el que intervienen el C, N, O, H, S, P, etc., cada uno con su respectivo metabolismo y en el que se intercalan dos grandes tipos de reacciones: endotérmicas y principalmente reductoras las de la síntesis vegetal, exotérmicas y principalmente oxidantes las de la demolición animal.

La energía calórica del sol, se convierte en energía química o potencial, en energa luminosa, en energía eléctrica y nuevamente en energa calorífica retornando al medio ambiente.

En estos grandes circuitos que recorren la materia y la energía, se cumplen las dos grandes leyes: la de la conservación de la materia y el primer principio de la termodinámica y la clorofila es la llave de comando, el conmutador de estos grandes ciclos bioquímicos materiales y energéticos.

En el transcurso de esta exposición tendremos que considerar los pigmentos naturales de las plantas y de los animales: las clorofilas, xantofilas, carotenes, carotenoides, hemoglobinas, porfirinas, bilinas, citocromos, miocromos, liocromos, melaninas, flavinas, antocianinas, etc. Diremos dos palabras acerca de sus caracteres fundamentales y de su función bioquímica.

II. — Pigmentos y colores naturales

No todos los colores que presentan los seres vivos son debidos a pigmentos. Algunos son debidos a fenómenos físicos de mayor o menor complejidad en punto a la interpretación y explicación de los mismos. Algo análogo ocurre con el azul del cielo y del mar. Algunos autores (Mandoul, Verne) explican los colores de estructura o puramente físicos por procesos diferentes:

Colores estructurales. Origen

a) *Reflexión simple de la luz*:
Color blanco de plumas y pelos por inclusión del aire en el tejido. Tono plateado de algunos insectos, hojas de begonia, etc.

b) *Descomposición de la luz* (*irisación*):
Globos de jabón, película de petróleo sobre agua. Plumaje de colibrí. Alas de mariposa.
Estructura laminada de perlas, conchas y caracoles.

c) *Difracción de la luz*:
Azul de las venas y tatuajes. Azul de algunos batracios y reptiles. Plumas de ciertos pájaros.

Sólo he deseado con esta rápida referencia a los colores puramente físicos o de estructura, destacar que no a toda coloración corresponde su respectivo pigmento. En nuestra exposición nada más tienen ya que hacer los colores estructurales. Los hemos mencionado para evitar confundirlos con los verdaderos colores pigmentarios.

III. — Los pigmentos según su origen

Con propósitos preferentemente didácticos, podemos clasificar los pigmentos con criterio químico, según sea su procedencia, en naturales y elaborados.

Pigmentos. Clasificación según su origen.

Naturales	minerales. vegetales. animales.
Elaborados	minerales. orgánicos.

Los naturales son ofrecidos por los minerales, por los animales y por los vegetales. Los elaborados pueden obtenerse de productos minerales ú orgánicos.

Los primeros pigmentos que el hombre conoció y usó fueron los naturales de procedencia mineral. No ofrecen, desde luego, ningún interés bioquímico, razón por la que no nos detendremos ni en su enumeración (rojo de cinabrio, blanco, de barita, azul de montaña [azurita], etc.).

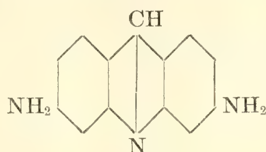
Otro tanto diremos acerca de los pigmentos minerales elaborados por el hombre, que se usan generalmente en los casos en que el material a colorear deba ser sometido a elevadas temperaturas: vidrios, cristales, lozas, porcelanas, cerámicas, etc. (Se proyectaron láminas en colores de cubiletes de los indios del Chaco santiagueño).

Por lo que concierte á los pigmentos naturales de los seres vivientes, ya sean animales ó vegetales, deberemos extendernos dentro de un instante. Postergamos por unos minutos su consideración en particular.

Nos resta mencionar los pigmentos orgánicos, preparados por el hombre. Son de excepcional importancia para el mundo civilizado. Se adivina fácilmente que me estoy refiriendo a las innumerables materias colorantes que, obtenidas por vía sintética, nos brinda la química orgánica y entre ellas a las derivadas de la anilina. Algunas de ellas ofrecen interés bioquímico. Concretémosnos a citar algunos ejemplos.

La quimioterapia a base de colorantes acridínicos y en especial de la 3-6 diamino acridina (tripaflavina) ha evitado muchísimas

amputaciones en casos de heridas infectadas de los miembros. También se emplea hoy con fines antisépticos otro colorante acridínico,

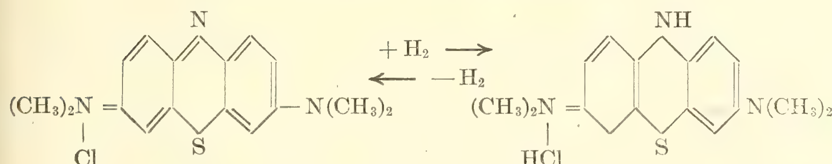


el *rivanol,* o sea 2-etoxi-6-9. diaminoacridina.

Aunque más no fuera con el objeto de tributar homenaje a la obra del gran Ehrlich, creador de la quimioterapia, no podemos dejar de mencionar sus estudios acerca de la distribución de los colorantes en el organismo a raíz de su inyección, lo que lo condujo al descubrimiento de los lugares en que con mayor intensidad se operaban los procesos íntimos de su oxido-reducción.

Sabido es que Ehrlich utilizó en sus primeros experimentos el azul de metileno, el cual, con gran sorpresa, vió que se transformaba en su leucoderivado por hidrogenación. Los pigmentos naturales,

Azul de metileno. Su óxido-reducción.



ya provengan de las plantas o de los animales, incluídas bacterias y protozoarios son, desde luego, para nosotros, los más interesantes. Tales pigmentos, cuya consideración habíamos diferido hace unos minutos, pueden clasificarse para estudio según su constitución química, su procedencia, su distribución topográfica y según su función.

De acuerdo a su procedencia, los pigmentos, tanto de animales como de vegetales, pueden agruparse en exógenos cuando provienen de otro organismo y han sido ingeridos con el alimento.

Los pigmentos endógenos son los formados en el propio organismo. Atendiendo a su distribución topográfica, los pigmentos vegetales pueden designarse pigmentos de tallos, de hojas, de flores, de frutos, de raíz, etc., o sea pigmentos foliáceos, radiculares, etc. Con igual criterio, los pigmentos animales se distinguen así: pigmentos

tegumentarios, musculares, nerviosos, glandulares, sanguíneos, biliares, urinarios, etc.

Por lo que concierne a su constitución química, con los pigmentos naturales pueden establecerse diferentes tipos:

Pigmentos. Clasificación por su constitución química.

1) Serie terpénica. (Carotenoides, caroteprótidos, etc.).
2) Ternarios sin N. serie cíclica (antraquinonas).
3) Pirónicos.
4) Lipídicos.
5) Indólicos.
6) Tetrapirrólicos.
7) Protídicos (Ficocianina, ficoeritrina, etc.).
8) De desintegración protídica (melaninas, etc.).
9) De desintegración nucleínica (púricos).

Y por último, si se concede preferencia a su función, ensayaríamos una clasificación de los pigmentos de animales y plantas en la siguiente forma:

Pigmentos. Clasificación según su función bioquímica

a) Anabolizantes.
b) Metabolizantes.
c) Regresivos.
d) Defensivos.

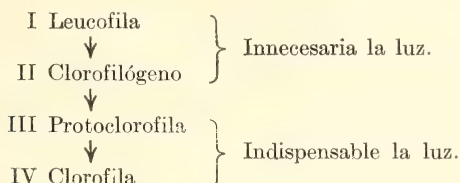
Como estamos estudiando los pigmentos en jurisdicción de la bioquímica, adoptaremos un temperamento ecléctico: consideraremos la estructura química y la función de los pigmentos más importantes.

IV. — Pigmentos anabolizantes o ciclogenéticos

La clorofila, ese maravilloso pigmento intracelular que al decir de Darwin, y cabe repetirlo, es la sustancia orgánica más importante, nos oculta aún el secreto de su formación en los cloroplastos de la célula vegetal. Los perseverantes esfuerzos de los investigadores han permitido, no obstante, establecer que el mecanismo de su génesis, extraordinariamente complejo, está condicionado por diferentes factores de orden físico, químico y fisiológico. La elaboración del pigmento comprende varias fases. En primer término, según las hipótesis más aceptadas, apareecría un *cromógeno* incoloro que algunos autores denominan *leucofila.* Luego de éste, derivaría un pig-

mento muy inestable, el *clorofilógeno*. Estas dos etapas se cumplirían sin necesitar la intervención de la luz. Posteriormente, el clorofilógeno, bajo el influjo de la energía radiante se convertiría en *protoclorofila*, la que en última instancia y también en presencia de la luz se transformaría en *clorofila*:

Génesis de la clorofila.



Apresurémosnos a reconocer que numerosas observaciones experimentales están en pugna con esta hipótesis. En ciertos casos la clorófila aparece en ausencia de toda radiación lumínica. Por otra parte, del sol no sólo recibe la planta radiaciones luminosas, sino también calóricas. Y este último, constituye otro factor indispensable en la clorofilogénesis.

Pasando ahora al aspecto químico del proceso, si se quiere más complejo aún que el anterior, recordemos que los investigadores han establecido que algunos factores son indispensables y otros solamente útiles o convenientes. El oxígeno, el magnesio y algunos glucósidos, por ejemplo, figuran entre los primeros. Ciertos metales, como el hierro, revistarían entre los segundos. Para algunos, el hierro catalizaría la síntesis de los cuatro núcleos pirrólicos. El hierro ha podido ser reemplazado en esta acción por otros metales.

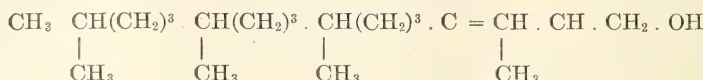
Por razones de tiempo, no podemos, en esta exposición de conjunto, profundizar en este apasionante aspecto del problema, como tampoco glosar las controversias entre quienes afirman que ciertos animales inferiores (infusorios, etc.) elaboran la clorófila que contienen y los que sostienen que dicho pigmento es propiedad de ciertas algas que viven en simbiosis con el huesped animal.

Tampoco me sería posible detenerme a considerar con la minuciosidad con que lo hago en las lecciones dictadas en mi cátedra, los admirables estudios de Willstätter y su escuela, los de Hans Fischer y Gottwalt Fischer, los de Baly, etc., acerca de la arquitectura de las moléculas de las diferentes clorofilas y cuerpos precursores ó derivados, de sus respectivas síntesis, así como del mecanismo de la edificación de la primera molécula orgánica a partir de las de CO_2 y H_2O.

Intentaré un resumen lo más conciso posible de lo fundamental de estos problemas.

Las clorofilas resultan de la asociación de un pigmento y de un alcohol etilénico de elevado peso molecular, el fitol. Gottwalt Fischer estableció definitivamente la constitución del fitol en 1928 y efectuó su síntesis en 1929.

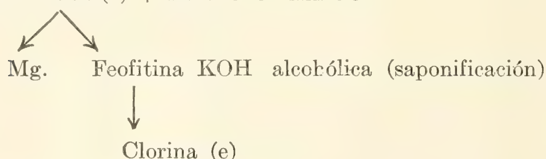
Fitol.



2.6.10 14 tetrametilhexadecene-ol 16. (Gottwalt Fischer). Liebig Ann. 1928, **464**, 69.

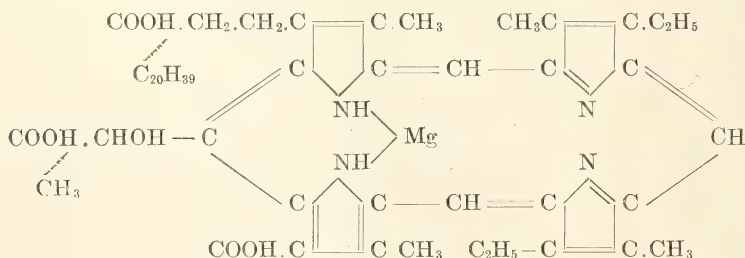
La parte colorante de la clorofila contiene magnesio. Este átomo de magnesio puede ser amputado por acción del ácido oxálico; dos átomos de hidrógeno substituyen al metal y se llega así a la feofitina. Por rápida saponificación de la feofitina por potasa alcohólica se obtiene la clorina [*e*] o rodina [*g*] según se haya partido de clorofila [*a*] o [*b*], respectivamente:

De la clorofila (*a*) *a la clorina.*



La clorina es una molécula complejísima, de cuatro núcleos pirrólicos, a la que Hans Fischer asigna la siguiente fórmula estructural:

Clorina e (Hans Fischer)

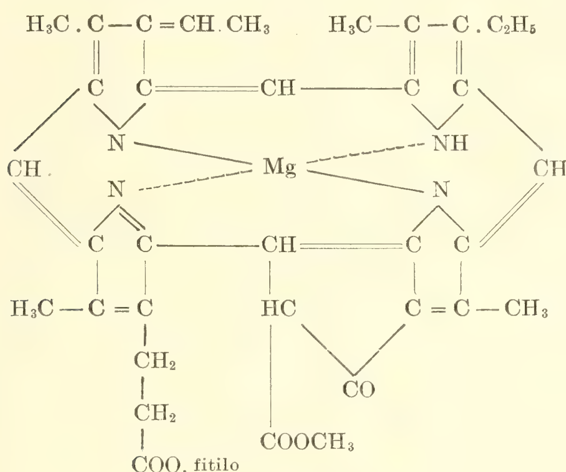


Con las substituciones marcadas en línea punteada se llega a una fórmula estructural provisoria de la clorofila a.

Liebigs Ann. 1931. **486**. 107.

Este mismo investigador propone para la clorófila [*a*] una fórmula que sería la de la clorina, en la cual se ha substituído un hidrógeno de un grupo carboxílico por un resto $C_{20}H_{39}$ que deriva del fitol; otro hidrógeno de otro grupo carboxílico por un radical metílico y además dos átomos de los hidrógenos unidos al *N* por un átomo de Mg que quedaría sometido a la influencia de los cuatro átomos de *N*.

Clorofila (a). Fórmula estructural probable.



Fischer y Hassemkamp (1934).

Sabido es que aliados inseparables de las clorófilas, en los cloroplastos o cloroleucitos, son los pigmentos amarillentos designados carotenoides. Estos pigmentos ofrecen gran importancia bioquímica por sus relaciones genéticas con la clorofila, con las vitaminas y con los perfumes naturales.

Los carotenoides actualmente conocidos con relativamente numerosos. Algunos hidrocarburos, como el carotene descubierto en 1831 por Wackenroder en la zanahoria, otros alcoholes como la xantófila, otros cetonas y otros ácidos.

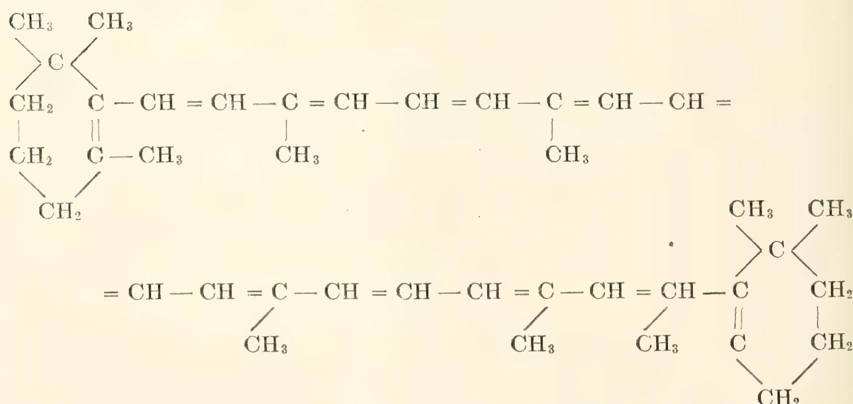
Zechmeister los ha reunido en un cuadro:

Carotenoides (Zeckmeister). 1934.

Función	Nombre	Fórmuia
Hidrocarburos .	α carotene	$C_{40} H_{56}$
	β carotene	$C_{40} H_{56}$
	γ carotene	$C_{40} H_{56}$
	licopene .	$C_{40} H_{56}$
Alcoholes	Criptoxantina	$C_{40} H_{56} O$
	Rubixantina	$C_{40} H_{56} O_2$
	Xantofila (luteína) . .	$C_{40} H_{56} O_2$
	Zeaxantina . . .	$C_{40} H_{56} O_2$
	Flavoxantina . . .	$C_{40} H_{56} O_3$
	Taraxantina.	$C_{40} H_{56} O_4$
	Violaxantina .	$C_{40} H_{56} O_4$
	Flucoxantina	$C_{40} H_{56} O_6$
Cetonas.	Rodoxantina	$C_{40} H_{50} O_2$
	Capsantina . .	$C_{40} H_{58} O_3$
	Capsorubina .	$C_{40} H_{58} O_4$
Acidos	Bixina	$C_{25} H_{30} O_4$
	Crocetina.	$C_{20} H_{24} O_4$
	Azafrina	$C_{26} H_{38} O_4$

Nosotros tendremos que aludir dentro de un instante a los carotenes y a la xantófila. La fórmula estructural del carotene es la siguiente:

β. Carotene



Estos cuerpos colorantes, llamados polienes, están constituídos por un largo sistema cromófero con dobles ligaduras y una cadena abierta con grupos metílicos laterales a ella adheridos.

En punto a la formación natural de los carotenoides, sólo hipótesis se pueden formular para explicarla.

Willstätter fué quien primero advirtió que el número de átomos de carbono de la molécula de los carotenoides es un múltiplo de los del isoprene: C_5H_8, o sea $CH_2 = C — CH = CH_2$.

Por polimerización del isoprene se llega a los terpenes; por ejemplo, el limoneno que existe en la esencia del limón, naranja, etc. Por hidrogenación y simultánea polimerización se origina el fitol. Por deshidrogenación (oxidación) y polimerización se forman los colorantes poliénicos.

Corresponde recordar aquí que en los órganos de vegetales y animales, los carotenoides y lipocromos se hallan frecuentemente disueltos en los lipoides. Algunos investigadores admiten que los tejidos vivientes pueden efectuar la síntesis de tres especies de lipoides:

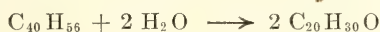
a) Cuando son esterificados alcoholes incoloros por ácidos grasos incoloros, se originan las grasas ordinarias, lecitinas y esteres de esteroles.

b) Si cierto ácido coloreado se combina con el fitol, se ha realizado la síntesis de la clorofila.

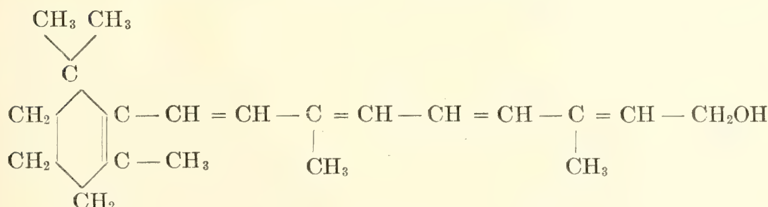
c) Si ácidos incoloros forman esteres con alcoholes pertenecientes al grupo de los carotenoides, se han originado las ceras coloreadas.

No podemos despedirnos de los carotenoides sin mencionar que sobre la base de nutridas pruebas experimentales, se acepta hoy que el carotene es la provitamina A que se transforma en el hígado por hidrólisis en dos moléculas de vitamina A.

Carotene y vitamina «A» (Karrer).



$$C_{40}H_{56} + 2\,H_2O \longrightarrow 2\,C_{20}H_{30}O$$



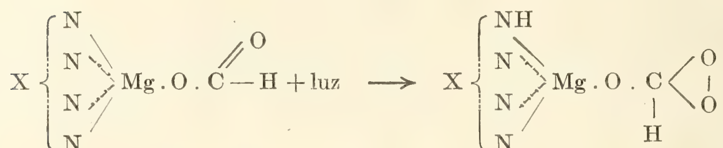
En cierta época sostuvo Willstätter en su teoría de los cuatro pigmentos que en el proceso de la fotolisis del CO_2 intervenían sucesivamente la clorofila [*a*], la [*b*], la xantofila y el carotene.

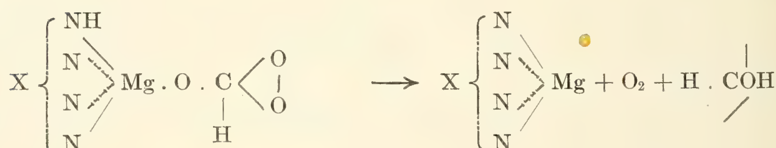
En punto al mecanismo de la fotosíntesis, recordemos que sólo hipotéticamente puede ser hoy explicado. De entre las numerosas teorías, destacaremos dos. La teoría bioquímica de Willstätter y Stoll es llamada también la teoría trifásica.

Teoría bioquímica de Willstatter y Stoll.



Clorofila + ácido carbónico ⟶ carbonato de clorofila





La reacción de adición del CO_2 y de la clorofila daría como resultado la formación de un carbonato de clorofila, o sea de una combinación carboxilada (1ª fase). Luego la luz al ser absorbida por el carbonato o combinación carboxilada provocaría la transposición del grupo CO_3H en un peróxido (2ª fase). Y esta forma peroxidada se transformaría en seguida con desprendimiento de oxígeno, liberación del grupo oximetilénico y regeneración de la clorofila (3ª fase).

Willstätter y Stoll sostienen que todas estas transformaciones obedecen a acciones diastásicas.

La otra teoría cuya mención no puedo omitir, es la física o, mejor, fisicoquímica del investigador inglés Baly y sus colaboradores. Ella se funda en la acción preponderante de las acciones de superficie. Baly descubrió en 1927 que haciendo pasar una corriente de CO_2 por agua que tenga en suspensión cuerpos sólidos finamente divididos: hidrato de aluminio, carbonato básico de aluminio, de zinc o de magnesio, se comprueba la formación de pequeñas cantidades de glucidos, de osas, si se irradia el agua por R. U. V. Si la materia

en suspensión es coloreada (carbonato de Ni o Co) con la luz visible de una lámpara ordinaria a filamento de tungsteno, se logra igualmente la formación de osas.

En las condiciones naturales, según Baly, la energía necesaria para la síntesis fotoquímica sería aportada en dos fases: primeramente cierta energía sería conferida al CO_2 por el propio fenómeno de adsorción. El CO_2 experimentaría así una verdadera activación y este primer aporte de energía bastaría para que la luz pudiera en seguida, provocar la transformación en osa. Habría, pues, sucesivamente intervención de energía superficial y de energía luminosa. La luz intervendría en dos fases: en la primera, para activar la superficie del cuerpo coloreado, o sea del pigmento clorofílico, y en la segunda para descomponer indirectamente el ácido carbónico preparado por la adsorción para su transformación en osas.

No podemos discutir aquí la genealogía de los cuerpos orgánicos originados por la fotosíntesis clorofílica. ¿La molécula primogénita es la aldehida fórmica, el ácido fórmico o el alcohol metílico? La clásica hipótesis de Bayer constituye el eje de tan prolongada controversia.

Lo importante es que después, por polimerizaciones, se generan monosacáridos, disacáridos, polisacáridos; luego, en medio reductor, las grasas, carotenoides, fosfatidos, esteroles, alcaloides, glucósidos, protidos, etc., es decir, toda la gama de las moléculas orgánicas acíclicas y cíclicas cuya ontogenia y filogenia son tan interesantes.

La clorofila ha operado la síntesis de la primer molécula orgánica y luego, ya sea directa o indirectamente, su ciclización.

El ejemplo más accesible lo tenemos en la transformación de la glucosa en inosita.

Vimos ya que la ciclización de las moléculas implica la adquisición de mayor idoneidad y jerarquía para el cumplimiento de las funciones bioquímicas. Los cuerpos acíclicos son excesivamente sensibles y vulnerables. Los núcleos confieren a las moléculas mayor estabilidad, es decir mayor suavidad reaccionante. Los pigmentos clorofílicos y hemáticos son por tal razón, de muy compleja extructura molecular cíclica.

Los vegetales poseen mucho más marcada aptitud de ciclización que los animales. Muchas moléculas cíclicas o heterocíclicas son suministradas por los primeros a los segundos.

La clorofila capta energía radiante de origen solar, sintetiza moléculas orgánicas que luego, por adecuada ciclización, se adaptan a las necesidades del intercambio fisiológico.

(Concluirá)

HESPERIOIDEA ARGENTINA VI

Por KENNETH J. HAYWARD

F. R. E. S., F. R. G. S., F. Z. S.

Con el presente trabajo, en el que se agrega un género y siete especies de *Hesperioidea* a la fauna argentina, el total de estas últimas determinadas como argentinas, hasta la fecha, llega a 348; quedan aún en mis manos unas cincuenta especies en estudio.

Pyrrhopyge zeleucus Fabr.

1783. Fabricius, « Ent. Syst », 3 (1): 346-347.
1921. « Draudt en Seitz Macrolep. », 5: 837, pl. 162 b.
1931. *Pyrrhopyge williamsi* Bell, « Journ. N. Y. Ent. Soc. », 39: 340, pl. 35, fig. 4, (genitalia).

Esta especie fué citada como argentina por Hayward en *Rev. Soc. Ent. Arg.* 5: 26, 1932, por error, tratándose de *Pyrrhopyge charybdis* Fabricius.

Hay en la colección Breyer un ejemplar muy gastado de este insecto de procedencia Misiones.

Orlas blancas, obscuras hacia el ápice del ala anterior. Las alas negras con un brillo azulado y sin diseño. Tegulae negras; pectus negro; palpos, cabeza, collar y segmento anal rojos; patagia negra, a veces con algunos pelos rojos como en el ejemplar aquí citado.

Telegonus aulestes (Cr.)

1782. *Papilio aulestes* Cramer, « Pap. Exot. », 3: 161, pl. 283, figs. E, F. G.
1791. *Papilio narcosius* Stoll, « Supl. Cramer's Pap. Exot. », p. 171, pl. 39, fig. 8.
1893. *Thymele aulestes* Godman & Salvin, « Biol. Centr. Amer. Rhop. », 2: 315, pl. 78, fig. 15 (genitalia).
1922. *Thymele aulestes* « Draudt en Seitz Macrolep. », 5: 866, pl. 168 d.
1927. *Telegonus aulestes* Williams, « Trans. Ent. Soc. Amer. », 53: 274, fig. 15 (genitalia).

Muy parecida a *Telegonus enotrus* Cramer, de la que difiere principalmente por tener el ápice de las alas anteriores menos truncado, y el color de fondo negro bien verdoso y los pelos con que se encuentran cubiertos el tórax, abdomen y base de las alas verdes en vez de un color azul. El diseño consiste en una hilera oblicua mediana de cuatro manchas hialinas blancas, sus bordes proximales y distales rectos y no cóncavos (salvo, a veces, en el caso del borde proximal de la mancha inferior) y la mancha en la primera célula cubital bastante alargada. Arriba de esta mancha hay un puntito hialino en el ápice de la célula mediana inferior. En la faz inferior la mancha inferior de la hilera mediana es difusa sobre un área blanquizca y el ala posterior algo más grisácea que en *enotrus*. Exp. alar de la hembra 55 mm.

Tengo en mi colección una hembra del norte de Corrientes, (Hayward, 1935).

Pellicia castolus Hewitson. Fig. 1.

1922. « Draudt en Seitz Macrolep. », 5: 892, pl. 174 e.

Tengo en mi colección ejemplares de una *Pellicia* del Paraguay y de Loreto de Misiones (*Ogloblin*) que parecen pertenecer a esta especie. Color de fondo de ambas fases marrón café, algo más pálido en la faz inferior. En el ala anterior hay tres puntos pequedos hialinos subapicales en forma curva, el inferior algo distad a los otros. En la faz superior hay una faja obscura post-basal en ambas alas. En el ala anterior hay una faja obscura mediana muy hinchada en el disco y terminando en forma aguda sobre el margen interior; basad a los puntos subapicales se encuentra una mancha obscura y desde el punto inferior una línea obscura que une con la faja mediana en M3. Hay también finas líneas obscuras marginal y antimarginal. En el ala posterior la faja mediana lleva una serie de puntos redondeados más claros y la línea antimarginal es una serie de pequeñas curvas.

El diseño de la faz inferior es igual, pero más definido por ser sobre un fondo algo más claro. La faja post-basal falta en el ala anterior y la base del ala posterior es obscura. Expansión alar 26-27 mm.

En el dibujo de sus genitales se encuentra solamente la válvula izquierda (las válvulas son asimétricas) debido a la rotura de la válvula derecha durante su preparación.

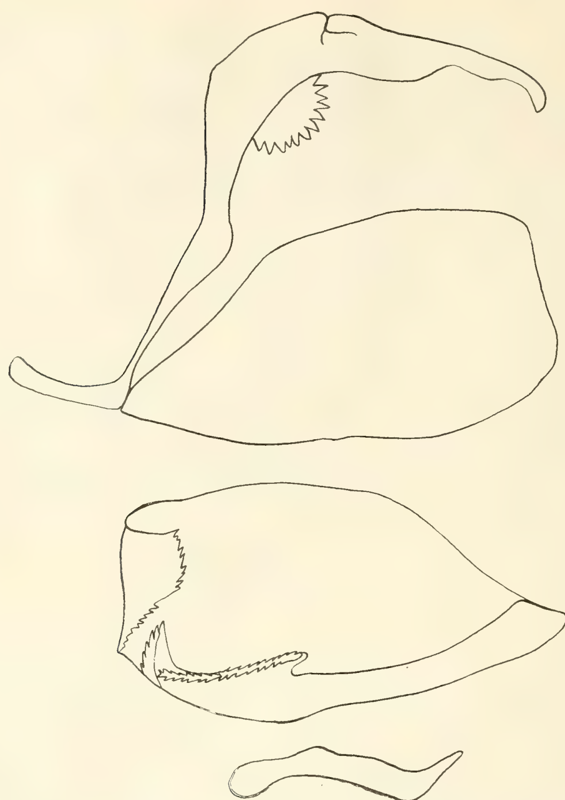


FIG. 1. — *Pellicia castolus* Hew. ♂, (Uncus, aedoeagus y válvula izquierda).

Dardarinia salta EVANS. Fig. 2.

1937. Evans, « Rev. de Entom. », 7 (1) : 89.

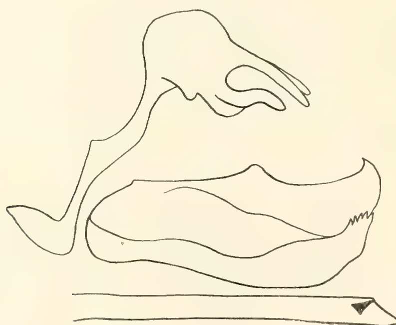


FIG. 2. — *Dardarina salta* Evans ♂

Doy un dibujo de los genitales de los machos de esta especie. En adición al holotipo macho de Salta que se encuentra en la colección

del Museo Británico en Londres, hay en mi colección dos machos de La Rioja que han sido comparados con el holotipo.

Hylephila phylaeus Drury

Una nueva procedencia para esta especie en la Argentina es Valle Fértil en el norte de San Juan, (Hayward, junio de 1933).

Genero Trioedusa Mabille

1904. Mabille, « Gen. Insect. Hesp. », p. 145.

Maza de la antena larga, fusiforme; palpos con el último segmento cónico y erguido. M2 del ala anterior nace cerca de M3; la mediana hinchada hacia su base y especialmente en su faz inferior; Cu2 algo angulada donde toca contra la parte inferior del estigma. El estigma en tres partes; la superior negro aterciopelado, la parte media bordeada de gris y la parte inferior redondeada y pilosa; la parte superior contra la célula, la parte media sobre Cu1 y la parte inferior sobre Cu2. Tibias posteriores desnudas con solamente un par de espolones terminales. Hay una sola especie.

Trioedusa milvius Mab Fig. 3.

1904. Mabille, « Gen. Insect. Hesp. », p. 145.
1924. « Draudt en Seitz Macrolep. », 5: 948, pl. 183 h.

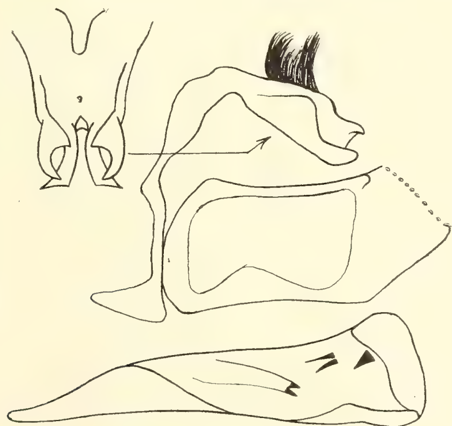


Fig. 3. — *Trioedusa milvius* Mab. ♂ (con vista ventral del uncus).

♂. Color de fondo de la faz superior pardo, el área costal hasta ½ de color amarillo-ocre y hay pelos de este color en el tórax y

abdomen y en las bases de las alas. En el ala anterior hay tres puntos amarillos subapicales seguidos por una hilera post-distal de puntos y manchas del mismo color, los dos puntos superiores distad a los otros, la manchita inferior excavada distalmente.

En el ala posterior hay una hilera post-discal entre R y Cu1 compuesta de pequeñas máculas amarillas. Las orlas más claras que el color de fondo.

En la faz inferior el color de fondo es un amarillo-ocre, el borde externo del ala anterior algo más obscuro y el disco del ala y el borde interno negros. El diseño es igual al de la faz superior, pero las manchitas de la hilera post-discal del ala anterior que se encuentran sobre la parte negra del ala son ensanchadas y algo más blanquizcas. Además hay un punto amarillo en el fin de la célula. En el ala posterior la hilera de máculas amarillas de la faz superior se nota indistintamente. Expansión alar 34 mm.

El dibujo de sus genitales que se encuentra en este trabajo es incompleto porque las puntas de ambas válvulas faltaban al preparar estos órganos.

Este insecto es conocido de Brasil y Paraguay y hay en mi colección un ejemplar de Puerto Aguirre en Misiones.

"**Prenes**" **nyctelius** Latr. Fig. 4.



Fig. 4. — *Prenes nyctelius* Latr. ♂

1862. Latreille, « Verh. Zool-Bot. Ges. Wien », p. 477.
1934. Hayward, « Rev. Soc. Ent. Arg. », 6: 132, lám. 7, fig. 13 y lám. 17, fig. 7 (genitalia).

Hasta que la afinidad de las varias especies que hoy día incluímos en el género « *Prenes* » (ahora *Panoquina* Hemming), se haya debidamente aclarado, prefiero seguir usando el nombre de *Prenes* arriba citado para evitar confusión.

Hay en mi colección un macho de esta especie y una hembra, ambos de procedencia de Misiones. Aprovecho esta oportunidad para dar un dibujo más claro que el de mi trabajo anterior, de los genitales del macho.

" Prenes " luctuosa Herrich Schäffer

1869. Herrich-Schäffer, « Podr. Syst. Lepid. », 3: 73.
1924. « Draudt en Seitz Macrolep. », 5: 939, pl. 183 k.

La especie *luctuosa* es más grande que la mayoría de las especies de este género y es muy fácil separarla de las demás especies argentinas. El color de fondo de la faz superior es marrón negruzco, El tórax, abdomen, base del ala (en forma de rayas) y borde interno hasta $^2/_3$ del ala anterior y base y disco del ala posterior cubiertos con pelos de color ocre. El diseño del ala anterior consiste en tres puntos alargados amarillos hialinos subapicales, la distancia entre 2 y 3 doble del entre 1 y 2. En el fin de la célula hay un punto pequeño lineal amarillo hialino; en la base de la primera célula cubital una mancha igual de forma triangular, su lado distal cóncavo; otra manchita en el ápice de la tercera célula mediana y una mancha lineal en la segunda célula cubital sobre la nervadura analis.

El diseño de la faz inferior es igual, pero la mancha lineal de la segunda célula cubital es blanquizca. En el ala posterior hay una faja blanca post-discal desde la costa hasta la primera nervadura analis aumentando en anchura desde la costa hasta la segunda célula cubital. Expansión alar ♀ 48 mm.

Hay un ejemplar hembra en mi colección de El Dorado en Misiones, recibido de mi amigo el Padre Gottschalk.

Vacerra evansi nov. Fig. 5.

Expansión alar 38-40 mm.

Color de fondo marrón pardusco, tórax, abdomen y base de las alas cubiertos con pelos verde-grisáceos.

En el ala anterior hay tres puntos lineales subapicales, su borde próximo en línea recta, el punto inferior más largo que los otros.

En el fin de la célula hay una manchita hialina blanca que consiste en dos puntos, la costad lineal, unidos por lo general, pero bien separados en un ejemplar que tengo. Además existe una hilera de tres manchas medianas, una en el ángulo de la célula mediana inferior, su lado distal algo cóncavo, otra grande en la primera cé-



FIG. 5. — *Vacerra evansi* Hayw. ♂ holotipo, (con vista ventral del uncus).

lula cubital, su lado inferior doble del largo de su lado superior, y debajo de esta mancha hialina y más basad, otra más opaca y más amarillenta. En el ala posterior se encuentran indicaciones de la faja post-mediana de la faz inferior.

El color de fondo de la faz inferior del ala anterior es más claro que el de la faz superior, la maculación igual a la de la faz superior, pero la mancha mediana inferior mucho más grande. El área costal hasta ½ donde termina en una mancha clara, más clara que el color de fondo.

El color de fondo del ala posterior marrón claro con una fina faja blanca entre la costal a $^{2}/_{3}$ y el ángulo anal en C2. En la base de las alas posteriores hay muchas escamas grises por lo cual el ala tiene un tono casi oliváceo. En algunos ejemplares se encuentran rastros de un punto pequeño claro en la terminación de la célula de esta ala, en otros ejemplares falta.

Holotipo macho y alotipo hembra y un paratipo macho, preparación de la genitalia de holotipo (preparación Nº 253), todos en mi colección de procedencia norte de Misiones. Hay también un ejem-

plar macho en la colección del Museo Británico en Londes y un paratipo macho en la colección Breyer de la misma procedencia. En el Museo Británico hay también dos ejemplares de Bahía en el Brasil (*teste* Evans).

Dedico esta especie a mi amigo Brig. Gen. W. H. Evans del Museo Británico.

Niconiades merenda Mab. Fig. 6.

1878. *merenda* Mabille, « Petit. Nouv. Ent. », p. 202.
1883. *sabaea* Plötz, « Exot. Schmett. », 20. Hesp. tab. 560.
1902. *merendula* Schaus, « Proc. U. S. Nat. Hist. Mus.», p. 439.

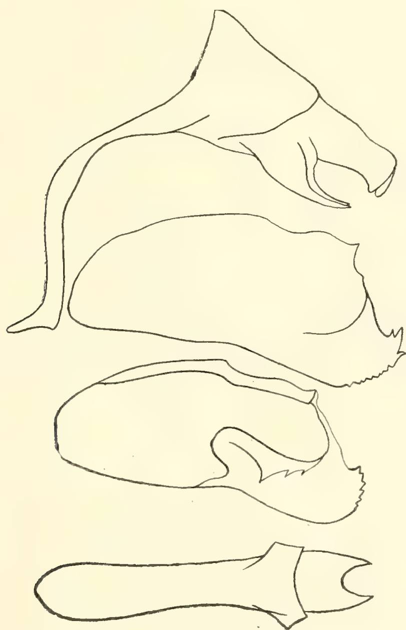


Fig. 6. — *Niconiades merenda* Mab. ♂, (la vista del aedoeagus es dorsal).

La hembra de esta especie fué tratada bajo el nombre *merendula* Schs. en mi *Hesperioidea Argentina* V. Evans ha señalado (*in lit.*) que *sabaea* Plötz y *merendula* Schaus no son otras cosas que *merenda* Mabille y que la figura de *sabaea* en Seitz 5, pl. 185 f. representa *merenda,* pero que la figura de *merenda* (*l. c.,* figs. d y e) es de otra especie. El macho no difiere mayormente de la hembra.

A la descripción ya publicada (*Hesp. Arg.* V) puedo agregar que el punto subapical superior del ala anterior a veces falta. Tengo en mi colección dos ejemplares del norte de Misiones.

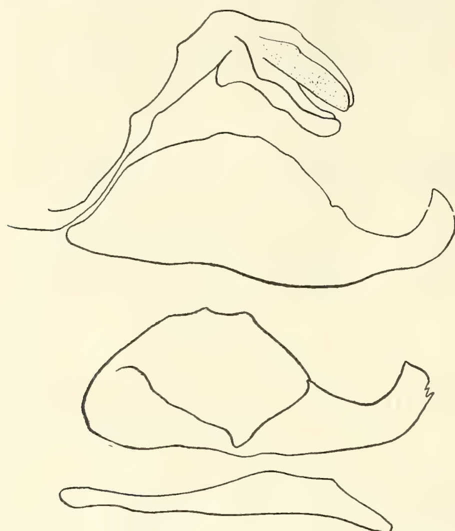


FIG. 7. — *Paracarystus evansi* Hayw. ♂ holotipo.

Paracarystus evansi nov. Fig. 7 y 9.

Expansión alar variable entre 30-34 mm.

Difiere de *Paracarystus rona* Hew. en no tener los dos puntos en el fin de la célula discoidal del ala anterior y de esta especie y

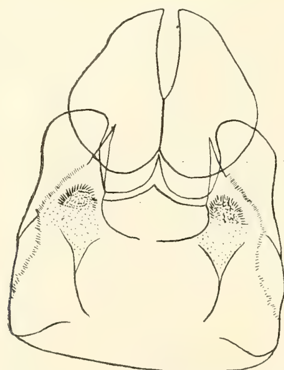


FIG. 8. — *Paracarystus rona* Hew. ♀ (terminación de la genitalia).

de *Paracarystus menestriesi* Latreille en la coloración de la faz inferior de las alas posteriores.

Faz superior como en *rona* con la excepción arriba mencionada.

Faz inferior con la costa y ápice del ala anterior violeta y con

una manchita del color de fondo en el ápice, las manchas maculares obscuras internervales que se encuentran en *rona* reducidas a puntos pequeños o, a veces, faltan por completo. El diseño del ala posterior es igual al de *rona,* pero en vez de tener un fondo algo verdoso, es en *evansi* violeta blanquizca, más claro entre las dos fajas y en el área anal; el área costal algo pardusco; las dos fajas transversales maculares en vez de ser continuas. El fondo de esta ala es mucho más claro que en *rona.*

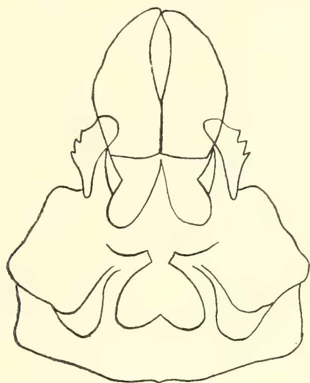


FIG. 9. — *Paracarystus evansi* Hayw. ♀ paratipo, (terminación de la genitalia).

Según el Brig. Gen. W. H. Evans, a quien dedico esta especie, *rona* Hewitson (1866, *Trans. Ent. Soc. Ldn.* 11: 499) y *menestriesi* Latreille (1823, *Encycl. Méth.* 9: 760) y la especie aquí descripta, son todas formas de una especie.

No tengo disponible ejemplares de *menestriesi* (según Evans del Amazonas hasta el sur del Brasil) ni machos de *rona* (Colombia hasta Amazonas, según Evans, y en mi colección también del Perú y de Misiones en la Argentina), pero hay una marcada diferencia entre la terminación anal de las hembras de *rona* y *evansi* (ver las figuras), por lo cual sospecho que se trate en este caso de dos buenas especies.

Patria: Brasil (Espírito Santo en col. Mus. Brit. Londres) y Argentina (Misiones). Holotipo ♂ y paratipo ♀ en mi colección y alotipo ♀ en la col. Mus. Arg. Ciencias Nat. Bs. Aires (Nº 37109), todos de puertos Aguirre y Bemberg en Misiones, (Hayward, 1934). Preparación de la genitalia del holotipo macho (Nº 260) y del paratipo hembra (Nº 258) en mi colección.

Las partes anales de las hembras de *rona* y *evansi* han sido dibujadas en un solo plano.

Concordia, 21 de noviembre de 1937.

ACERCA DE LA IRREGULARIDAD DE LA PRODUCCION OLIVICOLA EN ARAUCO (LA RIOJA)

Por el Ing. Agr. A. L. DE FINA (1)

Durante un período de diez años, el señor GUILLERMO A. OVALLES, Intendente de Riego de Arauco, La Rioja, ha efectuado valiosas observaciones sobre la vegetación del olivo en esa región, importante centro olivícola de la República.

En posesión de tal caudal de datos, deseando que ellos fueran aprovechados por quienes se dedican al cultivo o estudio del olivo, el señor OVALLES entregó a mi colega, Ing. Agr. ENRIQUE C. CLOS, un informe conteniendo sus observaciones.

Dado que en nuestro país existe una marcada escasez de datos originales referentes al cultivo del olivo, y satisfaciendo el deseo del señor OVALLES, el Ing. CLOS me solicitó la redacción del presente comentario sobre dichas observaciones.

En la región de Arauco, de la provincia de La Rioja, situada a 830 metros sobre el nivel del mar, 28° 30′ de latitud Sud y a 66° 45′ de longitud Oeste, se realiza, desde hace muchos años, el cultivo del olivo.

Los suelos de la región son arenosos, la lluvia anual muy escasa, unos 200 milímetros; las heladas poco frecuentes. El cultivo se efectúa bajo riego, el volumen asignado por hectárea es de 1.300 m^3 por riego, el turno de riego es variable según los distritos: en Aimogasta cada 22 días, en San Antonio cada 15 días, en Machigasta cada 24.

El área dedicada a olivares es relativamente grande, pues consta actualmente de 127 hectáreas.

Salvo excepciones, los árboles se hallan plantados en cuadrados de 10 m. × 10 m., es decir que en una hectárea se hallan 100 árboles.

Las plantaciones provienen, en su generalidad, de estacas; la edad de las plantas varía entre 20 y 75 años, en su mayor parte.

(1) Del Laboratorio de Botánica del Ministerio de Agricultura de la Nación (Dirección de Agricultura).

Condiciones meteorológicas reinantes en Arauco (La Rioja), durante la floración y primer desarrollo de los frutos del olivo. Datos del decenio 1927-1936. *Observaciones de* OVALLES

Años	Periodo de floración del olivo	Septiembre					Octubre					Noviembre					Rendimiento por planta
		Temperatura media	Máxima media	Mínima media	Lluvia mm.	Viento dominante	Temperatura media	Máxima media	Mínima media	Lluvia mm	Viento dominante	Temperatura media	Máxima media	Mínima media	Lluvia mm	Viento dominante	kg
1927 . . .	Sept. 2 a oct. 26	13,7	16,3	11,0	0	N	18,6	23,1	14,1	0	N	22,8	28,5	17,0	0	S	35
1928 . . .	Ag. 25 a sept. 30	13,0	18,0	8,0	7	S	19,2	24,0	14,3	4	N	22,9	27,5	18,3	16	N	20
1929 . . .	Ag. 30 a oct. 25	16,4	22,2	10,6	9	N	18,8	24,3	13,2	8	S	24,2	29,3	19,0	0	S	40
1930 . . .	Sept. 10 a nov. 5	16,2	22,1	10,2	0	N	18,2	24,2	12,1	0	S	25,0	30,3	19,6	0	N	25
1931 . . .	Sept. 5 a oct. 30	14,0	20,0	8,0	0	S	22,1	27,2	17,0	0	N	22,0	28,5	15,5	6	S	35
1932 . . .	Ag. 28 a oct. 30	17,4	26,5	8,3	0	S	20,7	27,0	14,3	0	S	23,5	30,0	17,0	0	S	70
1933 . . .	Sept. 2 a oct. 30	16,2	22,3	10,0	0	N	21,8	28,0	15,5	0	N	25,7	33,0	18,4	14	N	10
1934 . . .	Ag. 27 a oct. 30	19,7	26,0	13,4	10	N	17,1	23,0	11,2	0	S	23,0	29,0	17,0	0	S	30
1935 . . .	Sept. 3 a nov. 10	14,2	20,7	7,6	3	S	18,2	25,4	11,0	0	N	24,3	32,4	16,1	10	S	35
1936 . . .	Ag. 25 a oct. 30	17,8	25,4	10,2	0	N	22,5	29,5	15,4	0	N	22,3	29,0	15,6	0	S	12
Promedios	Ag. 30 a oct. 28	15,9	22,0	9,7	2,9	—	19,7	25,6	13,8	1,2	—	23,6	29,8	17,4	4,6	—	31,2

La variedad cultivada es, casi exclusivamente, la denominada *Arauco*, de frutos muy grandes.

La floración del olivo, considerando los 10 años, se ha desarrollado entre el 25 de agosto y el 10 de noviembre, pero la gran floración se produce entre el 10 de septiembre y el 25 de octubre; hace excepción el año 1928, en que la floración terminó el 30 de septiembre (gráfico N° 1).

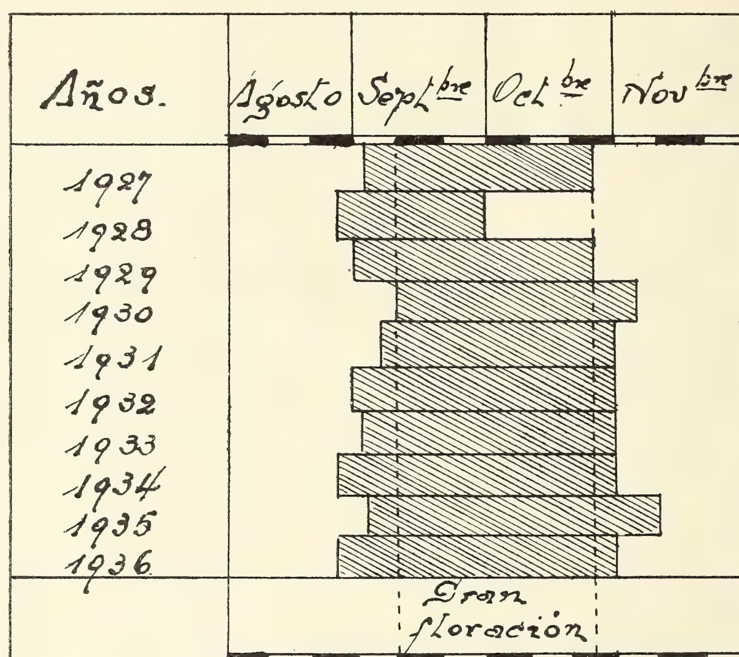


Gráfico N° 1. — Epoca de la floración del olivo en Arauo (La Rioja), durante el decenio 1927-1936. (A. E. Foglia dibuj.).

Según autores europeos y norteamericanos, cuando comienza la floración del olivo, la temperatura media mensual es de 19°; los datos del informe indican que, al comenzar la floración en septiembre, la temperatura media mensual en Arauco es de sólo 15° 9, es decir 3° 1 más baja que la establecida por dichos autores.

En Italia, Briccoli da como fecha inicial de la floración el mes de mayo; dada la diferencia de hemisferio, ella equivale a nuestro mes de noviembre, por lo tanto, en Arauco la floración comienza dos meses más temprano.

Si, además, se tiene en cuenta que la región olivícola italiana se halla situada a una latitud (37° a 46°) mayor que la de Arauco

(28° 30′), resulta que en esta última, la floración se inicia con temperaturas más bajas y días más cortos que los registrados en Italia.

Tal comportamiento señala al olivo, como probable planta perteneciente al grupo de las de fotoperíodo a día corto.

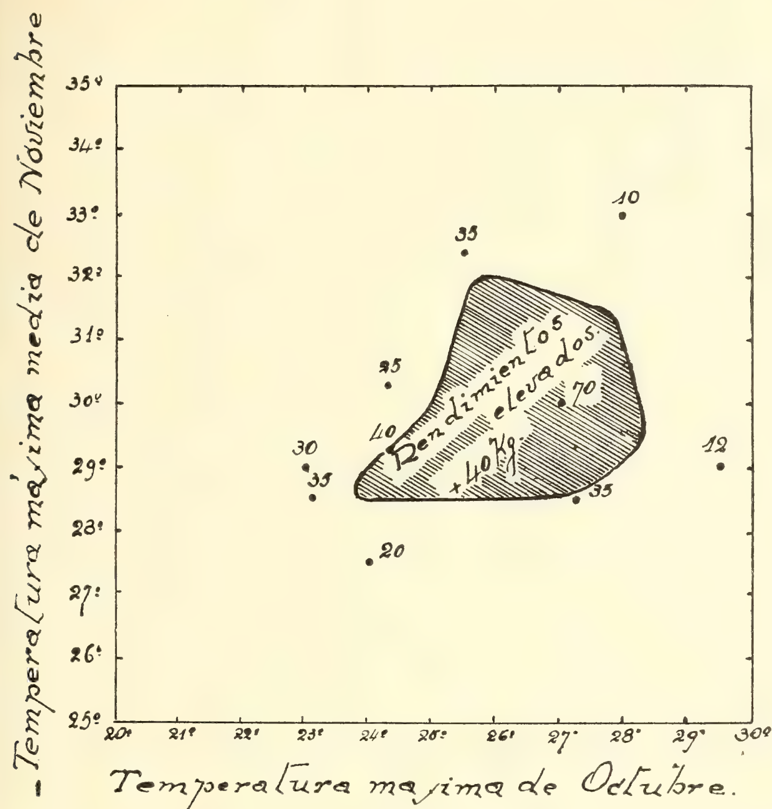


Gráfico Nº 2. — El rendimiento por planta, del olivo en Arauco (La Rioja), relacionado con las temperaturas máximas medias de octubre y noviembre. Datos en kilogramos y correspondientes al decenio 1927-1936. (A. E. Foglia, dibuj.).

OVALLES dá como época normal de cosecha, los meses de marzo, abril, mayo y junio.

El rendimiento medio por planta, durante los 10 años, resultó de 31,2 Kg., pero el rendimiento fué muy variable en el transcurso de los años; el valor más alto corresponde al año 1932/33 con 70 Kg., el más bajo al año 1933/34 con sólo 10 Kg.

Sobre las causas de los rendimientos tan irregulares, existen en la región varias opiniones; OVALLES atribuye los rendimientos muy bajos, a las temperaturas excesivamente elevadas que produce la

persistencia del viento Norte durante la plena floración y primer desarrollo de los frutos. El viento Norte, además, es perjudicial por su violencia, que produce caída de flores y frutos.

A fin de confirmar dicha hipótesis, he construído el gráfico N° 2, en el que correlacioné el rendimiento con la temperatura máxima media de octubre y noviembre.

En el mismo, se rayó la serie de combinaciones de valores de máximas medias de octubre y noviembre que permiten rendimientos elevados, mayores de 40 Kg. por planta.

El gráfico indica cómo las temperaturas muy elevadas disminuyen en forma evidente los rendimientos, como bien lo observó Ovalles. En octubre, durante la floración, son perjudiciales temperaturas máximas medias de 28°; en noviembre, durante el primer desarrollo de los frutos, el efecto pernicioso de las temperaturas se manifiesta cuando la máxima media es de 32°, es decir, el límite es 4° más elevado que durante la floración.

Estos resultados están perfectamente de acuerdo a lo que establece Briccoli para Italia, quien halla que durante la floración, el olivo es perjudicado por temperaturas máximas *absolutas* superiores a los 32° y durante el primer desarrollo de los frutos por temperaturas máximas *absolutas* superiores a los 36°, o sea 4° más altas que durante la floración.

Es necesario aclarar que cuando, en octubre, la máxima *media* es de 28°, la temperatura frecuentemente habrá sobrepasado los 32° fijados por Briccoli; por la misma razón, cuando la máxima *media* de noviembre es de 32°, la temperatura frecuentemente habrá sobrepasado el límite de 36°.

El gráfico N° 2, además, indica que la temperatura muy baja también disminuye los rendimientos.

El resultado final es que, los rendimientos elevados se producen cuando la temperatura, durante la floración y primer desarrollo del fruto, no es ni muy alta ni muy baja.

En términos generales, en Arauco, para obtener buenas cosechas, se requiere que la temperatura máxima media de octubre esté comprendida entre 25° 5 y 27° 5, y la de noviembre entre 29° y 31° 5.

Buenos Aires, Noviembre 8 de 1937.

BIBLIOGRAFIA

LIBROS RECIBIDOS EN LA ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS

POR C. C. D.

Fascículos editados por Hermann & Cía., de la colección « Actualités Scientifiques et Industrielles »; 16 × 35. Número de páginas y precios variables. París.

Nº 453. — MASSON (PIERRE), *Les Glomus Neuro-Vasculaires.* 72 páginas y 44 láminas. Precio: 20 francos. 1937.

Fascículo IV de la serie « Histophysiologie » dirigida por A. Policard, profesor en la Facultad de Medicina de Lyon. El autor lo es en la Universidad de Montreal.

Este trabajo ha sido ejecutado merced a una subvención de « Fonds Rougier Armandie ».

En una Introducción se hace notar que, cuando se discurre sobre la circulación sanguínea, se acostumbra raciocinar como si las arterias y las venas solo se comunicaran entre sí en dos puntos, el corazón y las redes capilares, ley que nada tiene de rigurosa. Hace tiempo que los anatomistas han descripto, con el nombre de *anastomosas arterio venosas,* a ramas arteriales que, en vez de ramificarse y expanderse en capilares, van a abrirse directamente en las venas. Después de un histórico del punto a tratar, el autor desarrolla en cuatro capítulos, sucesivamente: la Anatomía normal, la patológica, la fisiología de los glomos cutáneos y, en un último, el resumen y las conclusiones. 37 láminas coloreadas ilustran el texto y no falta una copiosa bibliografía.

Nº 459 a 461. — JOUNIAUX (M. A.), *Exposés de Chimie Analytique* (Chimie Physique, Minérale et Industrielle). 4 folletos de unas 40 páginas cada uno, con figuras en el texto. Precio: 10 francos cada uno. 1937.

Estas exposiciones del profesor de la Facultad de Ciencias de Lila, tratan, respectivamente: la Colorimetría, la Potenciometría, los Métodos de determinación del Termo de las Reacciones químicas cuantitativas, y la Refractometría.

La Colorimetría se propone determinar el peso de una substancia según la intensidad del tinte que comunica esa substancia, o uno de sus productos de transformación, a un solvente convenientemente elegido, tinte

que se examina por comparación con el de un licor-tipo de concentración conocida.

Respecto de la Potenciometría, el método más sencillo de determinación de la fuerza electromotriz de una pila consiste en compararla con un patrón.

El autor desarrolla estos temas en los dos primeros folletos. Y respecto del tercero, después de una Introducción, expone los procedimientos químicos y los métodos físicos de determinación del termo de las reacciones químicas cuantitativas. El último expone las aplicaciones analíticas de la medida del índice de refracción.

Nº 464. — NOYS (W. ALBERT), *Le Rapport entre la Spectroscopie et les Réactions initiées par la Lumière.* 42 páginas. Precio: 10 francos. 1937.

Contiene una información rápida de las teorías de la espectroscopía de las moléculas simples y complejas. En la fotoquímica hay una tendencia a teorizar sin base experimental sólida. El autor es doctor en ciencias y profesor de Química-Física en « Brown University » (Providence, Rhode Island).

Nº 498. — POULSON (D. F.), *The embryonic Development of Drosophila Melanogaster.* 52 páginas; 32 figuras; 2 láminas fuera del texto. Precio: 15 francos. 1937.

Fascículo III de la serie « Exposés de Génétique » dirigida por Boris Ephrussi, del Instituto de Biología físico-química de París. El autor pertenece al « Wm. G. Kerckhoff Laboratories of the Biological Sciences, California Instituto of Technology, Pasadena ».

Después de una Introducción, el texto, que está descripto en inglés, aborda las siguientes cuestiones: Materiales y Métodos. La Estructura del huevo no fecundado. Maduración, fecundación, esfoliaduras, migración de los núcleos, formación de células polares. Inclusión de éstas y formación de las zonas germinales; orígenes de las zonas germinales. Membranas embrionales. La contracción de las zonas germinales, etc., etc. Al final una bibliografía.

Nº 466. — BINET (LÉON) & WELLER (GEORGES), *Le Glutathon.* 90 páginas. Precio: 20 francos. 1937.

Fascículo IX de la serie « Exposés de Physiologie » dirigida por André Mayer, profesor del « Collège de France » y miembro de la « Academie de Médecine ».

Inicia una Introducción ilustrativa e histórica. En 1921, F. G. Hopkins ha demostrado la existencia en los tejidos, de un producto conteniendo azufre, anunciando haber aislado (partiendo de la levadura, del hígado y del músculo) un compuesto sulfidrilado al que ha atribuído la constitución de un dipéptido formado por una molécula de cisteína unida a una molécula de ácido glutámico, al que ha propuesto llamar « glutaton ».

En cuatro capítulos tratan los autores la constitución de ese cuerpo, su

repartición y metabolismo, su influencia y su relación con la respiración pulmonar, etc.

Las conclusiones son que el « glutaton » contribuye a las oxidaciones y reducciones biológicas, en cuyos dominios su intervención es múltiple y variada.

Trae, al final, una larga bibliografía.

Nº 470. — Collin (Remy), *L'Innervation de la Glande Pituitaire* (Anatomie et Physiologie). 92 páginas con algunas figuras. Precio: 20 francos. 1937.

Fascículo V de la serie « Histophysiologie » dirigida por el profesor Policard. El autor es profesor de la Facultad de Medicina de Nancy y miembro correspondiente de la Academia de Medicina.

El capítulo I de este trabajo trae una Introducción histórica del tema; el segundo se ocupa de la « Inervación hipotalámica de la glándula pituitoria »; el tercero de la inervación simpática de dicha glándula y el cuarto de las vías aferentes a los núcleos vegetativos efectores de la hipófises.

Todo lo anterior se refiere a los *Datos anatómicos,* y constituyen la Primera Parte del trabajo. La Segunda Parte se ocupa de la Fisiología; está desarrollada en cinco capítulos.

Este trabajo ofrece un cuadro de los datos morfológicos, lo más completo posible en el estado actual de la ciencia, respecto de la inervación pituitaria.

Nº 476 a 478. — Escande (L.), *Barrages.* Tres folletos. 94 páginas con 20 figuras en el texto; 12 páginas y 32 láminas fuera de texto; 80 páginas con 141 figuras dentro y fuera del texto. Precios: 20 francos cada uno. 1937.

Forman parte de una serie titulada « Hydraulique (Générale et Appliquée)» dirigida por C. Camichel, miembro del « Institut » y Director del Instituto Electrotécnico de Toulouse.

El autor es ingeniero, laureado por el « Institut »; profesor de la Facultad de Ciencias de Toulouse y Sub-Director del mencionado Instituto Electrotécnico.

El primer folleto se ocupa del tema « Presas-pesas de perfil triangular »; el segundo trata la misma cuestión en lo relativo a la práctica del cálculo (ábacos). El último se ocupa de los perfiles óptimos de presas-vertederas y del trazado aerodinámico de las pilas.

Esta obra del profesor Escande, cuya competencia y autoridad es bien conocida en las cuestiones de presas de aguas, está llamada a ser de utilidad para los industriales, ingenieros, profesores y estudiantes que deseen documentarse sobre la cuestión.

Así lo hace notar el Sr. Camichel en el Prefacio que ha escrito para este trabajo.

Nº 494. — Weinberg (D.), *Méthodes d'Unification des Mesures en Biométrie et Biotypologie. Le Tétronage.* 64 páginas, con algunos gráficos. Precio: 15 francos. 1937.

Fascículo II de la serie « Biologie du Travail et Biotypologie » dirigida por H. Laugier, profesor de la Sorbona, etc.

La autora es jefa de trabajos en la « Ecole des Hautes Etudes », etc.

En una *Introducción* se dan las definiciones preliminares, o sean las unidades físicas en biometría. Para poder comparar los resultados de las medidas efectuadas con las distintas características de un individuo, debe adoptarse una notación unificada. El principio solo puede actualmente fundarse en las diferencias que se presentan entre el carácter de un individuo y el de otro en una población homogénea. Un resumen y varios anexos y una bibliografía, terminan el trabajo de la señorita Weinberg. El profesor Georges Darmois ha revisado el manuscrito original.

Nº 499 y 500. — Urbain (P.), *Roches Argileuses.* Dos folletos respectivamente de 62 y 84 páginas con algunas figuras. Precios: 15 y 18 francos. 1937.

Constituyen los fascículos IV y V de la serie « Exposés de Géologie » dirigida por L. Cayeux, miembro del Instituto y del Colegio de Francia.

El trabajo constituye una Introducción al estudio petrográfico y geoquímico de las rocas arcillosas. El folleto nº 499 se ocupa de los Métodos químicos y microscópicos; y el 500, de los térmicos, roentgenográficos y mecánicos. Este último trae tres láminas fuera del texto. Un buen índice bibliográfico acompaña, y una Introduccin ilustra el contenido de la obra.

Nº 504 a 508. — Guillaume (G. et Ed.), *Economique Rationnelle.* 5 folletos con un total de 375 páginas.

El primero trata del Método; el segundo de la Economía Pura; el tercero de esta última en Interferencia con el dominio jurídico; el cuarto de la Interferencia con los mundos extranjeros; el quinto de los Modelos matemáticos de los mundos económicos. (Precios: 5 fr., 8 fr., 6 fr., 6 fr. y 15 fr. respectivamente). 1937.

Estas exposiciones, publicadas con la dirección de los señores G. y Ed. Guillaume, tratan la « Económica » elevada al rango de una ciencia exacta fundada axiomáticamente; indican las condiciones de previsiones prácticas; el dominio de los mecanismos elementales; la formación de los precios y salarios, de los beneficios, de las deficiencias del poder de compra y de las crisis; la interferencia de los políticos; autoridad y fiscalía; mecanismos de la formación de las tasas de las previsiones, etc. El fascículo último trae modelos con ecuaciones de ahorro-deuda, constituyendo reservas matemáticas nacionales en función de la producción, de los precios y de las tasas.

Según los autores, la « Económica Racional » nos enseña que aún sometiéndose a los rigores del principio de la conservación del valor, puede el hombre, con su inteligencia, emanciparse cada vez más y más y tender indefinidamente hacia el Milagro.

SOCIOS ACTIVOS

Aguilar, Félix
Albizzati, Carlos M.
Alvarez, Raúl J.
Allende Lezama, Luciano P.
Anastasi, Camilo
Anchorena, Juan E.
André, Enrique de
Andrioletti, Juan Luis
Añón Suárez, Vicente
Aparicio, Francisco de
Aráoz Alfaro, Gregorio
Arbecchi, Armando C.
Arce, Manuel J.
Arditi Thompson, H.
Armani, Aquiles
Arnaudo, Silvio J.
Avila Méndez, Delfín
Aztiria, Ignacio
Bado, Atilio A.
Bachmann, Enesto
Baglietto, Eduardo E.
Balbiani, Atilio
Bancalari, Agustín
Barabino Amadeo, S.
Barbieri, Antonio
Bargna, Juan L.
Barilari, Mariano J.
Barral Souto, José
Barrancos, Leónidas A.
Becke, Alejandro von der
Berrino, Juan B.
Bertino, José Carlos
Besio Moreno, Nicolás
Bianchi Lischetti, A.
Biggeri, Carlos
Blaquier, Juan
Boaglio, Santiago
Bolognini, Héctor
Bonanni, Cayetano A.
Bontempi, Luis
Bordenave, Pablo E.
Borruat, Luis
Borzi, Ana María
Bosch, Gonzalo
Bosisio, Anecto J.
Bottaro, Juan C.
Bozzini, Luis (h.)
Briano, Juan A.
Bunge, Juan C.
Buontempo, Guillermo
Butty, Enrique
Buzzo, Alfredo
Buzzo, Eduardo B.
Caillet Bois, Teodoro
Calandra, Raúl E.
Camus, Nicolás
Canale, Humberto
Carabelli, Juan José
Carbia, Rómulo D.
Carbone, Esteban
Carbonell, José J.
Cárcova, Enrique de la
Carelli, Antonio
Carelli, Humberto H.
Caride Massini, Pedro
Carman, Ernesto
Carrea, Juan Ubaldo
Casacuberta, Antonio
Castellanos, Alberto
Castello, Manuel F.
Castiñeiras, Julio R.
Celasco, Juan L.
Cock, Guillermo E.
Coni Bazán, F. A.
Curti, Orlando P.
Curutchet, Luis
Chanourdie, Enrique
Chizzini Melo, Aníbal F.
D'Ascoli, Lucio
Dassen, Claro C.
Dasso, Héctor
Dasso, Ricardo L.
De Cesare, Elías A.
De Fina, Armando L.
De la Ini, Juan E.
Dellepiane, Luis J.
Deulofeu, Venancio
Díaz, Emilio C.
Dieulefait, Carlos E.
Doello-Jurado, Martín
Dobranich, Jorge W.
Domínguez, Juan A.
Dubecq, Raúl E.
Dueñas, José
Duhau, Luis
Dupont, Enrique
Durañona y Vedia, A.
Durrieu, Mauricio
Edelberg, Benjamín
Escudero, Antonio
Escudero, Pedro
Faré, Santo S.
Fernández, Alberto J.
Fernández Díaz, A.
Fernández Long, S.
Figini, Angel
Figuerero, Hernando W.
Fischer, Gustavo Juan
Flores, Emilio M.
Floriani, Luis
Florit, Carlos J.
Forn, Carlos J.
Fossa Mancini, E.
Franceschi, Alfredo
Fürnkorn, Dívico A.
Gadda, Carlos Manuel
Galmarini, Alfredo G.
Gandolfi Herrero, Augusto
Gandolfo, José S.
Gascón, Alberto
Gaspar, Fernando L.
Géneau, Carlos E.
Gerardi, Donato
Ghigliazza, Sebastián
Giagnoni, Bartolomé E.
Giannone, José
Gradín, Carlos
Grieben, Arturo
Gutiérrez, Ricardo J.
Haussler, Emilio
Herbin, Luis A.
Hermitte, Enrique
Herrera Vegas, M.
Herzer, Bernardo
Hickethier, Carlos F.
Hofmann, Herbert
Hortal, José Angel
Houssay, Bernardo A.
Hoyo, Arturo
Igartúa, Luis María
Irigoyen, Luis H.
Isetta, José
Ivanissevich, Ludovico
Jorge, José M.
Jakob, Cristofredo
Keiper, Guillermo
King, Diarmid O.
Kinkelin Pelletán, J. C. de
Kraglievich, Nicolás T.
Krapf, Eduardo
Labarthe, Julio
Lagunas, Simón
La Menza, Francisco
Laporte, Luis B.
Larco, Esteban
Lasso, Alfredo L.
Latzina, Eduardo
Ligniéres, Roberto
Lizer y Trelles, C. A.
Lombardi, Alberto
Loyarte, Ramón G.
Lugones, Arturo M.
Llauró, José
Mac Donagh, E. J.
Magnin, Félix J.
Magnin, Jorge
Mainini, Carlos
Mallol, Emilio
Mamberto, Benito
Marcó del Pont, E.
Marchionatto, Juan B.
Maresca, Antonio J.
Marini, Tomás L.
Martignone, Eduardo
Marotta, F. Pedro
Marotta, R. Armando
Mata, Leopoldo
Méndez, Julio
Meoli, Gabriel
Meoli, Humberto
Mercau, Agustín
Mermoz, Francisco A.
Molfino, José F.
Molina Carranza, L.
Molle, Clotilde C.
Montes, Vicente E.
Moreno, Evaristo V.
Nágera, Juan José
Natale, Alfredo
Natale, Ernesto
Negrete, Lucía
Negri, Mario L.
Nelson, Ernesto
Nielsen, Juan
Oliveri, Alfredo E.
Ortega Belgrano, Raúl
Ortiz, Aníbal A.
Ortiz de Rosas, Jorge
Otamendi, Gustavo
Ottonello, Héctor
Páez, José María
Page, Franklin Nelson
Paitovi y Oliveras, A.
Paquet, Carlos
Parodi, Edmundo
Parodi, Lorenzo R.
Pasman, Raúl G.
Pasman, Rodolfo E.
Pastore, Franco
Paz Anchorena, José M.
Pérez Hernández, A.
Perrone, Cayetano
Pestalardo, Agustín
Pini, Aldo S.
Platz, Hubert
Podestá, Juan Carlos
Polti, Modesto
Posadas, Carlos
Quinos, José Luis
Quinterno, Bruno F.
Quiroga, Pedro R.
Raimondi, Alejandro
Raffo, Bartolomé M.
Ramaccioni, Danilo
Ramallo, Carlos M.
Ratto, Héctor R.
Rebuelto, Antonio
Rebuelto, Emilio
Reece, William Asher
Repetto, Blas Angel
Repossini, José
Ringuelet, Emilio J.
Rissotto, Atilio A.
Rivarola, Rodolfo
Robles, Angel A.
Rodríguez Aravena, S.
Rodríguez, Germinal
Roffo, Angel H.
Roffo, Juan
Roldán, Raimundo
Romero Brest, Enrique
Rokotnitz, Otto
Rospide, Juan
Rossell Soler, Pedro
Ruata, Luis E.
Ruiz Moreno, Isidoro
Ruiz Moreno, Adrián
Rumi, Tomás J.

Sabaria, Enrique
Sagastume Berra, A. E.
Salomón, Hugo
Sánchez, José Ricardo
Sánchez, Gregorio L.
Sánchez Díaz, Abel
Sánchez Sorondo, M. G.
Sanromán, Iberio
Santángelo, Rodolfo
Sarhy, Juan F.
Sarrabayrouse, Eugenio
Savon, Marcos A.
Schnack, Benno J.
Schmidt, Max
Schulz, Guillermo
Selva, Domingo
Sesma, Angel
Sheahan, Juan F.
Silva, Leónidas L.
Simons, Hellmut
Siri, Luis
Sobral, Arturo
Solari, Emilio F.
Solari, Miguel A.
Soler, Frank L.
Solórzano, Luis A.
Sordelli, Alfredo
Spinetto, David J.
Spota, Víctor J.
Storni, Segundo R.
Suárez, Angel
Taiana, Alberto F.
Taiana, Jorge
Tarragona, José
Tedeschi, Virgilio
Tello, Eugenio
Torre Bertucci, Pedro
Torello, Pablo
Tossini, Luis
Trelles, Rogelio A.
Trucco, Sixto E.
Valeiras, Antonio
Valentini, Argentino
Valentinuzzi, Máximo
Vallebella, Colón B.
Vanossi, Reinaldo
Varela, Rufino
Vecchi, Arístides de
Vela Huergo, Julio
Veyga, Francisco de
Vidal, Eduardo
Villalobos D., C.
Vignaux, Juan C.
Vinardell, Alberto
Volpatti, Eduardo
Wainer, Jacobo
White, Guillermo J.
Wauters, Carlos
Wysztelewski, W. de
Zamboni, Agustín
Zappi, Enrique V.
Zavalla, Carlos M.
Zuloaga, Angel M.

SOCIOS ADHERENTES

Bazzanella, José
Devoto, Carlos Alberto
Folcini, Martín L. G.
García, Eduardo D.
Glücksmann, Carlos E.
Goyena, Ricardo J.
Laporte, Julio A.
Magne de la Croix, P. A.
Milesi, Emilio Angel
Quevedo Capdevila, Eduardo A.
Recoder, Roberto F.
Repetto, Cayetano
Rusconi, Carlos
Somonte, Eduardo
Wechsler, Wolf

CASAS ADHERENTES

Angel Estrada y Cía.
Lutz, Ferrando y Cía.
Hijos de Atilio Massone
Otto Hess, S. A.
Est. Gráf. "Tomás Palumbo"
Jacobo Peuser, S. A. Ltda.

SOCIO VITALICIO

Huergo, Eduardo María

MIEMBROS PROTECTORES DE LA ORGANIZACION DIDACTICA DE BUENOS AIRES

Anchorena, Juan E.
Besio Moreno, Nicolás
Tornquist, E. y Cía. (Lda.)

SECCION CORDOBA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Ing. Pedro N. Gordillo; Vice-presidente, Dr. Miguel Fernández; Vice-presidente, Ing. Daniel A. García; Secretarios, Dr. Guillermo V. Stuckert; Prof. Tulio Mácola; Tesoreros, Dr. Juan Olsacher; Dr. Carlos C. Hosseus; Vocales, Ing. Clodoveo Pascualini; Dr. Agustín E. Larrauri; Dra. J. Gambastiani de Peláez; Arq. Salvador Godoy; Ing. Jorge E. Bobone; Dr. Federico Padula; Ing. Luis Chechi; Dr. Edwin Rothlin.

SOCIOS ACTIVOS

Achával, Luis
Aguiar, Henoch D.
Amaya, Arturo A.
Arrambide, Miguel
Bobone, Jorge E.
Bodenbender, G.
Bonet, Rafael
Borzacow, Wladimir
Brandan, Ramón A.
Broglia, Alberto A.
Buteler, Jesús E.
Camilloni, Carlos
Carlomagno, José
Chaudet, Enrique
Checchi, Luis
Deheza, Eduardo
Del Viso, Jacinto
De Tezanos Pinto, J.
Devoto, Heraclio A.
Espinosa, Manual
Esteban, Fernando
Fernández, Miguel
Fitz Simon, Sgo. E.
Fontana, Lorenzo P.
Fuchs, Guillermo J.
García, Daniel
Gavier, Daniel E.
Giménez de Azúa, F.
Godoy, Salvador A.
Gómez, Calixto A.
Gordillo, Pedro N.
Granillo Barros, M.
Hosseus, Carlos Curt
Jagsich, Juan
Kronfus, Juan
Lofayette Zimmer, M.
Larrauri, Agustín C.
Lutzow Holm, Olaf.
Mácola, Berardo A.
Mácola, Tulio

Mirizzi, Pablo Luis
Vinci, Carlos A.
Vinci, Raúl T.
Novillo Corvalán, S.
Olsacher, Juan
Padula, Federico
Pasqualini, Clodoveo
Peláez, J. Gambastiani de
Pilotto, Bernardo
Ponce Laforgue, C.
Roggeri, Domingo
Rothlin, Edwin
Sayago, Gumersindo
Schmiedecke, Augusto
Sigal, Moisés
Sparn, Enrique
Stuckert, Guillermo V.
Taravella, Ambrosio L.
Tarragó, Emeterio
Torres, Valeriano
Trebino, Natalio
Vercello, Carlos
Yadarola, Mauricio L.

SECCION SANTA FE

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Gustavo A. Fester; Vice-presidente, Dr. José Piazza; Secretario de correspondencia, Ing. Quím. Francisco A. Bertuzzi; Secretario de actas, Ing. Quím. José Cruellas; Tesorero, Ing. Quím. Enrique Virasoro; Vocal 1º, Ing. José Babini; Vocal 2º, Prof. Rolando Hereñú; Vocal suplente 1º, Prof. Julio Salaber; Vocal suplente 2º, Ing. Quím. Guillermo Berraz; Encargado de Biblioteca y Canje, Ing. Quím. Rodolfo Rouzaut; Encargado de Publicaciones, Ing. José Babini.

SOCIOS ACTIVOS

Anadón, Leónidas
Ariotti, Juan Carlos
Babini, José
Benet, Pedro José
Berraz, Guillermo
Bertuzzi, Francisco A.
Bonazzola, César J.
Borruat, Luis (hijo)
Borzone, Rodolfo
Bossi, Celestino
Caballero, Martín A.
Camo, José María
Cerana, Miguel
Claus, Guillermo
Courault, Pablo
Crouzeilles, A. L. de
Cruellas, José
Christen, Carlos
Christen, Rodolfo G.
Damianovich, Horacio
Falco, Federico
Fester, Gustavo A.
Frenguelli, Joaquín
Gollán, Josué (h.).
Gschwind, Eduardo P.
Guinle, Hugo José
Hereñú, Rolando
Hotschewer, Curto
Juliá Tolrá, Antonio
Kleer, Gregorio
Mai, Carlos
Mántaras, Fernando
Marelli, Hipólito
Martino, Antonio E.
Montpellier, Luis Marcos
Mounier, Celestino
Muzzio, Enrique
Nigro, Angel
Niklison, Carlos A.
Oliva, José
Peresutti, Luis
Piazza, José
Piñero, Rodolfo
Pozzo, Hiram J.
Ragonese, Arturo E.
Reinares, Sergio
Rouzaut, Rodolfo
Salaber, Julio
Salgado, José
Santini, Bruno L. P.
Schivazappa, Mario
Simonutti, Atilio A.
Tissembaum, Mariano
Urondo, Francisco E.
Virasoro, Enrique

SECCION MENDOZA

COMISION DIRECTIVA

Presidente honorario, Ing. José S. Corti; Presidente, Dr. Juan B. Lara; Vice-presidente, Ing. Agr. José Raúl Ponce; Secretario, Ing. Agr. Julio Tolosa (h); Tesorero, Ing. Cayetano C. Piccione; Bibliotecario, Sr. Adrián Ruiz Leal; Vocales: Dr. Eduardo Carette; Dr. Mario Bidone; Ing. Alfredo Rosenthal; Sr. Manuel Tellechea; Ing. Agr. Rafael E. Pontis.

SOCIOS ACTIVOS

Alurralde, Juan Carlos
Anzorena, Jacinto
Ayala Castagnino, G.
Basso, Germinal
Benegas, Raúl
Bidone, Mario
Borsani, Carlos Pablo
Burgoa, Pedro A.
Carette, Eduardo
Croce, Francisco M.
Espinosa, Norberto A.
Flor Alvarado, José M.
Gabrielli, Francisco J.
Galeano, Edgardo
García, José Federico
Godoy Vergelin, G.
Gomensoro, José N.
Granzella, Sinibaldo
Guiard, Ricardo
Jofré, Alberto L.
Lara, Juan B.
Lucero, Braulio G.
Lugones, Manuel G.
Magistretti, Guillermo
Maneschi, Ernesto
Maroso, José Angel
Maveroff, Aquiles
Mayorga, Santiago C.
Miyara, Salomón
Paganotto, Juan P.
Pelaia, Dante
Piccione, Cayetano C.
Ponce, José Raúl
Pontis, Rafael E.
Rosales, Ranulfo S.
Rosenthal, Alfredo
Ruiz, Aníbal
Ruiz Leal, Adrián
Silvestre, Tomás
Stura, Angel C.
Tellechea, Manuel
Tolosa, Julio (h)
Toso, Juan P.
Villanueva, Miguel Angel

SOCIOS CORRESPONDIENTES

Aguilar y Santillán, R.	México
Amaral, Afranio de	San Pablo (Br.)
Avendaño, Leónidas	Lima
Alvarez, Antenor	Sgo. del Estero
Bonarelli, Guido	Gubbio (It.)
Borel, Emile	París
Bachmann, Carlos J.	Lima
Bragg, William Henry	Londres
Bolívar, Ignacio	Madrid
Bruch, Carlos	Olivos (B. A.)
Cabrera, Blás	Madrid
Campos Porto, Pablo	Río de Janeiro
Carabajal, Melitón M.	Lima
Corti, José S.	Mendoza
Darmois Georges	París
Dávila, Rubén	Santiago (Ch.)
Dabbene, Roberto	La Plata
Escomel, Edmundo	Arequipa (P.)
Fiebrig, Carlos	Munich (Al.)
Fontecilla Larrain, Arturo	Santiago (Ch.)
Fort, Michel	Lima
González del Riego, Felipe	Lima
Greve, Germán	Santiago (Ch.)
Guinier, Philibert	Nancy (Fr.)
Hadamard, Jacques	París
Hauman, Luciano	Bruselas
Hernández, Juvenal	Santiago (Ch.)
Hijar y Haro, Luis	México
Janet, Pierre	París
Jiménez de Asúa, Luis	Madrid
Kinart, Fernando	Amberes
Lahille, Fernando	Tarn (Fr.)
Langevin, Paul	París
Levi Civita, Tulio	Roma
Lobo, Bruno	Río de Janeir
Lehmann Nitsche, Roberto	Berlín
Mardones, Francisco	Santiago (Ch.)
Molina, Enrique	Concepc. (Ch.)
Monjarás, Jesús E.	México
Moretti, Gaetano	Milán
Oliver Schneider, Carlos	Santiago (Ch.)
Pereira d'Andrade, Lencastre	Nova Goa (I. P
Perrin, Tomás G.	México
Porter, Carlos E.	Santiago (Ch.)
Pi y Suñer, Augusto	Barcelona
Reyes Cox, Eduardo	Santiago (Ch.)
Rospigliosi y Vigil, Carlos	Lima
Rowe, Leo S.	New York
Shepperd, William R.	Wáshington
Tello, Julio C.	Lima
Villarán, Manuel V.	Lima
Vélez, Daniel M.	México
Valle, Rafael H.	México
Vitoria, Eduardo	Barcelona
Volterra, Vito	Roma

ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

ADOPTADOS PARA SUS PUBLICACIONES POR LA

ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

DIRECTOR: EMILIO REBUELTO

ABRIL 1938. — ENTREGA IV. — TOMO CXXV

SUMARIO

BUENOS AIRES

CALLE SANTA FÉ 1145

1938

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

SOCIOS HONORARIOS

Dr. Pedro Visca †
Dr. Mario Isola †
Dr. Germán Burmeister †
Dr. Benjamín A. Gould †
Dr. R. A. Phillippi †
Dr. Guillermo Rawson †
Dr. Carlos Berg †
Dr. Valentín Balbín †
Dr. Florentino Ameghino †

Dr. Carlos Darwin †
Dr. César Lombroso †
Ing. Luis A. Huergo †
Ing. Vicente Castro †
Dr. Juan J. J. Kyle †
Dr. Estanislao S. Zeballos †
Ing. Santiago E. Barabino †
Dr. Carlos Spegazzini †
Dr. J. Mendizábal Tamborel †

Dr. Enrique Ferri
Ing. Eduardo Huergo †
Ing. Guillermo Marconi †
Dr. Walter Nernst
Dr. Eduar[illegible] †
Dr. Alberto Einstein
Dr. Angel Gallardo †
Dr. Cristóbal M. Hicken

CONSEJO CIENTIFICO

Ing. Félix Aguilar; Ing. José Babini; Dr. Rómulo D. Carbia; Dr. Horacio Damianovich; Dr. Claro C. Dassen; Prof. Carlos E. Dieulefait; Dr. Juan A. Domínguez; Dr. Gustavo A. Fester; Dr. Alfredo Franceschi; Dr. Joaquín Frenguelli; Dr. Josué Gollán (h.); Dr. Bernardo A. Houssay; Dr. Cristofredo Jakob; Dr. Ramón G. Loyarte; Dr. Emiliano J. Mac Donagh; Dr. R. Armando Marotta; Dr. Julio Méndez; Ing. Agr. Lorenzo R. Parodi; Dr. Franco Pastore; Capitán de fragata Héctor R. Ratto; Dr. Rodolfo Rivarola; Vicealmirante Segundo R. Storni; Dr. Enrique V. Zappi.

JUNTA DIRECTIVA

(1938-1939)

Presidente .... Ingeniero **Jorge W. Dobranich**
Vicepresidente 1º .... Doctor **Ramón G. Loyarte**
Vicepresidente 2º .... Doctor **Gonzalo Bosch**
Secretario de actas .... Ingeniero **Raúl E. Dubecq**
Secretario de correspondencia . Doctor **Santiago Barabino Amadeo**
Tesorero .... Ingeniero **Edmundo Parodi**
Pro-tesorero .... Profesor **José F. Molfino**
Bibliotecario .... Ingeniero **Carlos A. Lizer y Trelles**

Vocales ....
Doctor **Claro C. Dassen**
Doctor **Alfredo Sordelli**
Doctor **Juan C. Vignaux**
Doctor **Jorge Magnin**
Doctor **Juan Ubaldo Carrea**
Doctor **Reinaldo Vanossi**
Ingeniero **Carlos Posadas**
Ingeniero **Mario L. Negri**

ADVERTENCIA. — Los colaboradores de los Anales son personalmente responsables de la tesis sustentada en sus escritos. Tienen derecho a la corrección de dos pruebas. Los que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos, deben solicitarla por escrito. Los manuscritos, correspondencia, etc., se enviarán a la sede social, **Santa Fe 1145.**

Impreso en los Talleres Gráficos "TOMAS PALUMBO" - La Madrid 321-325 - Buenos Aires



Dr. NICOLAS LOZANO

EX PRESIDENTE DE LA SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

† el 3 de Marzo de 1938

Dr. NICOLAS LOZANO

† el 3 de Marzo de 1938

A consecuencia de una indisposición repentina, falleció en la ciudad de Buenos Aires, durante la madrugada del día 3 de marzo próximo pasado, el ex-presidente de la Sociedad Científica Argentina doctor Nicolás Lozano. Su deceso priva a la ciencia argentina de una figura notable de estudioso, de un espíritu selecto cuya vida entera había transcurrido puesta al servicio de la medicina y de los grandes ideales de la higiene pública, por los cuales bregó insistentemente el doctor Lozano con un entusiasmo y eficacia que puede presentarse como ejemplo.

Había nacido en La Poma, pequeña localidad de Salta el 11 de Agosto de 1864. Desapareció pues a los 73 años, edad a la que logró llegar no sólo en plena madurez intelectual, sino también en excelente estado físico, lo que le permitía trabajar con la misma actividad que en sus años mozos: hasta los últimos días continuaba desempeñando sus cátedras, puestos honorarios y funciones directivas en las múltiples entidades, a que dedicaba pródigamente su trabajo desinteresado en beneficio de sus semejantes.

Era todavía muy joven, cuando ya hizo notar su decidida vocación por la ciencia y los problemas educacionales. Fruto de estas últimas inclinaciones fué el título de Profesor de Enseñanza Secundaria con el que inició sus actividades docentes. Llegado a Buenos Aires, emprendió los estudios de Medicina durante los cuales desempeñó puestos de practicante en la Casa de Aislamiento, donde empezó a perfeccionar su especialidad de epidemiólogo e higienista. Entró más tarde en el Departamento Nacional de Higiene, descollando de inmediato por su acción ponderable en los distintos cargos desempeñados, cada vez de mayor responsabilidad y jerarquía. Simultáneamente se dedicaba a las absorbentes tareas de su profesión,

actuando como jefe de sala en los hospitales Muñiz y Teodoro Alvarez, y dirigiendo el cuerpo médico de la Sociedad Damas de Caridad de San Vicente de Paul.

Su especialización en los problemas relacionados con la higiene pública, hizo pronto del doctor Lozano una figura de excepcional relieve.

Colaboró con el doctor José Penna, el iniciador de la Medicina social en el país, y al lado de este paladín de la Higiene Pública, desarrolló el doctor Lozano de manera eficaz y positiva muchas de sus notables concepciones, completando la obra del maestro. Le tocó actuar como secretario general del Departamento Nacional de Higiene, en los primeros tiempos de lucha y de arduo trabajo de organización, cuando todo estaba por hacer en cuestiones de reglamentos y de organización de los servicios públicos de higiene, asistencia, profilaxis y sanidad. Muchas de las obras fundamentales creadas en aquella época, se deben al espíritu profundamente innovador del doctor Lozano; y muchos de sus luminosos informes, hoy olvidados en expedientes que duermen en los archivos, serían dignos de ser exhumados y darles la divulgación merecida por su acopio de doctrina, de antecedentes y de juiciosas observaciones, siempre de útil aplicación. El doctor Lozano contribuyó así, con el doble aspecto técnico y administrativo de su gestión, a resolver múltiples problemas de medicina e higiene pública, tanto de índole general como de interés local para determinadas regiones del país. Recordemos que las obras sanitarias de Salta, fueron debidas a su gestión empeñosa y tesonera: y que la creación de una ColoniaNeuro-Psiquiatra en el Norte, fué otra de las empresas que trató encaminar hacia la realización práctica, en procura siempre de mejorar las condiciones de vida en el interior de la República. Por sus propios méritos impuso la gravitación de su personalidad en la repartición y desde el modesto empleo en que inició sus tareas, llegó por sucesivos ascensos a desempeñar la secretaría y la presidencia del Departamento Nacional de Higiene.

Asistió como representante o delegado a casi todos los Congresos Sanitarios celebrados en la Argentina y a muchos de los que últimamente tuvieron lugar en el extranjero, como los Congresos IV y V latinoamericanos y VI panamericano, lo mismo que al Congreso Internacional de Medicina e Higiene de Río de Janeiro, y a la Conferencia Panamericana de la Cruz Roja, en Wáshington. Actuó como vicepresidente en la Primera Conferencia Nacional de Asistencia Social en la que trató el problema de la infancia abandonada. For-

maba parte también de la Comisión Directiva de la Liga Argentina de Higiene Mental, presidió una sección del Congreso del Frío, la Conferencia Nacional de Profilaxia Antituberculosa, etc.

Fué secretario y director interino de la Asistencia Pública; director del Lazareto de Martín García; secretario de la Academia Nacional del Medicina; presidente de la Cruz Roja Argentina, y de la Asociación de Biotipología, Eugenesia y Medicina Social, siendo en todas estas instituciones un gran animador; contribuyó hace más de treinta años a la fundación de la Sociedad de Higiene, Microbiología y Patología, etc. En la Sociedad Científica Argentina inició su actuación en 1921, figurando como vocal de la Junta Directiva que rigió los destinos de la Sociedad en aquel año. Durante el período 1922-1928 fué vicepresidente 1º, pasando a ser presidente en los años 1930 a 1933, período en el cual se llevó a cabo la profunda evolución experimentada por la Sociedad, a causa de su traslado del viejo y tradicional edificio de la calle Cevallos al suntuoso palacio que hoy ocupa, cuya construcción se debe en gran parte a las gestiones hechas por el doctor Lozano ante los poderes públicos.

Funcionario excepcionalmente activo y eficaz, durante más de cuarenta años, se acogió finalmente a los beneficios de una pequeña jubilación; y desde esa modesta situación, se dedicó, con más empeño, si cabe, a trabajar con desinteresado ahinco desde puestos honoríficos, siempre preocupado con hacer el bien a su alrededor. Una de estas actividades fué su desempeño en la presidencia de la Honoraria Comisión Asesora de Asilos y Hospitales Regionales, desde la cual desarrolló una intensa campaña de mejora higiénica y social, de felices repercusiones en muchas provincias argentinas.

Pocos días antes de su lamentado fallecimiento, y cumpliendo con el deber protocolar que impone un cambio de administración, el doctor Lozano había elevado al gobierno nacional la renuncia de su cargo de presidente de dicha Comisión, en la que tanta acción fecunda y generosa había desarrollado con tesón incansable. Su reelección se imponía y sólo la muerte del doctor Lozano pudo impedirlo. Hasta sus últimos días conservó inalterable su entusiasta vocación docente, dictando una cátedra de Higiene en la Escuela Normal de Profesores Nº 1, de la Capital, y desempeñando la presidencia del Consejo Escolar XV.

Las publicaciones hechas por el doctor Lozano a lo largo de su vida laboriosa de investigador y erudito, son de real importancia. Entre las de mayor aliento, citaremos: «El problema de la tuberculosis en la República Argentina», «Bases estadísticas de la profilaxis

antituberculosa y síntesis de un plan profiláctico», «El valor humano en la Argentina a través de los censos», «El alcoholismo y las enfermedades venéreosifilíticas en la zona subtropical», «La profilaxia del paludismo», «Necesidad de una organización uniforme de la higiene pública», «Profilaxia internacional de las enfermedades exóticas», «Departamento Nacional de Higiene: Ley Nº 5195 su reglamentación», «Reglamentos del servicio antipalúdico», «Consideraciones sobre la erisipela y su tratamiento», «La obra de Guillermo Rawson», «Las nuevas orientaciones de la higiene internacional», «Defensa sanitaria exterior de un país», «La ley del paludismo», «La educación relacionada con la doctrina constitucionalista», «La enfermedad de Chagas», «La higiene pública en la Argentina», «Estado sanitario del país», «Proyecto de una ley de sanidad nacional», «La higiene pública en Río de Janeiro», etc.

En 1912, con motivo del cincuentenario de la Sociedad Científica Argentina, escribió en colaboración con el ingeniero Antonio Paitoví una interesante monografía sobre «La higiene pública y las obras sanitarias Argentinas», en que hace una reseña histórica de las mismas, estudiando a la vez los benéficos efectos aportados por ellas sobre la población. En 1926 dió en los salones de la Sociedad una conferencia sobre «La vida y la muerte: la cremación», en la que aborda un problema de alto interés para la higiene pública. En 1931, dió otra conferencia sobre la vida del doctor Francisco Javier Muñiz.

En conjunto suman más de un centenar los trabajos aparecidos con su firma, siendo aún mucho más considerable la parte de su obra que ha quedado anónima.

Bastan estas enumeraciones escuetas acerca de las actividades con que llenó su vida el doctor Lozano para caracterizar la benéfica trascendencia de su labor. Es un glorioso nombre más que se agrega a la ya numerosa serie de médicos argentinos que cumplen con toda integridad el sagrado apostolado de su profesión y realizan una inmensa obra benéfica para provecho de sus semejantes. Y a esta acción práctica y positiva se unió todavía en el caso del doctor Lozano, otra gestión en el campo teórico de la ciencia pura, de la investigación erudita y profunda, que hizo conocer el nombre de este argentino ilustre, más allá de los lindes de su patria. La noticia de su fallecimiento tuvo lógica repercusión en el extranjero, donde se le apreciaba tanto como se le admiraba, y muchas corporaciones sabias de Europa y América, hicieron llegar hasta sus deudos los más expresivos mensajes de condolencia.

Al tener conocimiento del deceso, los miembros de la Junta Directiva de la Sociedad Científica Argentina, reunidos en sesión extraordinaria con la presencia del Vicepresidente Dr. Gonzalo Bosch, por encontrarse ausente de la capital el titular Ingº Jorge W. Dobranich, después de poner de manifiesto lo irreparable de la pérdida sufrida, y de recordar los importantes servicios prestados a la Sociedad y al país por el Dr. Lozano, se tomaron por unanimidad las siguientes resoluciones:

1º — Ponerse de pie en homenaje a su memoria.
2º — Publicar avisos en los diarios invitando a los señores socios a concurrir a su entierro.
3º — Constituirse en corporación en la casa del extinto para velar su cadáver.
4º — Designar a su Vicepresidente Dr. Gonzalo Bosch para que haga uso de la palabra en el acto del sepelio.
5º — Encargar la redacción de un artículo necrológico en los ANALES, con la publicación del retrato del extinto.
6º — Enviar nota de pésame a la familia, con transcripción de la presente acta.

Por el Ministerio de Relaciones Exteriores, donde el Dr. Lozano desempeñó durante los años 1931 a 1938 la presidencia de la Comisión Honoraria Asesora de Asilos y Hospitales Regionales, se dictó un Decreto por el cual el P. E. expresa su adhesión al duelo y designa al Subsecretario de Culto y Beneficencia Dr. Divico Alberto Furnkorn, para que haga uso de la palabra en el acto del sepelio de los restos.

El Presidente del Consejo Nacional de Educación Ing: Octavio S. Pico, dispuso que una delegación de cinco alumnos del sexto grado de cada una de las Escuelas del Distrito Escolar XV, de cuyo Consejo era Presidente el doctor Lozano, concurrieran al acto del sepelio con la bandera del establecimiento enlutada, y acompañado de un maestro.

Muchas otras instituciones científicas y culturales se adhirieron a los actos de homenaje que se le tributaron al doctor Lozano en el momento de la inhumación de sus restos en el Cementerio del Norte, el día 4 de marzo de 1938. El Presidente de la República se hizo representar por su edecán el capitán de fragata Horacio M. Smith. Enviaron también representantes la Academia Nacional de Medicina, el Departamento Nacional de Higiene, la Asociación Argentina de Biotipología, Eugenesia y Medicina Social, la Escuela Normal de Profesores «Roque Sáenz Peña», etc.

En nombre del P. E. despidió los restos el Subsecretario de Culto y Beneficencia doctor Divico Alberto Furnkorn; habló luego en nombre de la Sociedad Científica Argentina, Colonia Nacional de Alienados Domingo Cabred, Liga Argentina de Higiene Mental y Hospicio de las Mercedes, el doctor Gonzalo Bosch. Pronunciaron también sentidas oraciones fúnebres el doctor Arturo R. Rossi en nombre de la Asociación Argentina de Biotipología, Eugenesia y Medicina Social; el doctor Castellanos Esquiú en nombre de la Dirección y personal docente de la Escuela Normal de Profesores «Roque Sáenz Peña»; la

señorita Angélica Piazza en nombre de las que fueron alumnas del doctor Lozano; la señorita Paulina Sodor por las alumnas de la Escuela de Biotipología; el señor Manuel R. Agüero en nombre del personal directivo y docente del Distrito Escolar XV; y el doctor Carlos A. Velarde, presidente de la Asociación Peruana.

A continuación transcribimos los discursos de los dos primeros oradores.

Discurso pronunciado por el Dr. Divico A. Furnkorn en representacfón del P. E.

Señores:

Siempre es lamentable y nos es sensible la pérdida de un hombre de valor; pero es, si cabe, doblemente dolorosa cuando acaece en países como el nuestro, en formación y sujetos a un rápido desarrollo.

Ello no permite la creación de nuevas unidades humanas de intrínseca estima, en la cantidad que lo requiere el curso de las necesidades de la Nación. Esta se halla en apremio para producir el margen suficiente que responda a la evolución compleja y multiplicada de su existencia.

Y no se diga cuál es la intensidad del problema cuando la muerte exije la sustitución de quienes desaparecen pletóricos de experiencia, de la fecunda sabiduría que proporciona el viaje a través de las páginas intensamente experimentadas del gran libro de la vida.

No sólo la acción, el sano optimismo y el fermento de un dinamismo promisor, son suficientes para ser una mente directiva y orientadora. Es indispensable la madurez del pensamiento, el asiento de los hechos transcurridos, que significan la ponderación y el equilibrio en la apreciación de las circunstancias, en el cateo íntimo de los colaboradores, en el sentido de la realidad práctica; todos factores de indudable estima que hacen que ciertos seres sean motivo de un aprecio especial que tiene su explicación en ese cúmulo de calidades que complementan a un hacedor y que lo transforman en un ser particularmente útil a la sociedad.

Venimos aquí en nombre del Poder Ejecutivo de la Nación a traer nuestra palabra de recuerdo y de agradecimiento a un ser que en vida reunió todas las dichas virtudes y cuya pérdida, marcará un vacío en los círculos científicos y de la administración pública, que debe apradecerle su perseverante actividad prodigada durante 40 años.

Fué un hombre de acción y de estudio. Ambas condiciones parecieran que en sus semblanzas biográficas se presentaran siempre unidas; por cuanto ha sido un estudioso, vinculando siempre tal virtud a la ejecución práctica de su elaboración mental.

Hubo en él, el mérito indudable de una gran obra de estudio que podría decirse en buen parte, meritoriamente anónima; tanto en su actuación siempre entusiasta en innúmera cantidad de congresos y certámenes científicos, como lo fué en su actuación como médico de sanidad interna y luego extendida su labor a los problemas de orden médico con los países limítrofes.

Sus trabajos, asesoramientos y sus informes, perdidos en expedientes que quedaron dormidos en el archivo, viven en su realización, en las medidas adoptadas por las autoridades nacionales, en la prevención de la introducción de plagas y en las medidas restrictivas de su difusión.

También su contribución patriótica fué puesta de manifiesto en colaboración inmediata con el ilustre Dr. José Penna. El sólo enunciado de haber gozado de la confianza de un higienista de tal magnitud, de haber merecido el privilegio de ser contribuyente directo a la magna obra de medicina social iniciada en nuestro país por Penna, implicaría por sí solo suficiente título a la consideración púplica, pero, no ha sido sino el comienzo de su actividad incansable; actividad que lejos de ver desmayar en sus años postreros, pareciera que en amenaza de su desaparición, hubiera hecho más acentuada, como si hubiese temido no aprovechar en todo lo posible las fuentes de su vida, en beneficio de la humanidad.

Hasta la última hora dedicó a su actividad de funcionario y de catedrático, todas sus energías que parecían ser aún muchas y muy duraderas. Quería posiblemente ver completadas sus aspiraciones de bien público y en tal sentido se ha prodigado de manera tan admirable en estos últimos años, ejerciendo numerosos cargos honorarios, con los que fuera distinguido con toda justicia.

Esta es otra definición espiritual del extinto. Retirado en forma modesta, no buscó en ningún momento mejorar con tareas remunerativas su posición personal, entregándose en cambio y sin restricciones a toda carga que se le impusiera y dedicándole un entusiasmo que mucha juventud debiera buscar como ejemplo.

Y no es que haya sido un luchador de última hora, que hubiese querido recuperar en el ocaso de su existencia su inactividad de otrora. En todo momento ha sido un inquieto laborioso. Durante cerca de 30 años fué jefe de sala de uno de nuestros principales nosocomios

y una pléyade de ilustres médicos lo tuvieron por maestro y a quien rememoran con el cariño que se acuerda a quien supo dar expresión acabada de su saber y supo transmitir sus conocimientos y experiencia con paternal afección.

Fué simultáneamente y durante largos años de la edad de oro del Departamento Nacional de Higiene, su Secretario General y se distinguió su actuación por no haberse limitado a los estrechos extremos de la imposición burocrática, sino, que fué un investigador de problemas substanciales de higiene social y muchos méritos de las celebradas medidas de aquel entonces deberían serle reconocidos a quien en este momento honramos.

Contribuyó a la solución de problemas locales de vital importancia y que para su provincia natal señalan cuestiones de las que puede depender la felicidad física de sus habitantes y el mejoramiento de su población. Me refiero a las iniciativas que a él se deben, de dotar de obras sanitarias y agua potable a la Provincia de Salta y a la creación de la Colonia Neuropsiquiátrica, que según sus convicciones debe resolver cuestiones fundamentales para todo el norte argentino.

En los años que precedieron a su deceso, dedicó su principal actividad al ejercicio de la presidencia de la H. Comisión Asesora de Asilos y Hospitales Regionales, donde puso de manifiesto su inolvidable tesón. Había en él un afán permanente de resolver situaciones, que traía a estudio con el calor de un convencido y con el entusiasmo de un bien inspirado. Su deseo fué siempre ostensible y lo exteriorizaba a las claras: deseaba hacer.

El problema de la infancia, abandonada, fué su preocupación más intensa desde la reunión de la primera Conferencia Nacional de Asistencia Social, en la cual ocupó con mucho honor la vicepresidencia primera y la presidencia de la Sección de Asistencia social de la infancia.

Llevó ésta aspiración tan simpática de asistir a los menores abandonados a la Academia Nacional de Medicina, donde produjo una comunicación que es recordada especialmente por el elevado propósito que la animara.

Fué honrado con la presidencia de la Academia Nacional de Medicina, la presidencia de la Sociedad Científica, de la Cruz Roja Argentina, de la que fué su gran animador, de la Asociación de Biotipología, Eugenesia y Medicina Social y en estos días se le designó presidente de la Academia Americana que se ocupará de estas últimas disciplinas, consagrándosele como bandera de estas remoza-

das tendencias renovadoras. Figura venerable, vida entregada al bien público, catedrático vocacional, funcionario excepcionalmente eficiente, activo y gran patriota, porque supo superar las actividades burocráticas con una acción de bien común, que Dios quisiera que siempre guiara la mente de quienes tienen la dirección de la Administración pública.

Por todo ello debe estarle grato el país y el Poder Ejecutivo, reconociéndolo así, ha querido de esta forma exteriorizarlo.

Que la rememoración pública lo tenga al Dr. Nicolás Lozano entre los beneméritos.

Descanse en paz.

Discurso pronunciado por el Dr. Gonzalo Bosch en representación de la Sociedad Científica Argentina.

En representación de la Sociedad Científica Argentina, Dirección del Hospicio de las Mercedes y Colonia Nacional de Alienados Don Domingo Cabred y de la Liga Argentina de Higiene Mental, venciendo un deseo natural de guardar silencio de dolor reverente, es que pronunciaremos las palabras con que se pretende rendir homenaje admirativo a la vigorosa figura del que fuera uno de los ciudadanos más esclarecidos y útiles de nuestro país. En esta tarea que honra y entristece al mismo tiempo, doloroso es comprobar —lo que ya se tiene sabido—: la imposibilidad de que la ideación aparezca tal como es, usando el imperfecto instrumento del lenguaje que debe darle exterioridad en cumplimiento del mandato que nos trae. Desearíamos fundir todas las opiniones de cuantas personas tratáramos con la nuestra propia, recogidas en el andar cotidiano, para señalar la unánime coincidencia, con que se apreciara siempre los méritos indiscutibles que fueron sólida estructura en el doctor Nicolás Lozano, lo que pocas veces ocurre, y esto era, porque él, como aquellos hombres de Plutarco, deslizó su existencia en un completo paralelismo con las virtudes más claras que alientan la vida de los ilustres.

Ayer, cuando en todos los ambientes de la ciudad, se repetía la noticia sorpresiva de su fallecimiento, parecíanos que un terrón de hielo hubiera sido colocado dentro del corazón de cada oyente y una capa oscura cayera sobre los hombros para impedir el movimiento. Es que se tomaba información de que un médico grande por su bondad, modestia y sabiduría, trabajador infatigable en to-

das las epidemias que azotaron al país, animador entusista de proyectos e iniciativas de cultura y progreso, había epilogado su existencia, llena de empuje, a pesar de su gloriosa ancianidad, de la que se esperaba consejos y ejemplos, que dan precisamente los años de experiencia para el aprovechamiento social.

Robemos a la muerte, la eterna amiga del silencio y del olvido, lo que ella a pesar de ser invencible para la criatura humana, con la alianza del tiempo, no nos puede robar, si nos metemos en el pasado, y volvamos los ojos al recuerdo para exhumar en función evocativa, hechos que subjetivamente puedan ser presentificados.

Evoquemos aquel joven estudiante pobre y lleno de talento, cuya figura material exhibía un tipo racial de nuestra América Latina, venido de La Poma, Provincia de Salta, que en el año 78 ganaba cuarenta pesos mensuales en el Consejo Nacional de Educación, con los que vivía y costeaba sus estudios. Evoquemos aquel espíritu poseído de un sentimiento profundo de los deberes sociales de fraternidad, de comprensión y tolerancia, que sintiera como las mariposas la atracción del foco luminoso de la Capital Federal, donde nos dejara como tantos otros hombres provincianos, el polvo dorado de sus alas, con que se ha amasado en gran parte el progresivo engrandecimiento de la República, que los sabe hijos dilectos y beneméritos de la patria.

Practicante en la casa llamada de Aislamiento, antes de ser médico y por concurso, obtuvo un puesto como tal, en el Departamento Nacional de Higiene, donde en marcha ascensional, logra destacarse en su función de higienista, llevando su acción y palabra divulgadora a todo el continente por las dos Américas, —colaborando con su sabio maestro, siempre recordado, que se llamara José Penna, con quien efectuara iniciativas y proyectos, de verdadero interés médico social, como la Ley Nacional de Paludismo y la de Salubridad de Ferro-Carriles, entre otras.

La Provincia de su nacimiento le debe la iniciativa de las obras sanitarias y agua potable con que cuenta en la actualidad, lo mismo que estudios sobre profilaxia y estadística de las enfermedades infecciosas.

La Academia Nacional de Medicina de Buenos Aires, lo tuvo por uno de sus miembros mayormente destacados, llegando a ser Secretario de actas en el penúltimo período de esta prestigiosa institución. En la Sociedad Científica Argentina, sociedad del más rancio abolengo con que cuenta el país, fué vocal de la junta directiva, dos veces vicepresidente y en un período Presidente. En los años

de su presidencia gestionó y obtuvo de los poderes públicos recursos para la terminación del edificio de que hoy dispone y cuando el año 1922, cumpliera la sociedad su medio siglo de existencia, en colaboración con el Ingeniero Paitoví, publicó la «Higiene Pública y las Obras Sanitarias Argentinas».

Seríamos demasiado extensos si enumeráramos, todos los cargos demostrativos de la labor inmensa y fecunda desarrollada silenciosamente por el doctor Nicolás Lozano, tanto como funcionario, cuanto como publicista. Bástenos decir que durante 25 años fué jefe de la Sala del Hospital Teodoro Alvarez, Secretario y Presidente en Ejercicio del Departamento Nacional de Higiene, Secretario y Director interino de la Asistencia Pública, Presidente de la Cruz Roja Argentina, Presidente de la Sociedad de Bio-tipología, Eugenesia y Medicina Social, Delegado en casi todos los Congresos Sanitarios, celebrados dentro y fuera del país. Vocal de la Comisión Directiva de la Liga Argentina de Higiene Mental. Insistimos que sería extenso enumerar, los cargos que hablan del fecundo dinamismo del doctor Lozano, aunque debemos agregar que su vocación a la enseñanza, lo llevó a dictar hasta la hora de su muerte una cátedra de Higiene en la Escuela Normal de Profesoras Número 1, Don Roque Sáenz Peña.

Hemos dejado de intento para el final, su acción destacada como Presidente de la Honoraria Comisión de Asilos y Hospitales Regionales, desde donde contribuyó con su experiencia y sabiduría al éxito de la Primera Conferencia Nacional de Asistencia Social organizada por iniciativa del ilustre Ministro Saavedra Lamas.

Como Presidente de la Honoraria Comisión aludida, le cupo el honor y agrado de ver el comienzo de la realización de proyectos que han de levantar el nivel cultural del país, en lo que concierne a la medicina social y construcciones hospitalarias. Si no disponemos de tiempo para explayarnos, no podemos silenciar el más importante de sus proyectos, cuya realización comienza y que inmortalizara su nombre; la gran colonia neuropsiquiátrica de Salta, por medio de la cual y para el Norte Argentino se resuelve uno de los más pavorosos problemas del país.

Cuando esa colonia sea la realidad, que esperan los que comprenden su necesidad y miden su importancia, podrá objetivarse en ella, todo lo que fué en vida el muerto ilustre: bondad, inmensa bondad, inteligencia puesta a disposición de la bondad, vida de altruísmo, incansable higienista, que no pudo aplicar los métodos que divul-

gaba para su propia usanza, porque el tiempo le parecía escaso para ponerlo a disposición de los demás.

Divulgando su credo se enredó en las púas del camino, donde le sorprendió la muerte frente a frente, igual que el soldado que avanza, así vea que la metralla no perdona; como no perdonó a Nicolás Lozano, que cuando se disponía a escribir «*La Historia de la Higiene en la Argentina*», según propósito confesado, pocos días antes de su fallecimiento, la muerte, la niveladora, le apagó la lámpara, dejándole en los brazos de la madre tierra —a la que vuelve— después de haber realizado una existencia abnegada, fecunda e inolvidable.

FUNDACION DE LA "SECCION LA PLATA"
DE LA SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

En la Ciudad de La Plata, a veintidós días del mes de abril de mil novecientos treinta y ocho, siendo las diez y ocho horas, tuvo lugar en el local de la Facultad de Química y Farmacia la organización definitiva de la Sección de La Plata, de la Sociedad Científica Argentina.

La sesión se realizó con la presencia del presidente de la Sociedad, Ing° Jorge W. Dobranich, que pronunció las siguientes palabras:

A las secciones ya constituídas de Córdoba, Santa Fe y Mendoza, agrégase hoy la filial de esta ciudad universitaria, cuyo éxito descuenta de antemano la S. C. A. al contemplar el ambiente de estudio en que aquélla ha de desarrollarse y el entusiasmo y laboriosidad de los estudiosos hombres de ciencia que la componen.

No he concurrido a esta reunión inicial con el propósito de pronunciar discursos, sino para asistir a la colocación del piquete de arranque del surco abierto ya, que ha de conducir el flúido fertilizante a tierras hoy preparadas para brindarnos abundantes cosechas.

La S. C. A. formula votos para que el éxito corone vuestros esfuerzos y para que la labor que hoy iniciáis sea fecunda, a fin de que nuestra Nación ocupe un puesto de avanzada entre aquéllas de mayor riqueza intelectual, como el que ya ha conquistado por su riqueza material.

El delegado de la Sociedad Científica Argentina, doctor Agustín Durañona y Vedia, presidió la reunión, en la que se encontraban presentes diez y seis de los veinticuatro socios con que cuenta la Sección, los señores: doctores Víctor Manuel Arroyo Basaldúa, Rodolfo Adolfo Crespi Gherzi, Jorge Gascón, Humberto Giovambattista, José D. Méndez, Raúl Nico, Virgilio Oliva, Pedro Guillermo Paternosto, Ernesto R. Sabato, Carlos A. Sagastume, Fausto I. To ranzos, César A. Trejo, Danilo Carlos Vucetich; farm. bioq° Obdulio Joaquín F. Rerrari; prof. Ricardo P. Platxeck e ing° Juan Sabato.

Se procedió a la elección de la primera Comisión Directiva, designándose para realizar el escrutinio a los señores doctor Rodolfo Adolfo Crespi Gherzi e ingeniero Juan Sabato; el resultado del escrutinio fué el siguiente:

Para Presidente: doctor Carlos A. Sagastume, doce votos; doctor Hilario Magliano, dos votos; doctora Juana Cortelezzi, un voto.

Para Secretario: doctor Víctor Manuel Arroyo Basaldúa, cuatro votos; ingeniero Adolfo P. Grissi, siete votos; ingeniero Juan Sabato, un voto; doctor Ernesto R. Sabato, un voto; doctor Agustín Durañona y Vedia, un voto.

Para Tesorero: doctor Carlos Teobaldo, siete votos; doctor José D. Méndez, cuatro votos; doctor César Trejo, dos votos; ingeniero Juan Sabato, un voto.

Para Vocales: ingeniero Juan Sabato, once votos; doctor Hilario Magliano, siete votos; doctora Juana Cortelezzi, cinco votos; doctor Federico Christmann, siete votos; doctor Humberto Giovambattista, tres votos; doctor Obdulio Joaquín F. Ferrari, doctor Pedro Guillermo Paternosto, cuatro votos; doctor Danilo Carlos Vucetich, dos votos; doctor Virgilio Oliva, dos votos; doctor Ernesto R. Sabato, un voto; doctor Alfredo Calcagno, un voto; doctor Víctor Manuel Arroyo Basaldúa, un voto; ingeniero Adolfo Grissi, un voto; ingeniero Simón Gerschanik, un voto; ingeniero Emilio J. Ringuelet, un voto, y profesor Francisco Sáenz, un voto.

Inmediatamente se proclamó electa la siguiente Comisión Directiva:

Presidente:	Dr. Carlos A. Sagastume
Secretario:	Ingº Adolfo P. Grissi
Tesorero:	Dr. Carlos Teobaldo
Vocal:	Ingº Juan Sabato
»	Dr. Hilario Magliano
»	Dra. Juana Cortelezzi
»	Dr. Federico Christmann

Con lo que se dió por terminado el acto, pasándose a celegrar la reunión científica inaugural de la Sección, en la que fueron leídas las siguientes comunicaciones:

Doctores Carlos A. Sagastume y Virgilio Oliva: Prefeccionamiento de nuestro dispositivo práctico para evaluar la urea sanguínea.

Ingenieros Juan Sabato y Rogelio Mc. Loudillin: Medida de pequeñas variaciones de grandes tensiones e intensidades de corrientes eléctricas.

Doctor Jerónimo Angli: Aplicación del darcógrafo a la resolución del problema de la decoloración de los extractos curtientes.

Doctor Agustín Durañona y Vedia: Teoremas tauberianos de dos variables.

MEMORIA ANUAL

DEL PRESIDENTE DE LA SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

ING. JORGE W. DOBRANICH

CORRESPONDIENTE AL SEXAGÉSIMO QUINTO PERÍODO ADMINISTRATIVO
(1° DE ABRIL DE 1937 A 31 DE MARZO DE 1938)
APROBADA EN LA ASAMBLEA ORDINARIA DEL 6 DE ABRIL DE 1938

INTRODUCCIÓN

Señores consocios:

Conforme a lo que prescribe el artículo 19, inciso 9° del Reglamento de la Sociedad, paso a informaros acerca del funcionamiento y estado de la misma en 1937, vale decir; durante el sexagésimo quinto ejercicio administrativo (1° de abril de 1937 a 31 de marzo de 1938).

ASAMBLEA

La Sociedad Científica Argentina ha efectuado una sola Asamblea, la ordinaria, que tuvo lugar el 1° de abril de 1937. En ella se aprobó la Memoria anual correspondiente al 64° período administrativo y se integró la Junta Directiva en la forma que ha sesionado hasta la fecha.

JUNTA DIRECTIVA

De acuerdo con lo que dispone el artículo 13 del Reglamento, en la Asamblea general ordinaria indicada precedentemente, se procedió a llenar los cargos que por terminación de su mandato quedaban vacantes:

Presidente: Ingº Jorge W. Dobranich, elegido por dos años.

Vicepresidente 1º: Ingº Evaristo V. Moreno, elegido por un año, para completar el período del Ingº Dobranich, que fué designado Presidente.

Vicepresidente 2º: Dr. Gonzalo Bosch, reelegido por dos años.

Secretario de correspondencia: Dr. Santiago Barabino Amadeo, elegido por dos años.

Protesorero: Prof. José F. Molfino, reelegido por dos años.

Vocal: Ingº Carlos Posadas, reelegido por dos años.

» Dr. Juan Ubaldo Carrea, reelegido por dos años.

» Dr. Reinaldo Vanossi, elegido por dos años.

» Ingº Mario L. Negri, elegido por dos años.

Efectuadas estas designaciones, la Junta Directiva quedó constituída en la siguiente forma:

Presidente	Ingº Jorge W. Dobranich
Vicepresidente 1º	Ingº Evaristo V. Moreno
» *2º*	Dr. Gonzalo Bosch
Secretario de actas	Dr. Antonio Casacuberta
» » *correspondencia*	Dr. Santiago Barabino Amadeo
Tesorero	Arqº Carlos E. Géneau
Protesorero	Prof. José F. Molfino
Bibliotecario	Ingº José S. Gandolfo
Vocal	Ingº Carlos Posadas
»	Dr. Juan Ubaldo Carrea
»	Dr. Reinaldo Vanossi
»	Ingº Mario L. Negri
»	Dr. Jorge Magnin
»	Dr. Angel H. Roffo
»	Cap. de Frag. Héctor R. Ratto
»	Ingº Ricardo J. Gutiérrez

Así constituída la Junta Directiva ha efectuado 27 sesiones durante el período, habiendo tomado, entre otras muchas, las siguientes resoluciones:

Sesión del 8 de abril de 1937

Se resuelve enviar un saludo de adhesión a la Sociedad Colombiana de Ingenieros, en Bogotá, con motivo de cumplir el quincuagésimo aniversario de su fundación.

— El Tercer Congreso Argentino de Vialidad solicita la adhesión de la Sociedad. Se resuelve prestarle su apoyo moral.

— Se resuelve adherirse al Congreso de Química Industrial en París, nombrando delegados de la Sociedad al Ingº Enrique Hermitte y al socio correspondiente en esa Ciudad, Prof. Paul Langevin.

— El socio Dr. Elías A. De Cesare anuncia su próximo viaje de estudio a Alemania. Se resuelve designarlo representante de la Sociedad ante las instituciones similares que visite.

— Se resuelve solicitar del Ministerio de Guerra por intermedio del señor presidente, las planchetas del Instituto Geográfico Militar que forman el mapa de la República Argentina.

— El secretario Dr. Casacuberta informa, que aprovechando su estada en la ciudad de Mendoza pidió al presidente de la Sección Dr. Juan B. Lara convocase a la Comisión Directiva local, con el objeto de conocer el porvenir de dicha filial y aconsejar lo que fuera más conveniente. Reunida dicha Comisión les indicó la conveniencia de solicitar permiso para instalar la secretaría en algún edificio fiscal, regularizar la cobranza, remitir balances trimestrales, realizar una conscripción de socios, depositar los fondos que correspondan en la cuenta corriente del Banco de la Nación, formar una biblioteca científica y recibir los «Anales» en un solo envío, a fin de entregarlos, exclusivamente, a los socios cotizantes. Se aprueban las gestiones realizadas y se auto-

riza al señor bibliotecario para remitir a dicha filial las revistas y libros duplicados como también una colección de los «Anales» desde el año 1910.

— El secretario Dr. Casacuberta informa que de paso por la ciudad de San Luis ha conversado con el señor gobernador de la provincia y estima que hay la probabilidad de crear una filial en razón de existir un núcleo de intelectuales, cuya lista de nombres presenta, que se hallan dispuestos a realizar esta idea. Igualmente opina que ha llegado el momento en que la Sociedad debía tener socios corresponsales en todas las ciudades de la República que pudieran remitir informes de interés científico y orientar a los investigadores que necesiten su cooperación. Después de un cambio de opiniones, se resolvió encomendar al presidente y demás miembros de la Junta Directiva, obtengan los nombres de personas a quienes, por sus antecedentes, se pudieran designar socios corresponsales o delegados para constituir filiales en las ciudades donde hubiera elementos suficientes.

Sesión del 29 de abril de 1937

La Asociación Farmacéutica y Bioquímica Argentina invita a la conferencia que dará el Prof. Dr. Juan A. Sánchez. Se resuelve designar representantes de la Sociedad a los doctores Reinaldo Vanossi, Jorge Magnin y Juan Ubaldo Carrea.

— En conocimiento de la próxima inauguración de la Estación L.R.A. Radio del Estado, se resuelve que el señor presidente concurra a dicho acto y pronuncie algunas palabras en nombre de la Sociedad.

— De acuerdo con lo resuelto, con carácter general, en la sesión del 3 de setiembre de 1936 y según lo informado por la gerencia, se aprueba la siguiente lista de socios con cuarenta años efectivos, de antigüedad: Juan Roffo, Marcelino Herrera Vegas, Luis J. Dellepiane, Alfredo E. Oliveri, Eduardo Latzina y Benito Mamberto. En consecuencia se resuelve encomendar al señor tesorero gestione la acuñación de las medallas y solicitar los datos biográficos correspondientes.

— El Ingº Nicolás Besio Moreno manifiesta que estima posible la realización de la proyectada Exposición de Instrumental Científico y después de un cambio de ideas, se resuelve encomendar al Dr. Santiago Barabino Amadeo, solicite audiencias a los embajadores de Alemania, Gran Bretaña, Francia, Italia y Estados Unidos de Norte América, y consulte la opinión al respecto de los representantes de los mencionados países.

— Al considerarse el punto de la orden del día relativo al ciclo de conferencias del presente año, el Dr. Casacuberta opina en el sentido de que el ciclo conste de un número no mayor de diez grandes actos, a cargo de personalidades destacadas y sobre temas de importancia científica. Aceptada en principio la iniciativa, se designa una Comisión especial compuesta por el Ingº Evaristo V. Moreno, como presidente, Dr. Reinaldo Vanossi, Ingº Nicolás Besio Moreno, Ingº Carlos Posadas, Dr. Santiago Barabino Amadeo y Dr. Antonio Casacuberta, cuya comisión informará en cada sesión de la Junta Directiva sobre el estado de los trabajos a su cargo.

Sesión del 13 de mayo de 1937

Nota del Instituto Darwinion informando su habilitación y que las colecciones y la biblioteca especializada están a disposición de los investigadores. Se resuelve remitir una circular a los socios y hacer saber por la prensa nuestra vinculación con el mencionado instituto.

— Nota del Comité Ejecutivo Argentino del Tercer Congreso Sudamericano de Química, en la cual, después de informar que en el próximo mes de julio se llevará a cabo en Río de Janeiro el mencionado congreso, a iniciativa de la Asociación Química Argentina, solicita la adhesión de la Sociedad y el nombramiento de delegados. Se resuelve adherirse a dicho congreso, designando delegados a los señores doctores Tomás J. Rumi, Enrique V. Zappi, Jorge Magnin y Reinaldo Vanossi.

— Se designan miembros de la Comisión de Hacienda al Arq° Carlos E. Géneau y doctores Antonio Casacuberta y Juan Ubaldo Carrea a cuyo estudio se somete la revisión del reglamento sobre uso de salas del edificio.

— El Dr. Vanossi hace moción para que se solicite al Ministerio de Justicia e Instrucción Pública la designación de algún establecimiento de su dependencia con el nombre del Dr. Angel Gallardo y señala la Escuela de Comercio de San Martín, provincia de Buenos Aires que no tiene denominación. El señor presidente averiguará sobre la posibilidad al respecto.

— El Ing° Evaristo V. Moreno en su carácter de presidente de la Comisión de conferencias, informa que ésta se ha reunido y resuelto formular una lista de las siguientes personas a quienes ofrecerá la tribuna: Doctores, Angel H. Roffo, Cristofredo Jakob, Alberto E. Sagastume Berra, Joaquín Frenguelli, Ramón G. Loyarte, Angel Cabrera, Josué Gollán (h.) y Alberto Castellanos. Se aceptan las personas designadas y el señor presidente propone que la primera conferencia se verifique el día 21 del actual a las diez y ocho horas treinta minutos, a cargo del Ing° Emile Bigeault sobre el tema: Teoría de la radiación infrarroja y su aplicación a la humanidad y a los vegetales. Se acepta la indicación quedando especialmente invitados todos los miembros de la Junta Directiva.

Sesión del 3 de junio de 1937

El secretario Dr. Barabino Amadeo informa que habiendo obtenido audiencia del señor Embajador de Alemania, han convenido en que la Sociedad le envíe una nota, la cual elevaría a las autoridades de su país, cuya contestación hará saber oportunamente. Se resuelve encomendar al Dr. Vanossi, autor del proyecto de la Exposición de Instrumental Científico, la redacción de dicha nota y remitirla a todos los representantes de los países que se ha acordado y a los de Suiza, Bélgica y Japón.

Sesión del 5 de junio de 1937

El señor presidente Ing° Dobranich informa que se ha recibido una nota que, leída por el señor secretario de correspondencia, dice lo siguiente: Buenos Aires, junio 4 de 1937. Señor Presidente de la Sociedad Científica Argentina, Ing° Jorge W. Dobranich. Presente. Señor Presidente: El que

suscribe, en calidad de intermediario del comerciante de esta plaza, señor P. Zamora Casas, establecido en la calle Santiago del Estero Nº 268, viene a ofrecer por la propiedad de la Sociedad ubicada en la calle Cevallos 269, la suma de treinta y cuatro mil pesos moneda nacional al contado. Para el caso de efectuarse esta operación, al firmarse el boleto de compra-venta y recibir la seña del 8 % de ley, me será abonado por mis servicios prestados el medio por ciento de comisión. Con tal motivo, me complazco en saludar al señor Presidente con la mayor consideración. (fdo.) León C. Bethencourt. s/c. Corrientes 1844, la que pone a consideración de la Junta Directiva.

El señor tesorero Arqº Carlos E. Géneau pide la palabra para exponer su opinión favorable a la realización de la compra propuesta y, a fin de fundarla, expresa los antecedentes relativos a la renta líquida que se obtiene de la propiedad calle Cevallos 269 y los elevados gastos que ella ocasiona en diversos conceptos como también las dificultades de su conservación, que demandará la realización de importantes obras no productivas. El secretario Dr. Casacuberta recuerda que la Asamblea general extraordinaria celebrada el diez y ocho de setiembre de mil novecientos treinta y cuatro autorizó a la Junta Dirctiva para vender el referido inmueble en el precio mínimo de treinta y cuatro mil pesos nacionales y estableció la forma de inversión del producto líquido de la venta, por lo que se adhiere a la opinión del señor tesorero.

Los vocales doctores Vanossi, Magnin y Carrea también expresan su conformidad e igualmente los demás miembros de la Junta, resolviéndose, en definitiva, por unanimidad, aceptar la propuesta de compra en los términos que se ha mencionado, de acuerdo con lo aconsejado por la asamblea del diez y ocho de setiembre de mil novecientos treinta y cuatro y la facultad que le confiere a la Junta Directiva el inciso sexto del artículo diez y ocho del Reglamento, y se designan a los miembros de la Junta Directiva Arqº Carlos E. Géneau, Dr. Santiago Barabino Amadeo y Dr. Antonio Casacuberta para que convengan con el interesado las ulterioridades que sean pertinentes, quedando facultado el señor presidente para allanar cualquier dificultad que pudiera suscitarse.

Sesión del 10 de junio de 1937

El Dr. Vanossi presenta las siguientes mociones: *a*) Iniciar las gestiones necesarias para obtener rebajas o liberación de derechos aduaneros sobre instrumental científico en general. Se resuelve consultar a la Unión Industrial Argentina por intermedio del Dr. Magnin; *b*) La Sociedad Científica Argentina patrocina la formación de un comité de bibliotecarios a los efectos de obtener la coordinación en lo que se refiere a la suscripción y canje de revistas de carácter científico, técnico y profesional a fin de permitir aumentar y conocer el acervo bibliográfico de ese carácter, tratando de evitar las superposiciones en la mayoría de los casos. Se resuelve tratar esta moción en una sesión próxima con asistencia del bibliotecario.

Sesión del 24 de junio de 1937

Nota de la Asociación de Ex-Alumnos de Catedral al Norte solicitando la adhesión moral y material de la Sociedad al homenaje a tributarse al Ingº Francisco Seguí. Se resuelve acordar el apoyo moral y se autoriza al señor presidente para designar una comisión.

—Se resuelve acordar adhesión moral y pecuniaria al IV Congreso Pan Americano de la Tuberculosis y designar representante a un socio correspondiente en Chile.

— Se acepta un pedido del señor Director de los «Anales» para emplear cuatro pliegos por número hasta fin de año.

— Se resuelve designar al Dr. Agustín Durañona y Vedia para organizar una filial en la ciudad de La Plata.

— Se resuelve autorizar al señor presidente para que procure obtener el desalojo del inquilino de la propiedad Cevallos 269 y convenir con el mismo la indemnización en las condiciones más favorables.

Sesión del 1º de julio de 1937

El señor presidente Ingº Jorge W. Dobranich informa que, de acuerdo con las facultades conferidas expresamente por la Junta Directiva en las sesiones del 5 y 24 de junio ppdo., ha convenido con el inquilino de la propiedad Cevallos 269, Arqº Francisco Squirru que, mediante una indemnización de $ 600.— nacionales, deje libre la finca en un plazo de quince días a contar desde el 25 de junio ppdo. y que, de conformidad con dicho acuerdo, se ha recibido una carta, de la cual se da lectura por secretaría, que lo ratifica. Dicha indemnización representa el 50 % de la suma que el mencionado inquilino reclamaba. En consecuencia, agrega, se ha firmado el boleto de venta a favor del señor P. Zamora Casas y el escribano designado por el comprador ha iniciado los trámites pertinentes. Se aprueba la actuación del señor presidente a quien se felicita por el éxito obtenido.

— El vocal Dr. Vanossi reitera su moción formulada en la sesión del diez de junio ppdo. relativa a la formación de un comité de bibliotecarios. El señor bibliotecario Ingº Gandolfo apoya la iniciativa informando que, por su parte, ha tratado de orientar la adquisición de revistas con ese criterio y pide que se remitan notas a las autoridades de las cuales dependen las principales bibliotecas públicas y particularmente a las siguientes: Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Biblioteca Nacional de Marina, Facultad de Ciencias Médicas, Centro Argentino de Ingenieros, Facultad de Agronomía y Veterinaria, Facultades de Química y Farmacia y de Ciencias Físicomatemáticas de La Plata, Museo y Observatorio Astronómico de La Plata, Asociación Química Argentina, Colegio Nacional de Buenos Aires, Instituto Bacteriológico, etc. con el propósito de hacer conocer la iniciativa y recabar sus opiniones.

— Por indicación del Dr. Magnin se resuelve ampliar la delegación al Tercer Congreso Sudamericano de Química, designando al Prof. Ramón G. Loyarte.

Sesión del 24 de julio de 1937

El señor presidente manifiesta que, como es de pública notoriedad, el día veinte del actual ha fallecido el socio honorario Ingº Guillermo Marconi, cuyos méritos pone de relieve, por lo que invita a los presentes, como un homenaje a su memoria, a ponerse de pie. El señor vicepresidente 1º Ingº Evaristo V. Moreno apoya la invitación manifestando que el mundo científico ha perdido a uno de sus más grandes benefactores: Guillermo Marconi inventor de la trasmisión de la palabra a largas distancias por la aplicación de las ondas

eléctricas desde las de gran longitud hasta las ultra cortas, a la telegrafía y telefonía y a la televisión va extendiendo su campo de acción a otras actividades del hombre con la esperanza de llegar a la curación de las enfermedades más terribles que diezman a la humanidad. Agrega que estima está en el ánimo de todos nosotros que la Sociedad Científica Argentina, con su alta representación de la intelectualidad de nuestro país, exprese su adhesión al sentimiento general por la desaparición de tan elevado exponente de la Ciencia y ampliando la moción del señor presidente propone: que se dirija una nota de pésame a la Embajada de Italia para que se trasmita a la familia del extinto y a su Gobierno; una nota de pésme por correo aéreo a la Real Academia Italiana de la que formaba parte; que se publique un artículo necrológico en los Anales de la Sociedad y realizar un acto de homenaje a la brevedad posible. Por unanimidad se acepta todo lo propuesto.

— El Arq° Géneau, en su calidad de secretario de la Comisión de Conferencias radiotelefónicas, da cuenta de que con fecha 6 del actual se inauguró la Estación L.R.A. Radio del Estado, en cuyo acto el presidente Ing° Dobranich pronunció un breve discurso ante el micrófono en nombre de la Sociedad Científica Argentina. El día siguiente, miércoles, el Dr. Gonzalo Bosch inició el ciclo de conferencias radiotelefónicas a las 18 y 45 horas con una alocución de 15 minutos trazando a grandes rasgos la historia de la Sociedad desde su fundación, con referencias principalmente a los hombres de ciencia que actuaron durante las distintas etapas de su desarrollo. El miércoles 14, el Ing° Nicolás Besio Moreno hizo uso del micrófono refiriéndose a los trabajos, congresos, etc. organizados por la Sociedad Científica Argentina desde 1872 y finalmente el miércoles 21, un locutor de la estación leyó la conferencia enviada desde Santa Fé por el Ing. José Babini, intitulada: ¿Matemáticas o Matemática?, habiendo previamente leído una nota de la Sociedad asociándose al duelo de Italia y de la humanidad entera por el fallecimiento del ilustre Marconi, quién con motivo de su estada en Buenos Aires en el año 1910, fué nombrado socio honorario de la Institución.

— Por secretaría se da lectura a una contestación de la Embajada de los Estados Unidos de América, relativa a la Exposición de Instrumental Científico y se resuelve comisionar al Dr. Bosch para que procure conocer la opinión del Ministerio de Relaciones Exteriores.

Sesión del 5 de agosto de 1937

—La Intendencia Municipal de La Plata invita a la Junta Directiva a concurrir a la ceremonia a realizarse el 6 del actual en homenaje al Dr. Carlos Spegazzini. Se resuelve designar al Prof. José F. Molfino y al Ing° Agr° Santiago Boaglio para que representen a la Sociedad en dicho acto.

—El señor presidente informa sobre las gestiones que ha realizado para preparar el acto de homenaje al Ing° Guillermo Marconi y presenta el siguiente programa que es aprobado por unanimidad:

I. — Apertura del acto por el presidente de la Sociedad Científica Argentina, Ing° Jorge W. Dobranich.

II. — Larghetto de Händel, por el Cuarteto «Pro Arte».

III. — Marconi en los Orígenes y en la Evolución de las Transmisiones Inalámbricas, por el Ing° Eduardo L. Edo.

IV. — Andante funebre e doloroso, ma con moto de Tschaikowsky, por el Cuarteto «Pro Arte».

Componentes del Cuarteto «Pro Arte»: Sr. Naum Krantz, primer violín; Sra. Ada Sturm, segundo violín; Sr. Andrés Vancoillie, viola y Sr. Liborio Rosa, violoncello.

— Previo informe del señor presidente sobre la Exposición de Instrumental Científico, se da lectura a un anteproyecto redactado por el Dr. Reinaldo Vanossi, que merece la aprobación por unanimidad, resolviéndose que al constituirse la comisión se incorporen a la misma técnicos especialistas.

— El señor presidente Ingº Dobranich informa que ha firmado, conjuntamente con los secretarios de actas y de correspondencia, doctores Antonio Casacuberta y Santiago Barabino Amadeo, la escritura de protocolización de estatutos de la Sociedad y la de venta de la finca calle Cevallos 269, habiéndose depositado el respectivo importe en la cuenta corriente del Banco de la Nación hasta tanto se practique la liquidación definitiva de gastos y se resuelva la adquisición de títulos de renta. Se aprueba lo actuado.

Sesión del 19 de agosto de 1937

— El Directorio de las Obras Sanitarias de la Nación solicita le sea cedido en las condiciones que la Sociedad determine el cuadro en relieve de la Ciudad de Buenos Aires, por ser de suma utilidad para dicha Repartición. Se resuelve acceder a lo solicitado y autorizar al señor presidente para convenir las condiciones.

— El Ministerio de Agricultura de la Nación comunica la creación del Instituto de Investigaciones sobre la Langosta, el que estará asesorado por un Consejo Consultivo compuesto por cinco miembros y pide a la Sociedad designe la persona indicada para integrarlo. Se propone al Dr. Emiliano J. Mac Donagh, miembro del Consejo Científico.

— Se resuelve adherirse al Congreso Pan Americano de la Tuberculosis, de Chile.

— El Arqº Géneau informa sobre las conferencias realizadas por medio de la Estación L.R.A. Radio del Estado y propone se incorpore a la Comisión al Prof. José F. Molfino. Se aprueba.

— El Arqº Carlos E. Géneau en representación de la Comisión de Hacienda de la que forma parte, conjuntamente con los doctores Antonio Casacuberta y Juan Ubaldo Carrea, informa que se ha abonado al Escribano Sr. Arenaza la cuenta de gastos y honorarios con motivo de la venta de la propiedad calle Cevallos 269 y habiendo consentido dicho señor una substancial rebaja en la escritura de protocolización de los Estatutos de la Sociedad, estima debería agradecérsele por nota. Por otra parte se ha gestionado en Obras Sanitarias de la Nación la condonación de una multa de $ 50.— nacionales que había aplicado, según el informe en poder del Escribano, por deficiencias de la instalación respectiva en Cevallos 269. Hecha la liquidación de los gastos de la venta de esa propiedad, la Comisión de Hacienda ha formulado el presupuesto de recursos y gastos mensuales desde agosto a diciembre de 1937 sujeto a un reajuste en noviembre y según el cálculo efectuado, la Comisión aconseja la adquisición de títulos por valor de $ 34.000.— nacionales que es el precio de venta de la casa Cevallos 269, para engrosar el fondo de reserva de la Sociedad; dado que cubiertos los gastos ocasionados por dicha venta, queda en depósito en cuenta corriente en el Banco de la Nación una suma suficiente para hacer frente a las necesidades previsibles.

Sesión del 26 de agosto de 1937

El señor tesorero presenta el detalle sobre el resultado de la venta de la propiedad Cevallos 269 que, previa lectura, se aprueba:

Valor con que figuraba en el Activo	$	41.893.78		
Precio convenido de la venta	»	34.000.00	$	7.893.78

Gastos varios

Comisión abonada al intermediario	$	170.00		
Pagado por 4 ½ meses de afirmado..........	»	348.10		
Pagado por 1 mes de Contribución Territorial ..	»	24.00		
Pagado por 1 mes de Impuestos Municipales ..	»	16.80		
Pagado indemnización inquilino	»	600.00		
Pagado por 3 meses Obras Sanitarias	»	36.00		
Pagado por gastos de escrituración y protocolización de los Estatutos	»	438.00	»	1.632.90
Importe líquido de la operación			»	32.367.10
Total			$	41.893.78

— La Comisión General de Homenaje al Ingº Guillermo Marconi, invita a la reunión que se efectuará el día 27 del actual. Se resuelve designar delegado de la Sociedad al Ingº Evaristo V. Moreno.

Sesión del 2 de setiembre de 1937

El Instituto de Medicina Experimental invita a la ceremonia que, con motivo de colocar las piedras fundamentales de los nuevos pabellones del mismo, se realizará el día 9 del actual. Se designan al Dr. Gonzalo Bosch y al Ingº Guillermo Buontempo para que representen a la Sociedad en dicho acto.

Sesión del 23 de setiembre de 1937

— Se designa al Ingº Carlos A. Lizer y Trelles para representar a la Sociedad en el acto de la colación de grados de la Facultad de Agronomía y Veterinaria.

— Se designan socios correspondientes a los doctores Tulio Levi Civita, en Roma, y Georges Darmois, en París, a pedido del Dr. Vanossi, del Prof. Molfino y del Arqº Géneau y se resuelve comunicar dichas designaciones al Instituto Argentino de Cultura Itálica y al Instituto de la Universidad de París en Buenos Aires.

Sesión del 7 de octubre de 1937

La Facultad de Agronomía y Veterinaria invita al acto de entrega de diplomas de profesores honorarios al Ing° Domingo Selva y al Dr. Nicanor A. de Elía. Se designan al Ing° Carlos A. Lizer y Trelles y Prof. José F. Molfino, para que representen a la Sociedad en dicho acto.

— El señor presidente da cuenta que por gestiones realizadas ante los miembros de la Comisión Protectora de Bibliotecas Populares, consiguió el aumento a 100 ejemplares la suscripción a los «Anales», la que actualmente era de 50.

— La Asociación Química Argentina, con motivo de sus Bodas de Plata, solicita la designación de representante. Se resuelve designar al Dr. Reinaldo Vanossi para que concurra a dichos actos y al señor presidente para que asista al banquete.

— La Academia de Ciencias de Buenos Aires invita a la sesión pública, en la que hablará el Dr. Gonzalo Bosch. Se designa al Prof. José F. Molfino para que represente a la Sociedad en dicho acto.

— El Tercer Congreso Argentino de Obstetricia y Ginecología invita a la sesión inaugural. Se resuelve designar al Dr. Gonzalo Bosch para que represente a la Sociedad en dicho acto.

— La Asociación Wagneriana de Buenos Aires invita al acto conmemorativo del 25° aniversario de su fundación. Se resuelve agradecer y comunicar que concurrirá el señor presidente.

— El Ministerio de Justicia e Instrucción Pública de la Nación solicita detalle de la ayuda que se espera del Gobierno a fin de saber en qué medida el Ministerio puede colaborar al éxito de la Exposición de Instrumental Científico proyectada. Se resuelve autorizar al señor presidente en colaboración con el Dr. Vanossi para formular el pedido.

Sesión del 28 de octubre de 1937

Se resuelve designar al Dr. Gonzalo Bosch para que represente a la Sociedad en el acto de homenaje al Prof. Dr. Emile Sergent, auspiciado por la Asociación Médica Argentina.

— El señor presidente informa que la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales ha resuelto realizar un acto de homenaje a la memoria del Ing° Huergo el día 4 de noviembre a las 11 horas. Se resuelve: Enviar nota de adhesión y una palma de flores naturales, concurrir la Junta Directiva en pleno, invitar por circular a los socios y designar al Ing° Enrique Chanourdie para que haga uso de la palabra en nombre de la Sociedad.

— Se resuelve solicitar la rebaja o liberación de derechos para los instrumentos científicos de precisión y drogas especiales para la investigación científica que no se producen en el país, ni se fabricarán de inmediato, destinados a la Exposición de Instrumental Científico.

Sesión del 4 de noviembre de 1937

En conocimiento del sensible fallecimiento del Prof. Leopoldo Herrera se resuelve enviar nota de pésame al Dr. Horacio Damianovich, pidiéndole lo haga extensivo a toda la familia.

Sesión extraordinaria del 5 de noviembre de 1937

En la ciudad de Buenos Aires a cinco días de noviembre de mil novecientos treinta y siete, siendo las diez horas, reunidos los miembros de la Junta Directiva cuyas firmas figuran al margen del acta, el señor presidente Ingº Jorge W. Dobranich, declara abierta la sesión y manifiesta que ésta se realiza extraordinariamente con motivo del sensible fallecimiento del socio honorario Dr. Eduardo L. Holmberg, ocurrido con fecha de ayer.

Por unanimidad se toman las siguientes resoluciones:

1º Ponerse de pie en homenaje a su memoria.

2º Designar una Comisión compuesta por el presidente y dos vocales para velar sus restos.

3º Designar al Ingº Agustín Mercau para que haga uso de la palabra en el acto del sepelio.

4º Publicar avisos en los diarios, invitando a los señores socios a concurrir al sepelio.

5º Enviar una nota de pésame a la familia con transcripción de la presente acta.

Sesión del 12 de noviembre de 1937

A pedido del Instituto Cultural Obras Sanitarias de la Nación, se resuelve prestar la adhesión de la Sociedad en el acto de homenaje al Ingº Carlos Echagüe y se designa orador al Ingº Nicolás Besio Moreno.

Sesión del 25 de noviembre de 1937

El Museo Social Argentino invita al acto a efectuarse con motivo de la colocación de la piedra fundamental de su nueva sede social. Se designa al Ingº Dobranich para que haga acto de presencia en nombre de la Sociedad.

— La Comisión de homenaje al Dr. Rodolfo Rivarola solicita la adhesión de la Sociedad. Se resuelve presentarle los saludos de la Sociedad.

— El Instituto del Museo de La Plata invita al acto oficial de entrega del premio «Francisco P. Moreno» al Dr. E. Herrero Ducloux. Se resuelve designar al Dr. Alberto E. Sagastume Berra para que lleve la representación de la Sociedad.

— La Sociedad Provincial de Fomento «Unión Salteña» solicita la adhesión de la Sociedad a la Primera Reunión de Historia del Norte Argentino que se realizará en Salta a mediados del año próximo. Se resuelve enviar la adhesión moral.

— El señor presidente informa sobre el resultado de la entrevista con el señor Ministro de Justicia e Instrucción Pública y se resuelve pedir un subsidio de $ 100.000.— nacionales para los siguientes gastos que ocasionaría la Exposición de Instrumental Científico: Director técnico, Personal auxiliar, Secretaría, Publicidad, Transporte, Instalaciones, Concurso de afiches y Seguros.

Sesión del 9 de diciembre de 1937

Se resuelve publicar un número especial de los «Anales» en homenaje al Dr. Eduardo L. Holmberg, en cuanto los recursos lo permitan, después del número destinado al Dr. Gallardo.

— La Junta Directiva en su sesión de la fecha, acepta y declara vigente a partir de la misma, la reglamentación propuesta por el señor Director de los Anales Ingº Emilio Rebuelto, a efectos de procurar el mantenimiento de la elevación científica que corresponde a la tradicional publicación de la Institución:

1º El Director de los «Anales» elevará a la Junta Directiva, cuando a su juicio corresponda, los trabajos que le sean remitidos para su publicación. La Junta Directiva resolverá de por sí o previo dictamen de los asesores que en cada caso designe y en forma inapelable sobre la conveniencia u oportunidad de la respectiva publicación y en todo caso, con recomendación de las modificaciones u observaciones que sea prudente introducir.

2º Las tiradas aparte cualquiera que sea su número, correspondientes a artículos publicados en los «Anales» llevarán inscripto en la carátula la constancia de su publicación en esta revista, tomo, año y conservará el encabezamiento y la compaginación que le correspondía en el texto general.

3º No se publicará ningún trabajo cuya extensión sea mayor de treinta y dos páginas impresas, incluyendo grabados y cuadros. No se publicarán en cada semestre más de tres trabajos de un mismo autor o de éste en colaboración con otro, cualquiera que sea su extensión; ni más de cuarenta y ocho páginas impresas en dos o tres artículos.

4º No se publicarán trabajos en idioma extranjero, salvo aquellos remitidos por socios correspondientes de la Sociedad y los que a juicio de la Junta Directiva sean de particular interés.

5º No se reproducirán trabajos ya publicados en revistas del país o en cualquier otro de idioma castellano. A los efectos de esta disposición, los autores declararán por escrito al presentar el trabajo, en este sentido.

6º En el orden de publicación de los trabajos se dará preferencia a aquéllos cuyos autores sean socios de la Sociedad, sin perjuicio de que en casos particulares la Junta pueda resolver lo contrario.

Sesión del 23 de diciembre de 1937

Se resuelve adherirse al Tercer Congreso Pan Americano de Carreteras a realizarse en Santiago de Chile.

— La Sociedad Argentina de Antropología manifiesta haber solicitado de la Municipalidad de Buenos Aires para que se dé el nombre de Juan B. Ambrosetti a una calle de la ciudad y solicita la adhesión de la Sociedad a dicha iniciativa. Se resuelve acceder a lo solicitado.

— Se resuelve designar al Ingº Francisco A. Mermoz para que integre la Comisión Nacional de Uniformación de Materiales dependiente del Ministerio de Agricultura, en representación de la Sociedad.

— Se aprueba por unanimidad, en general y en particular, el siguiente des-

pacho de la Comisión de Hacienda, con el agregado que al final se expresa: Estima la Comisión que puede accederse al pedido de contribución de $ 200.— m/n. anuales, para el año 1938, por el Comité Permanente de Bibliotecarios, a acreditar en dos cuotas, en la inteligencia de que se destinará a la publicación del Catálogo General de Revistas y con cargo de rendición de cuentas, cuota por cuota.

La Junta Directiva insinúa que toda contribución se haga general y vería con agrado que en el membrete y actuaciones se haga constar la paternidad de la iniciativa.

Sesión extraordinaria del 3 de marzo de 1938

En la ciudad de Buenos Aires, a tres días del mes de marzo de mil novecientos treinta y ocho, reunidos los señores miembros de la Junta Directiva cuyas firmas figuran al margen, asume la presidencia el señor Vicepresidente 2º Dr. Gonzalo Bosch, en ausencia del titular y del Vicepresidente 1º, y siendo las diez horas declara abierta la sesión manifestando que ésta se realiza extraordinariamente con motivo del fallecimiento ocurrido en el día de la fecha del consocio y expresidente Dr. Nicolás Lozano y después de poner de manifiesto lo irreparable de su pérdida y los importantes servicios prestados a la Sociedad y al país por el Dr. Lozano, se toman por unanimidad las siguientes resoluciones:

1º Ponerse de pie en homenaje a su memoria.
2º Publicar avisos en los diarios invitando a los señores socios a concurrir a su entierro.
3º Constituirse en corporación en la casa del extinto para velar el cadaver.
4º Designar a su Vicepresidente 2º Dr. Gonzalo Bosch para que haga uso de la palabra en el acto del sepelio.
5º Encargar la redacción de un artículo necrológico en los «Anales» con la publicación de un retrato del extinto.
6º Enviar nota de pésame a la familia con transcripción de la presente acta.

ANALES

Los « Anales » de la Sociedad han estado, como en años anteriores, bajo la competente y acertada dirección del ingeniero Emilio Rebuelto, que la viene desempeñando con reconocida inteligencia desde el 5 de diciembre de 1933.

A los efectos de procurar el mantenimiento del nivel científico que corresponde a la tradicional publicación de la Sociedad, la Junta Directiva en su sesión de fecha 9 de diciembre último, aprobó el reglamento para las publicaciones de artículos científicos, que figura en la entrega de diciembre (pág. 445).

Las entregas de los « Anales » aparecidas en este período, son las siguientes: III a VI del tomo CXXIII; I a VI del tomo CXXIV; I y II del tomo CXXV. Los trabajos publicados en las mismas son:

A. E. Sagastume Berra: Fundamentos matemáticos de la música.

R. Bazán y P. Koler: La Cochinilla Neocoelostoma xerophila Hemp. productora de «laca».

Nicolás Besio Moreno: Memoria anual correspondiente al sexagésimo cuarto período administrativo (1º de abril de 1936 a 31 de marzo de 1937).
J. C. Vignaux: La forma factorial del número complejo hiperbólico.
Salvador Canals Frau: La obra del padre Falkner y su contenido etnológico.
Mauricio Durrieu: Cotejos económicos y selección económica.
Carlos Wauters: La chacra experimental de Patagones. Impresiones de un observador.
P. Magne de la Croix: De l'origine des pinnipedes.

Sección Santa Fé de la Sociedad Científica Argentina: Asamblea del 16 de abril de 1937. Disertaciones de los Dres. Horacio Damianovich y Gustavo Fester. Informe de la presidencia leído en Asamblea ordinaria de abril de 1937.

E. A. De Cesare: Relaciones de carácter ordinal en las formas fundamentales de 1ª especie.
Alejandro von der Becke: Prof. Dr. Hans Spemann. Premio Nobel 1935. Biografía y breve reseña de su obra.
E. A. De Cesare: Subordinación de la métrica no-Euclídea a la Geometría Proyectiva.
Otto Gottschalk: Reglamentos para estructuras de hormigón armado.
Guillermo Schulz: Posibles variaciones de la superficie del geoide y sus influencias sobre la nivelación de precisión.
Luis A. Solórzano: Eliminación de la diferencia de potencial de solución a solución en las pilas de concentración sin emplear electrolitos como medio de unión.
Fernando L. Gaspar: La ortogonalidad sin ponderación. El problema de Hermitte.
Francisco La Menza: Los sistemas de inecuaciones lineales y sus aplicaciones al estudio de los cuerpos convexos.
C. M. Albizzati: La presencia del glutatione en el germen de trigo, y su influencia en las harinas.
C. M. Albizzati: Notas sobre el empleo de la harina de malta como «mejorador biológico» en la harina de trigo.

Sección Santa Fé de la Sociedad Científica Argentina:

Sesión de comunicaciones del 25 de junio de 1937.
José Babini: Sobre un problema de Descartes.
Guillermo Berraz: Microanálisis elemental orgánico por gasometría. Determinación simultánea de N, C e H.
C. Christen y G. Berraz: Representación convencional de los aparatos y materiales de laboratorio.
G. A. Fester, J. Cruellas y F. Gargatagli: La «Magallanita», un nuevo mineral bituminoso.
Ciclo de conferencias: La migración de los símbolos. Conferencia del Sr. *Duncan L. Wagner.*

Sesión de comunicaciones científicas del 13 de agosto de 1937:

Dámaso Lachaga: Las grietas en los suelos de Santiago del Estero.
Horacio Damianovich: La ley de producción del helio por el radio. Resultados obtenidos hasta el presente y nuevas experiencias.

H. Damianovich y J. Piazza: La química del Helio y elementos análogos. Descomposición térmica de los compuestos Helio-Platino a altas presiones en atmósfera de Helio.

Horacio Damianovich y Francisco Urondo: Helio y radioactividad en los minerales de uranio — I — Autunita y sus fracciones.

Emilio L. Díaz: Sobre efectos de la radiación solar en la estratosfera.

E. Natale: La curva logística representativa del desarrollo numérico de la población humana.

Carlos Wauters: Las aguas subterráneas en nuestra legislación civil.

Sección Santa Fé de la Sociedad Científica Argentina:

Ciclo de conferencias: Conferencias de los Dres. *Cristofredo Jakob* y *Gustavo A. Fester.*

Cristofredo Jakob: Necesidad de fiscalizar las reservas acuáticas en la República Argentina.

Gustavo A. Fester: Viaje de estudio a la zona Magallánica y Tierra del Fuego.

Sesión de Comunicaciones del 1 de diciembre de 1937.

Gregorio Kleer: Sobre la naturaleza de las rocas de la Cantera Aguirre de las sierras del Tandil y su diferenciación.

José Babini: Sobre algunas propiedades de las derivadas y primitivas de los polinomios de Legendre.

Gustavo A. Fester: La Geoquímica del Vanadio.

Virgilio Tedeschi: Las teorías sobre conductibilidad electrolítica y metálica y el campo magnético producido por las cargas en movimiento.

Jacques Hadamard: Sus certaines questions de calcul integral.

Juan C. Vignaux: Algunas fórmulas fundamentales para las funciones polígenas de una y varias variables.

Antonio Valeiras: Una propiedad fundamental de la curva de Viviani, y otras cuestiones conexas.

Reinaldo Vanossi y *Raúl Ferramola:* Microdeterminación cerimétrica de glucosa sobre 0.01 ml. de sangre.

P. Magne de la Croix: El cobre en el ser humano.

Mme. A. Cannoni de Degiorgi et *Enrique V. Zappi:* Sur quelques nouveaux dérive fluorés aromatique.

Lencastre Pereira de Andrade: A influencia das conquistas e descobrimentos dos portugueses no conhecimento das plantas.

Carlos Rusconi: Sobre los roedores *Plataeomys* y *Pseudoplataeomys.*

Carlos E. Dieulefait: Los momentos de un grupo de funciones de probabilidad y sus relaciones con las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden. Las ecuaciones de Laplace. Las fracciones contínuas algebráicas y la suma de las series divergentes.

José Babini: ¿Matemáticas o Matemática?

Adolfo T. Williams: La estructura de los espectros y las líneas últimas.

José Piazza: Nuevo motor térmico.

BIBLIOTECA

La permanente atención que exige el gobierno y organización de la Biblioteca, le ha sido dispensada con el empeño que merece la noble misión que le compete como auxiliar destacado en la actividad cultural del país.

Se prosiguió la copilación de las colecciones de revistas y libros con el orden y método habituales, sin descuidar la ampliación del acervo bibliográfico con nuevas publicaciones que ingresaron en concepto de canje y donación. La ajustada posibilidad económica de la Sociedad permitió solo la ampliación de la suscripción de revistas a las que publica « The Iron and Steel Institute, London »; en cambio fué nula la posibilidad de adquirir libros o la de mejorar las condiciones en que se archivan muchísimas colecciones mediante la encuadernación.

Las vinculaciones que mantiene nuestra Biblioteca con un gran número de instituciones científicas mundiales, se han atendido con la mayor cordialidad y deferencia, siendo múltiples y comunes las solicitaciones evacuadas durante el transcurso del período anual.

Algunas casas editoras y numerosos publicistas nos honraron con sus producciones, que se han incorporado a los anaqueles.

No menos intensa y cuidadosa ha sido la tarea desarrollada para mejorar paulatinamente la organización de la Biblioteca dentro de las normas que aconseja la Biblioteconomía.

Se continuó con ritmo acelerado el fichado de las publicaciones periódicas que contienen un trabajo especial en cada número, que más bien invisten el carácter de libros de aparición periódica, auspiciados por instituciones especializadas, que de revistas. Mediante dicha labor se han enriquecido los ficheros con obras de alto valor, que hasta aquí revistaron anónimas en el registro de su numeración.

Se ha llevado a cabo por primera vez la confección de la lista de publicaciones que actualmente recibe la Sociedad por orden alfabético riguroso de los títulos, y, ya dispuesta su publicación, en breve será impresa y repartida a los socios.

Se ha considerado la situación de muchas publicaciones que se registraban con irregularidad o cuyos números no llegaban desde algún tiempo atrás; previa la consulta del caso con la institución correspondiente, en muchos casos el resultado fué la baja de la revista, por causas diversas, ajustando los canjes a aquellos que son mantenidos con reciprocidad.

El catálogo de existencias de publicaciones periódicas, preparado por el doctor Reinaldo Vanossi, y que editó la Sociedad Científica Argentina en el año 1927, ha sido actualizado al 31 de diciembre de 1934, fecha en que se clausuró otro Registro de Publicaciones.

Otro aspecto también atendido fué el de la clasificación por materias, de los libros de la Biblioteca. Decididamente adoptamos en este caso el sistema Decimal Internacional, por su universalidad y simple aplicación o búsqueda por medio de los bien detallados índices que encauzan la labor, especialmente, cuando como en el caso de nuestra Biblioteca la

consulta es pública y el gobierno electivo y transitorio. La clasificación de las obras fué completa de acuerdo con el detalle que en cada caso impusieron las existencias, en los siguientes números de base de la clasificación decimal:

0 — Obras generales.
1 — Filosofía.
2 — Religión: Teología.
3 — Ciencias Sociales y Derecho.
4 — Filología. Lingüística.

Aun queda una larga obra por cumplir en ese aspecto que no hesitamos en reputar la más interesante labor que pueda desarrollarse en la Biblioteca para responder a impostergables exigencias de organización.

Finalmente, se ha iniciado un nuevo inventario y control de las existencias de libros para ajustarlos a la realidad actual que largas décadas de funcionamiento de la Biblioteca, sobre todo, en las condiciones precarias en que tuvo que desenvolverse en el anterior local de la calle Cevallos 269, indudablemente, tienen que haberlas resentido.

Se proyectaron las instalaciones para archivar revistas en la sala « Germán Burmeister », aprovechando las existentes, pero con una disposición racional que permite el mayor aprovechamiento de la capacidad del archivo y una lógica distribución de las cargas. Dicho proyecto fué aceptado por la Dirección General de Arquitectura de la Nación, y su ejecución está contemplada en el plan de construcciones que desarrollará en el año en curso.

La Comisión Protectora de Bibliotecas Populares subvencionó a la Biblioteca por primera vez con la suma de mil doscientos pesos anuales, para contribuir a sufragar los gastos que en ella se originen.

Los socios han aprovechado en mayor número e importe del beneficio que les ha ofrecido la Sociedad, al adquirirles libros por su cuenta a precios rebajados en las principales editoriales extranjeras. La Biblioteca está en correspondencia para obtener mayores mejoras.

A iniciativa de la Sociedad Científica Argentina, que también prestó ayuda material inicial y el concurso de su sede Social, se ha fundado el Comité Permanente de Bibliotecarios con la adhesión de las principales Bibliotecas universitarias, científicas y técnicas de Buenos Aires y La Plata, en cuyos institutos se cultivan las ciencias puras y aplicadas.

La Biblioteca de la Sociedad Científica Argentina, adherente fundadora, ha prestado su más decidida dedicación a las gestiones del Comité Permanente de Bibliotecarios, y considera apropiado expresar que de esa indispensable acción coordinadora pueden esperarse loables resultados en beneficio de los estudios e investigaciones que se llevan a cabo en el país. Convencidos de la importancia de la obra que debe desarrollar y del empeño que ponen los Delegados en superar las dificultades de la labor claramente delineada, satisface hacerles llegar nuestra voz de aliento y nuestros augurios por que el éxito corone sus afanes.

La Biblioteca es el legado espiritual de la Sociedad amasado con la labor paciente y continua de diversas generaciones de Socios en beneficio de sí mismas y de las sucesoras. Todo esfuerzo que allí se des-

pliega, es una obra útil y viva cualquiera sea el número de años que transcurra. En este concepto, hemos desplegado una acción intensa en pro de su paulatina organización técnica, que, en definitiva, aspira a brindar a sus consultores, de una manera fácil y expeditiva, el material bibliográfico que necesiten, entresacado de la gran masa que atesoran sus anaqueles.

Resumen del movimiento habido en la Biblioteca durante el año transcurrido:

Cuenta con una existencia de 39.800 volúmenes y 11.300 folletos; entre los primeros se incluyen los ejemplares o tomos de las 1.300 colecciones distintas de revistas.

Canjes nuevos

Traction Nouvelle, París (Francia; *Associazione Italiana di Aerotecnica (L'Aerotecnica),* Roma (Italia); *Public Works Department — Government of Bombay—,* Bombay Castle (India); *Forschungen und Fortschritte,* Berlín (Alemania); *Facultad de Veterinaria,* Montevideo (R. O. del Uruguay); *Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales,* Bogotá (Colombia); *Ministero della Corporazioni,* Roma (Italia); *Association pour l'Etude Géologique de la Méditerranée Occidentale,* Barcelona (España); *Revista de Economía Argentina* (Capital); *Sociedad de Estudios Astronómicos y Geofísicos,* Tacubaya, D. F. (México); *Sociedade Brasileira de Medicina Veterinaria,* Río de Janeiro (Brasil); *Physico-Chemical Society of Japan,* Tokyo (Japón); *Société Hongroise de Géographie,* Budapest (Hungría); *Société des Sciences Naturelles de Ljubljana* (Yugoeslavia); Revista de Correos y Telégrafos, (Capital) *Horton Hydraulic and Hydrologic Laboratory,* Voorheesville, N. Y. (Estados Unidos); *Ministero dell'Aeronautica,* Roma (Italia); *Istituto di Idraulica e Costruzioni Idrauliche,* Milano (Italia); *Instituto Argentino de Racionalización de Materiales,* (Capital); *Oklahoma Agricultural and Mechanical College, Stillwater,* Oklahoma (Estados Unidos); *R. Ufficio Geologico,* Roma (Italia); *Institut Scientifique de la Tourbe,* Moscou (Rusia); *R. Scuola d'Ingegneria di Pisa,* Pisa (Italia); *Pedology,* Moscou (Rusia); *Biblioteca Nacional de Quito,* Quito (Ecuador); *Instituto Miguel Lillo,* (Tucumán); *Latvijas Universitates (Hidrobiologiskai stacijai),* Riga (Letonia).

Canjes de baja

Société d'Anthropologie de París, París (Francia); *Académie Romaine,* Bucarest (Rumania); *Jardin Botanique de Tiflis,* Tiflis (Georgia); *Dansk Ornithologisk Central,* Viborg (Dinamarca); *Institut Nauk Anthropologicznych,* Varsovia (Polonia); *TromsØ Museum,* TromsØ (Noruega); *Il Naturalista Siciliano,* Palermo (Italia); *Associazione Internazionale per gli Studi Mediterranei,* Roma (Italia); *Vox Médica* (Mendoza); *El Ingeniero* (Capital); *Revista de Radiología Clínica,* Porto Alegre (Brasil); *Sociedad Española de Estudios Fotogramétricos,* Madrid (España); *Consejo Oceanográfico Ibero Americano,* Madrid (España); *Revista de Filosofía, Cultura, Ciencias, Educación* (Capital); *Museo Municipal de Higiene* (Capital); *Revista Jurídica y de Ciencias Sociales,* (Capital); *Oficina Química de la Provincia,* (La Plata); *Escuela de Ciencias Médicas y Centro Estudiantes de Medicina,* (La Plata); *Córdoba Médica,* (Cór-

doba); *Revista de Ingeniería,* (Tucumán); *Museu Goeldi (Museu Paraense) de Historia Natural et Etnographia,* Pará (Brasil); *Sociedade Chimica de Sao Paulo,* Sao Paulo (Brasil); *Sociedade de Geographia do Rio de Janeiro,* Río de Janeiro (Brasil); *Facultad de Letras y Ciencias,* Habana (Cuba); *The Science Reports of the Tohoku Imperial University,* Sendai (Japón); *The Botanical Magazine,* Tokyo (Japón); *Instituto Histórico y Geográfico del Uruguay,* Montevideo (R. O. del Uruguay); *The South African Association for the Advancement of Science,* Johannesburg (Sud Africa); *Comité Scientifique Agronomique de l'Ukraine,* Kieff (Ukrania); *Société des Naturalistes de Charkow,* Charcow (Ukrania); *Museo Histórico Nacional de Chile,* Santiago (Chile); *Rivista d'Italia ed America,* Roma (Italia); *Accademia Pugliese di Scienze,* Bari (Italia); *Accademia Scientifica Veneto — Trentino — Istriana,* Padova (Italia); *Boston Society of Civil Engineers,* Boston, Mass. (Estados Unidos); *Sociedad Jurídico-Literaria,* Quito (Ecuador); *Asociación Española para el Progreso de las Ciencias,* Madrid (España); *Revista Matemática Hispano Americana,* Madrid (España); *Sociedad de Geografía e Historia,* Cochabamba (Bolivia); *Instituto Cajal (Laboratoire de Recherches Biologiques),* Madrid (España); *Nela Research Laboratory, National Lamps Works of General Electric, Cleveland,* Ohio (Estados Unidos); *The Logan Museum, Beloit, Wisconsin* (Estados Unidos); *Wisconsin Geological and Natural History Survey, Madison,* Wiss. (Estados Unidos); *Polytechnical Institute of Tiflis,* Tiflis (Georgia); *Société Entomologique a Stockholm,* Stockholm (Suecia); *Institut de Pharmacologie de l'Université Royale d'Uppsala,* Uppsala (Suecia); *Czasopismo Techniczne (Ministertwa Robot Publicznich),* Lwow (Polonia); *Académie Masaryk du Travail,* Prague (Checoeslovaquia); *Geological and Prospecting Service,* Moscou (Rusia); *Agriculture Institute Omsk,* Omsk (Rusia); *Musée Zoologique de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S.,* Leningrado (Rusia); *Biologische Wolga Station in Saratow,* Saratow (Rusia); *Institut d'Agriculture de Koubane,* Krasnodar (Rusia); *Journal für Experimentale Landwistschaft un Südostan des Eur-Russlands,* Moscou (Rusia); *Musée d'Etat de la Region Industrielle Centrale,* Moscou (Rusia); *Musée d'Ethnographie et d'Anthropologie de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S.,* Leningrado (Rusia); *Jardin Botanique de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S.,* Leningrado (Rusia); *Ministerio de Agricultura,* Río de Janeiro (Brasil); *American Ceramic Society, Columbus,* Ohio (Estados Unidos); *Instituto de Meteorología, Hidrometria e Ecologia Agricola,* Río de Janeiro (Brasil).

Nuevas donaciones

Sociedad de Biología de Concepción, Concepción (Chile); *Sindicato Médico del Uruguay,* Montevideo (R. O. del Uruguay); *Instituto Fitotécnico y Semillero Nacional «La Estanzuela»,* Dpto. de Colonia (R. O. del Uruguay); *Seminario della Facoltá di Scienze della R. Universitá di Cagliari,* Cagliari (Italia); *Inspectoria Federal de Obras contra as Seccas (Ministerio de Viacao e Obras Públicas),* Fortaleza, Ceará (Brasil); *Seminario de Ciencias Jurídicas y Sociales* (Capital); *Facultad de Agronomía y Veterinaria,* Santiago (Chile); *Maison de l'Amérique Latine,* Bruxelles (Bélgica); *Duperial* (Rev.), Capital); *The World Calendar Association,* New York City (Estados Unidos); *Imperial College of Science and Technology,* London (Inglaterra); *Facultad de Ingeniería,* Montevideo (R. O. del Uruguay); *Revista Médica de Tucumán,* (Tu-

cumán); *Instituto Panamericano de Geografía e Historia,* Tacubaya (México); *Pinturas* (Rev.), (Capital); *Sociedad Físico-Matemática de Bulgaria,* Sofía (Bulgaria); *Secretaría de Gobernación y Justicia* (Guatemala, C. A.); *Asociación Colombiana de Mineros,* Medellín (Colombia); *Bolsa de Maderas,* (Capital); *Centro de Investigaciones Tisiológicas,* (Capital); *Secretaría Geral de Saúde e Assistencia do Districto Federal,* Río de Janeiro (Brasil); *Departamento de Acción Social de la Universidad Nacional de México,* (México, D. F.); *Escuela de Farmacia de la Facultad de Ciencias Médicas de Córdoba,* (Córdoba); *Institute of Scientific Research of Manchoukuo, Hshinching,* Manchoukuo (Japón); *Sociedad Mutualista Médico-Farmacéutica de Guadalajara,* Guadalajara (México); *Sociedad Argentina de Criminología,* (Capital); *Colegio de Escribanos,* (Capital); *Union Internationale de Chimie,* París (Francia); *Boletín Financiero,* (Capital); *University of Wisconsin (Engineering Experiment Station),* Madison, Wiss. (Estados Unidos); *Instituto Nacional de Clasificación y Criminología,* Santiago (Chile); *Revista de Medicina* (Rosario de Santa Fé); *Dirección Nacional de Vialidad* (Capital); *Asociación de Jefes de Propaganda* (Capital); *Philips Technical Review (Philips Argentina S. A.),* (Capital); *Société Française de Microscopie,* París (Francia); *Selección Contable* (Rev.). (Capital); *Instituto Geográfico Militar,* Santiago (Chile); *M. Gorky State University of Perm,* Perm (Rusia); *Dirección General de Geología,* Moscou (Rusia); *Ecole Polytechnique Féderale,* Zurich (Suiza).

Donaciones de baja

Revista de Tisiología (México); *Instituto Geográfico Argentino* (Capital); *Centro de Profesores Diplomados de Enseñanza Secundaria* (Capital); *Corriente Contínua* (Rev.), (Capital); *Revista Mecánica y Metalúrgica* (Capital); *Archivos Nacionales de Biología y Medicina* (Capital); *El Día Médico Uruguayo,* Montevideo (R. O. del Uruguay); *Escuela de Veterinaria del Uruguay,* Montevideo (R. O. del Uruguay); *Office National de Combustibles Liquides,* París (Francia); *Instituto de Fisiología de la Facultad de Medicina,* Barcelona (España); *The Internal Combustion Engineer,* London (Inglaterra); *Dirección General de Escuelas* (Santa Fé).

Donación nuestra

Comité Nacional de Geografía (Capital).

Suscripciones de baja

Association Française d'Observateurs d'Etoiles Variables, Lyon (Francia): *American Meteorological Society,* Worcester, Mass. Estados Unidos).

Nueva suscripción

The Iron and Steel Institute, London (Inglaterra).

Cuenta actualmente la Sociedad con 632 canjes, distribuídos en la siguiente forma:

Argentina, 81; Alemania, 51; Australia, 6; Austria, 4; Bélgica, 10; Brasil, 22; Canadá, 10; Colombia, 5; Costa Rica, 2; Cuba, 8; Checoeslovaquia, 6;

Chile, 9; China, 3; Dinamarca, 2; Ecuador, 3; Egipto, 1; España, 25; Estados Unidos, 82; Estonia, 2; Filipinas, 3; Finlandia, 6; Francia, 35; Georgia, 2; Holanda, 9; Hungría, 7; India Inglesa, 3; Inglaterra, 12; Irlanda, 2; Italia, 63; Japón, 19; Letonia, 9; Madagascar, 1; Marruecos, 2; México, 10; Noruega, 2; Nueva Zelandia, 3; Palestina, 1; Perú, 10; Polonia, 6; Portugal, 11; Puerto Rico, 1; Rumania, 3; Rusia, 37; Serbia, 1; Suecia, 6; Suiza, 9; Sud Africa, 1; Transvaal, 1; Ukrania, 1; Uruguay, 20; Venezuela, 2; Yugoeslavia, 2.

Los libros (obras) prestados a los señores socios suman 59, y las revistas 24, continuando las consultas de las numerosas colecciones periódicas con un número de 500 aproximadamente.

A través del siguiente detalle, se observa el movimiento habido durante el transcurso del período que feneció:

Canjes nuevos, 27; Canjes de baja, 60; Nuevas donaciones, 40; Donaciones de baja, 12; Nuevas suscripciones, 1; Suscripciones de baja, 2; Donación de la Sociedad, 1; Libros y revistas prestados, 59 y 24, respectivamente; Donaciones (libros y folletos), 1279; Notas enviadas, 365; Notas recibidas y acuses de recibo, 810; Acuses de recibo y pedidos de revista, enviados, 783.

La Biblioteca ha estado durante cuatro años consecutivos a cargo del ingeniero José S. Gandolfo, a quien se debe el grado de adelanto y de organización que ha alcanzado en la actualidad.

HOMENAJE AL INGENIERO MARCONI

Con motivo del fallecimiento del ingeniero Guillermo Marconi, distinguido socio honorario de la Sociedad desde el año 1910, la Junta Directiva resolvió realizar un acto de homenaje a la memoria del ilustre hombre de ciencia desaparecido.

En dicho acto, que tuvo lugar el 13 de agosto en nuestro salón « Florentino Ameghino », se contó con la presencia de las altas autoridades de la Nación, representantes de instituciones oficiales y particulares del país y de una selecta concurrencia.

El programa desarrollado fué el siguiente:

I. — Apertura del acto por el Presidente de la Sociedad Científica Argentina, Ingº *Jorge W. Dobranich.*

II. — Larghetto de Händel, por el Cuarteto «Pro Arte».

III. — «Marconi en los Orígenes y en la Evolución de las Transmisiones Inalámbricas», conferencia por el Ingº *Eduardo L. Edo.*

IV. — Andante funebre e doloroso, ma con moto de Tschaikowsky, por el Cuarteto «Pro Arte».

El Cuarteto « Pro Arte » estaba constituído por el señor Naum Krantz, primer violín; señora Ada Sturm, segundo violín; señor André Vancoillie, viola, y señor Liborio Rosa, violoncello.

ESTACIÓN L. R. A. RADIO DEL ESTADO

La inauguración oficial de esta estación tuvo lugar el día 6 de julio y, con tal motivo, el Presidente de la Sociedad, ingeniero Jorge W. Dobranich, hizo uso de la palabra en nombre de ella, pronunciando un breve discurso ante el micrófono.

El 7 de julio, de acuerdo con el convenio celebrado con la Dirección de Correos, que reservaba a nuestra institución los días miércoles de 20 a 20,15 horas, dieron principio de ejecución las transmisiones de las conferencias radiotelefónicas.

Los señores socios que pronunciaron conferencias, y los temas desarrollados, son los siguientes, por orden de fechas:

Julio 7. Dr. *Gonzalo Bosch:* «La Sociedad Científica Argentina su importancia, significación e influencia sobre la vida cultural del país y homenaje a los fundadores y demás socios que se han distinguido desde su fundación en 1872».

Julio 14. Ingº *Nicolás Besio Moreno:* «Las iniciativas, viajes de estudio, investigaciones científicas, congresos, etc., organizados por la Sociedad Científica Argentina».

Julio 21. Ingº *José Babini: «¿Matemáticas o Matemática?»*

Julio 28. Dr. *Juan B. Marchionatto:* «La lucha contra las enfermedades y plagas de los cultivos. (Conocimientos indispensables)».

Agosto 4. Capitán de Fragata *Héctor R. Ratto*: «Félix de Azara».

Agosto 11. Dr. *Rómulo D. Carbia:* «Cristóbal Colón, genovés, no tuvo inspiradores en su proyecto de navegación transatlántica. Resultados definitivos de la investigación histórica.

Agosto 18. Prof. *José F. Molfino:* «El cultivo de las plantas medicinales en el país».

Agosto 25. Dr. *Juan Ubaldo Carrea:* «La boca en los niños».

Setiembre 1. Dr. *Alfredo Franceschi:* «Los Estudios Filosóficos en la Argentina».

Setiembre 8. Capitán de Fragata *Teodoro Caillet Bois:* «Un paralelo entre Brown y Cochrane».

Setiembre 15. Ingº Agrº *Armando L. De Fina:* «Las exigencias meteorológicas en los vegetales».

Setiembre 22. Prof. *José F. Molfino:* «Las plantas usuales de la Flora Argentina (1ra. parte)».

Setiembre 29. Dr. *Juan Ubaldo Carrea:* «Deformidades dentomaxilo faciales.

Octubre 6. Prof. *José F. Molfino:* «Las plantas usuales de la Flora Argentina (2da. parte)».

Octubre 13. Dr. *Antonio Casacuberta:* «El descubrimiento de América». «El día de la Raza».

Octubre 20. Dr. *Carlos M. Albizzati:* «La digestibilidad del pan blanco y los mejoradores químicos en las harinas de consumo».

Octubre 27. Dr. *Luis Floriani:* «La composición química y la acción terapéutica del «quebracho blanco» y del «palo rosa» (Aspidospermas)».

Noviembre 3. Prof. *José F. Molfino:* «Las plantas argentinas ricas en esencia de menta».

Noviembre 10. Prof. Dr. *Juan A. Domínguez:* «La planta de la «coca». «Cocaismo y Cocainismo».

Noviembre 17. Dr. *Santiago Barabino Amadeo:* «Profilaxis».

Noviembre 24. Dr. *Raúl Ortega Belgrano:* «Ciencia y Paz».

Diciembre 1. Dr. *Carlos M. Albizzati*: «El Museo Agrícola de Budapest». «Necesidad de una creación similar en nuestro país». «Impresiones del viaje por el Prof. J. F. Molfino. (1ª parte)».

Diciembre 15. Dr. *Carlos M. Albizzati:* «El Museo Agrícola de Budapest». «Necesidad de una creación similar en nuestro país». «Impresiones del viaje por el Prof. J. F. Molfino».

Diciembre 22. Ingº Agrº *Armando L. De Fina:* «Numerosas plantas tropicales que pueden vegetar en Mar del Plata».

Diciembre 29. Ingº Agrº *Santiago Boaglio:* «El mejoramiento de las plantas cultivadas».

Prof. *José F. Molfino*: «Breves palabras con motivo de la terminación del ciclo de conferencias radiotelefónicas de la Sociedad del año 1937».

Me es grato dejar constancia de que la Comisión de conferencias radiotelefónicas, encargada de la preparación del programa que con tanto acierto se ha venido cumpliendo sin interrupción, ha trabajado intensamente para dar exacto cumplimiento a su cometido, y en ciertos momentos, con verdadero fervor, a fin de vencer dificultades e inconvenientes presentados.

CONFERENCIAS, CURSOS Y ACTOS

Las conferencias dadas en las diversas salas de la Sociedad durante el año que acaba de terminar, abarcaron temas variados e interesantes, las que estuvieron a cargo de destacadas autoridades en cada especialidad.

Además de las conferencias se dictó un pequeño curso sobre « Topología moderna », a cargo del estimado consocio Dr. Agustín Durañona y Vedia.

Las conferencias patrocinadas por la Sociedad, fueron las siguientes:

Mayo 21: Ingº *Emile Bigeault*: «Teoría de la radiación infrarroja y su aplicación a la humanidad y a los vegetales».

Junio 21. *Dr. Eduardo L. Capdehourat*: «Algunos aspectos interesantes de la Expedición científica a la altiplanicie de Bolivia (con proyecciones)».

Julio 2. Dr. *Eduardo L. Capdehourat:* «Informaciones documentales de Bolivia (con proyecciones)».

Julio 7. Dr. *Cristofredo Jakob:* «*Aguas perdidas*». «*Vidas perdidas*». «Un proyecto romántico de irrigación olvidado de la Patagonia. (Con proyecciones y film)».

Julio 23. Dr. *Agustín Durañona y Vedia:* «Evolución de los conceptos fundamentales de las matemáticas».

Setiembre 10. Dr. *Georges Darmois:* «*Biología y Probabilidad*». «*Genética y Biometría*». «Estudio de la tasa de masculinidad».

Setiembre 13. Dr. *Alberto E. Sagastume Berra:* «Consideraciones matemáticas sobre la música».

Setiembre 21. Dr. *Angel H. Roffo:* «Agentes cancerígenos».

Setiembre 27. Dr. *Ramón G. Loyarte:* «Los fenómenos de Transmutación de la materia. (Con proyecciones)».

Octubre 5. Dr. *Jacobo Wainer*: «Principios de organización científica en la Administración».

Octubre 8. Dra. *Wanda Hanke:* «*Los indígenas de la parte Oriental del Paraguay*». «La mitología, vida y costumbres de los Cainguás y Guayaquíes. (Con proyecciones)».

Octubre 11. Dr. *Angel Cabrera:* «La extinción y el resurgimiento del caballo en América».

Octubre 19. Dr. *Joaquín Frenguelli:* «Diatomeas. (Con proyecciones)».

Octubre 26. Dr. *J. Alfredo Ferreira:* «Bases científicas de la educación moral».

Noviembre 3. Ingº *Pedro Rossell Soler:* «La obra matemática de Descartes y el fundamento de su filosofía».

Noviembre 4. Dr. *Alberto Castellanos:* «La vegetación de la Isla de los Estados». (Con proyecciones).

La Sociedad Nacional de Biología, Sección de la Sociedad Científica Argentina, efectuó el 18 de diciembre último una Reunión Científica, en la que se trataron los siguientes temas:

Sr. *Osvaldo Gñochi:* «Acetil colina en batracios».

Dr. *Frank L. Soler:* «Irrigación bulbar, experiencias en perros».

Dr. *Alberto Gascón:* «Volemia».

Dr. *O. del Carril:* «Glicemias».

Dr. *Frank L. Soler:* «Aves y mamíferos sin vesícula biliar».

Dr. *Dionisio Echare:* «Microdeterminación del cobre biogenético y el sistema oxidásico del metabolismo normal».

Cabe consignar que, durante el año transcurrido, las instituciones: Sociedad Argentina de Agronomía, Asociación Folklórica Argentina, Colegio de Odontólogos, Asociación Argentina de Estudios de Seguros, Ateneo Estudiantil Universitario, Asociación Wagneriana de Buenos Aires, Sociedad Argentina de Estudios Geográficos « Gaea », Asociación Médica de Kinesiología, Sociedad Argentina de Ortodoncia, Círculo de Profesores de Historia, etc., han efectuado numerosas reuniones en las demás salas de la Sociedad.

PATROCINADOS POR LA ASOCIACIÓN POR LOS DERECHOS DEL NIÑO

Esta Institución de carácter desinteresado, con su residencia en nuestro Edificio social, ha dictado cursos sobre « Pediología » los días lunes, miércoles, viernes y sábados durante los meses de agosto, setiembre y octubre.

La conferencia inaugural de dichos cursos estuvo a cargo del Presidente de la Asociación, Dr. *Luis Siri*, quien se refirió a « La Pediología como enfoque moderno de los problemas del niño y del adolescente ».

Programa de los cursos

Agosto 9, 16, 23. — Setiembre 6, 13. Prof. *José Luis Romero:* «El problema de los ideales educativos».

Agosto 18, 25. — Setiembre 1, 15, 22, 29. Dra. *Telma Reca de Acosta:* «El problema de conducta en la infancia».

Agosto 14, 21, 28. — Setiembre 4, 11, 18, 25. Dra. *Emilia Dezeo:* «Psicopedagogía del lenguaje gráfico».

Setiembre 20, 27. — Octubre 4, 11. Dr. *Juan E. Cassani:* «Evolución de las ideas pedagógicas en la Argentina».

Setiembre 1, 15, 22. — Octubre 6, 13, 20, 27. Dr. *Pilades O. Dezeo:* «Lucha contra la despoblación». «Problemas pre-natales, natales y post-natales».

Setiembre 4, 11, 18, 25. — Octubre 2, 9. Dr. *Enrique Romero Brest:* «El problema de la formación física del niño».

Octubre 4, 11, 18, 20, 25, 27. Dra. *Carolina Tobar García:* «El Verbalismo en nuestra escuela».

Octubre 15, 22, 29. Prof. *Ernesto Nelson:* «La educación fuera de là escuela».

Octubre 1, 8, 15, 22, 29. Prof. *Luis Falcini:* «La facultad de creación en el orden plástico».

Octubre 1, 8, 16, 23, 30. Prof. *Ricardo Vázquez:* «La recreación como posibilidad en la educación.

Octubre 2, 9, 16, 23, 30. Dr. *Jorge Romero Brest:* «Sobre la posibilidad de la educación estética».

PATROCINADAS POR LA SOCIEDAD ARGENTINA DE ESTUDIOS GEOGRÁFICOS « GAEA »

La Sociedad « Gaea », que se encuentra en idénticas condiciones que la Asociación Por los Derechos del Niño, en cuanto se refiere a sus fines y residencia, celebró la « Semana de Geografía », realizándola los días 28, 29 y 30 de setiembre y 1, 2 y 8 de octubre, con el siguiente programa:

Setiembre 28. Dr. *Carlos D. Storni:* «Breves palabras declarando inaugurada la Semana de Geografía».

Dr. *Pablo Groeber:* «Relación de los Andes de Sud y Norte América».

Contralmirante *Pedro S. Casal:* «Fondos marinos».

Sr. *José Román Guiñazú:* «Reseña geomorfológica de la cuenca del río Pichileufú».

Prof. *Federico A. Daus:* «Consideraciones sobre la población de la Patagonia».

Prof. *Alberto A. Mignanego:* «Límite austral del cultivo del maíz en la República Argentina».

Setiembre 29. Prof. Sra. *Elina G. A. de Correa Morales:* «La brújula, nuevas comprobaciones referentes a su origen y antigüedad».

Prof. Sra. *Elina G. A. de Correa Morales:* «Bibliografía de Patagonia».

Dr. *Juan Keidel:* «Sobre la génesis y la transformación del relieve tabular en los alrededores de la Bahía Solano (golfo de San Jorge), comprendiendo: 1) Las penillanuras de mesetas y de piedemontes del relieve tabular; 2) La alta meseta al Norte de la Bahía Solano; 3) El paisaje de gradería de la Bahía Solano; 4) Resumen».

Setiembre 30. Prof. *Alejandro F. Bordas:* «La presencia del Bentonita en el Terciario Inferior de la Patagonia».

Dr. *Horacio J. Harrington:* «Las correlaciones paleo-zoo-geográficas del Ordoviciano argentino».

Dr. *Egidio Feruglio:* «Ensayo de reconstrucción de las transgresiones marinas en la Patagonia».

Sr. *Edmundo Wernicke:* «Rutas y etapas en la introducción de los ganados en ambas Américas».

Octubre 1. Ing° *Héctor Ceppi:* «Los estudios de nieve en la Cordillera y en la Patagonia».

Dr. *Martín S. Cappelletti:* «La organización geofísica en la República Argentina».

Ing° *Nicolás Ferramola:* «Los ferrocarriles patagónicos y su influencia».

Dr. *Rodolfo D. Venzano:* «Geografía humana en los valles del Bolson (Chubut)».

Octubre 2. Dr. *Egidio Feruglio:* «Variaciones del frente del Ventisquero Moreno (Lago Argentino)».

Dr. *Carlos D. Storni:* «Reseña fisiográfica de la región comprendida entre los lagos Viedma y Argentino».

Dr. *Carlos D. Storni:* «Un ejemplar de Sequoia gigante en el Lago Viedma».

Sr. *José Román Guiñazú:* «Ensayo sobre aplicación del cine a la enseñanza de la geografía».

Dr. *Guillermo Schulz:* «Las vistas aéreas y la enseñanza de la geografía».

Dr. *Rodolfo D. Venzano:* «Fisiografía de los Andes en el paralelo 42».

Octubre 8. Dr. *Juan Keidel:* «Los movimientos tectónicos de edad larámica entre el Colhué-Huapí y el Río Senguerr, comprendiendo: 1) Consideraciones estratigráficas; 2) Distinción de diferentes fases de movimientos tectónicos; 3) La discordancia debida a los movimientos larámicos; 4) Resumen».

Dr. *Bladimiro Borsacow:* «Los granitos y efusiones basálticas del extremo austral de la Sierra de Córdoba».

Dr. *Rodolfo D. Venzano:* «Estado actual y evolución de los bosques del Norte de la Patagonia».

Patrocinado por la Federación de Sociedades Populares de Educación

Abril 10. Acto inaugural del ciclo de conferencias.

Patrocinados por el Círculo de Bellas Artes «Juan Sebastián Bach»

Abril 3. Reunión.
Abril 17. Concierto.
Abril 24. Concierto.
Mayo 15. Concierto.
Mayo 22. Concierto.
Mayo 29. Concierto.
Junio 5. Concierto.
Junio 9. Concierto.
Junio 16. Concierto.
Junio 23. Concierto.
Julio 3. Concierto.

Julio 10. Concierto.
Julio 28. Concierto.
Julio 31. Concierto.
Agosto 14. Concierto.
Agosto 21. Concierto.
Agosto 28. Concierto.
Setiembre 11. Concierto.
Setiembre 25. Concierto.
Octubre 13. Concierto.
Octubre 16. Concierto.
Octubre 30. Concierto.
Noviembre 6. Concierto.
Noviembre 10. Concierto.
Noviembre 20. Concierto.
Noviembre 27. Concierto.
Diciembre 4. Concierto.
Diciembre 11. Concierto.
Diciembre 28. Concierto.
Diciembre 29. Concierto.

Patrocinadas por la Asociación Argentina de Cultura Inglesa

Abril 20. Sr. *E. Millington - Drake:* Ministro Británico en el Uruguay. «Tradition Beauty and Progress in great Britain».

Mayo 11. Dr. *Oscar Marino:* «*Oxford University*» its history and traditions.

Mayo 20. Sr. *Patrick O. Dudgeon B. A.:* «Cambridge University» its history and traditions.

Mayo 31. Rev. *E. A. C. Rattray M. A.:* «This England».

Junio 10. Sr. *Mewyn F. Ryan, C. B. E., M. I. C. E.:* «From The Cape To Cairo By Air».

Junio 24. Srta. *Elisabeth Dall:* «Lord Byron: el hombre y su obra».

Julio 27. Sr. *Guillermo Plante:* Breves palabras.

Srta. *Dora Harris:* «Somerset Mauglan» (Novelista y dramaturgo).

Sra. *H. C. de Fernández:* «Walter de la Mare».

Agosto 10. Dr. *Mario Molina Pico:* «Canning From an Argentine Point of View».

Agosto 24. Prof. *M. Henri Peyre:* «Shelley».

Agosto 31. Sra. *P. E. A. Marcer:* «English Folk Songs».

Setiembre 22. Sr. *J. Monteith Drysdale:* «George du Maurier».

Octubre 7. Rev. *Douglas W. Bruce:* «British Pioneering in the Argentine».

Patrocinadas por el Cine Club Argentino

Mayo 5. Inauguración oficial de la temporada de exhibiciones cinematográficas.

Mayo 7. Exhibición cinematográfica.
Junio 11. Exhibición cinematográfica.
Junio 12. Exhibición cinematográfica.
Julio 16. Exhibición cinematográfica.
Julio 17. Exhibición cinematográfica.

Agosto 18. Exhibición cinematográfica.
Agosto 19. Exhibición cinematográfica.
Setiembre 17. Exhibición cinematográfica.
Setiembre 18. Exhibición cinematográfica.
Octubre 22. Exhibición cinematográfica.
Octubre 23. Exhibición cinematográfica.
Noviembre 22. Exhibición cinematográfica.
Noviembre 23. Exhibición cinematográfica.
Diciembre 22. Exhibición cinematográfica.

Patrocinados por la Asociación Cultural «El Unísono»

Mayo 26. Concierto.
Julio 23. Concierto.
Agosto 6. Concierto.
Agosto 20. Concierto.
Setiembre 24 Concierto.
Octubre 15. Concierto.
Octubre 21. Concierto.
Octubre 29. Concierto.
Noviembre 18. Concierto.
Noviembre 25. Concierto.

Patrocinados por la Asociación Polifónica de Buenos Aires

Junio 17. Concierto.
Agosto 16. Concierto.
Setiembre 8. Concierto.
Setiembre 14. Concierto.
Octubre 14 Concierto.
Noviembre 29. Concierto.

Patrocinado por la Asociación del Profesorado

Junio 25. Acto de homenaje a la Asociación de Mayo.

Patrocinado por el Conservatorio «Kada Jenö»

Junio 26. Concierto.

Patrocinados por el Instituto Argentino de Cultura Integral

Julio 1. Acto inaugural.
Setiembre 20. Primer acto de la Junta de Cultura Artística.

Patrocinadas por Los Amigos de la Ciudad

Julio 6. Arquitectos *F. H. Bereterbide, Wladimiro de Acosta y Jorge Kalnay* y Dr. *Marcelino del Mazo:* «Disertaciones relacionadas con la Avenida 9 de Julio.

Diciembre 3. Ingº *Arturo Ochoa:* «Practicabilidad del traslado en block del Edificio del Ministerio de Obras Públicas».

Patrocinados por el Centro de Ingenieros Agrónomos

Mayo 28. Ingº Agrº *Eduardo Navarro de Andrade:* «El servicio forestal de la Compañía Paulista de Ferrocarriles».

Julio 12. Ingº Agrº *Federico Worschitz*: «La silvicultura húngara y sus afinidades con la silvicultura argentina».

Julio 19. Ingº Agrº *Federico Worschitz:* «El establecimiento de la bondad de la madera como un factor de primer orden en su valorización económica».

Patrocinadas por la Asociación Folklórica Argentina

Julio 24. Sr. *Cesáreo Bernardo de Quirós*: «Divagaciones de pintor sobre Folklore».

Noviembre 19. Sr. *Enrique Amadeo Artayeta:* «Los Querandíes y la nación pampa».

Patrocinados por la Asociación de Profesores Nacionales de Música

Agosto 2. Concierto.
Setiembre 16. Concierto.
Octubre 4. Concierto.
Octubre 28. Concierto.

Patrocinadas por la Academia Nacional de Agronomía y Veterinaria

Agosto 11. Prof. Dr. *Guido Finzi*: «Exotuberculina analérgica o apagada y tuberculinoterapia».

Agosto 17. Prof. Dr. *Guido Finzi:* «La vacunación antituberculosa en la lucha contra la tuberculosa bovina».

Patrocinada por The Society of British Artists

Agosto 26. *Swami Vijoyananda.* «Lecture on Art in Indian Life».

Patrocinado por el Instituto Argentino-Brasileño de Cultura

Setiembre 9. Acto en celebración de la independencia del Brasil.

Patrocinado por la Sociedad Nacional de Música

Setiembre 2. Concierto.
Setiembre 15. Concierto.

Patrocinado por la Liga Argentina de Educación

Setiembre 23. Acto conmemorativo.
Octubre 9. Concierto.

Patrocinado por Radio Callao

Octubre 9. Concierto.

Patrocinado por la Asociación Cultural «Clorinda Matto de Turner»

Octubre 12. Acto en celebración del descubrimiento de América.

Patrocinados por la Dirección General de Bellas Artes

Octubre 20. Recital poético.
Noviembre 13. Recital poético.

Patrocinada por la Cámara Argentina de Colonización

Noviembre 5. Dr. *Bernardino C. Horne:* «Aspecto social de los países agrarios».

Patrocinados por la Asociación Médica de Kinesiología

Noviembre 15. Acto de homenaje a los profesores *Enrique Romero Brest, Frank L. Soler* y *Enrique Pietranera.*
Diciembre 10. Sesión del Congreso de Kinesiología.
Diciembre 11. Sesión del Congreso de Kinesiología.

Patrocinado por Cenit

Noviembre 24. Concierto.

Patrocinado por la Asociación Lírica Femenil Argentina

Diciembre 30. Concierto.
Las señoritas Elizabeth Westerkamp, Sylvia Carranza y Clotilde Bértola. Conciertos de piano. 6, 27 de octubre y 16 de noviembre, respectivamente.

SECCIÓN LA PLATA

De acuerdo con el apartado 7 de las Bases de la Sociedad, que dice: « Podrá establecer secciones, a ella vinculada, y, en todos aquellos puntos de la República donde lo juzgare conveniente », la Junta Directiva, en su sesión de fecha 24 de junio, considerando que la ciudad de La Plata, como centro de elevada cultura, era muy indicada para establecer una seccional, resolvió designar al Dr. Agustín Durañona y Vedia para que, como Delegado oficial de la Sociedad, iniciara los trabajos de organizar una filial.

Dicha Seccional, que cuenta en la actualidad con 24 socios, se halla en formación, faltando tan sólo que tenga lugar el acto inaugural de su constitución y funcionamiento para que sea considerada como filial y quede de hecho incorporada a la lista de las ya existentes en Santa Fé, Córdoba y Mendoza.

SECCIÓN MENDOZA

Después de un período de inactividad de esta Sección, motivada por la imposibilidad de obtener un mínimo de concurrentes a las reuniones de la Comisión Directiva, su presidente, el Dr. Juan B. Lara, adoptó diversas medidas tendientes a regularizar su funcionamiento, para dar a la entidad la vida que paulatinamente iba perdiendo.

El primer paso dado en tal sentido, fué el de renovar la Comisión Directiva, persiguiendo una que dedicara mayor atención a los propósitos de la entidad y abriendo así el camino a una nueva corriente de actividad. El 18 de noviembre p.pdo. se convocó a asamblea, con el objeto de tratar las renuncias presentadas y elegir las nuevas autoridades.

Una de las primeras medidas adoptadas por la nueva Comisión Directiva fué la de poner al día los asuntos de secretaría y tesorería, que se encontraban atrasados, y la de hacer una conscripción de socios, cuyo resultado fué altamente satisfactorio.

Me es grato informaros que dicha filial cuenta en la actualidad con doce nuevos socios, todos ellos especialistas destacados, y de quienes mucho podemos esperar.

SECRETARÍAS

Los cargos de secretarios de actas y de correspondencia, han sido desempeñados por los doctores Antonio Casacuberta y Santiago Barabino Amadeo, quienes han atendido sus múltiples tareas con el beneplácito de los miembros de la Junta.

El Dr. Casacuberta ha tenido a su cuidado la redacción de las actas, originadas por las 27 sesiones que ha celebrado la Junta Directiva durante el último período. Además, ha seguido formando parte de la Comisión de Hacienda, integrada por el arquitecto Carlos E. Géneau y el Dr. Juan Ubaldo Carrea.

El Dr. Barabino Amadeo, al frente de la secretaría de correspondencia, ha dado fiel cumplimiento a su cometido, redactando y firmando las 529 notas emanadas de los asuntos aprobados y resueltos por la Junta Directiva.

Por licencia concedida al Dr. Barabino Amadeo por la Junta Directiva en sesión del 2 de diciembre ppdo., se designó secretario de correspondencia ad-hoc al Prof. José F. Molfino, quien desempeñó dicha secretaría durante los meses de diciembre de 1937 a febrero de 1938.

Por intermedio de la Gerencia se han despachado 170 notas.

Las circulares enviadas a los señores socios, que alcanzaron a un total de 4.900, estaban relacionadas con los siguientes asuntos:

a) Comunicando las condiciones de opción a las becas anuales creadas por la Comisión Nacional de Cultura, adjuntando un ejemplar de su reglamentación; *b*) Transcribiendo la nota del Instituto Darwinion de San Isidro, haciendo saber que se darán facilidades a los investigadores; *c*) Invitando al funeral en memoria del Ingº Guillermo Marconi, por encargo especial del Embajador de Italia; *d*) Invitando a las conferencias que pronunciaría el Dr. Guido Finzi en la Facultad de Agronomía y Veterinaria, con el auspicio del Instituto Argentino de Cultura Itálica; *e*) Comunicando la realización del Tercer Congreso Panamericano de Carreteras, en Santiago de Chile, solicitando su adhesión y presentación de trabajos; *e*) Comunicando que el Círculo Argentino de Inventores ha resuelto considerar socios transeúntes por un mes a todos los asociados; *g*) Comunicando la adhesión de la Sociedad al homenaje que realizará la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales al Ingº Luis A. Huergo, e invitando a concurrir al mismo; *h*) Comunicando la realización de la Conferencia Mundial de la Energía, en Viena, e invitando a presentar trabajos; *i*) Comunicando la realización de las Sesiones Químicas Argentinas auspiciadas por la Asociación Química Argentina, e invitando a adherirse y presentar trabajos.

TESORERÍA

El arquitecto Carlos A. Géneau, que durante cuatro años consecutivos ha estado al frente del delicado cargo de Tesorero, desempeñándolo con tanto acierto, se ha hecho acreedor al reconocimiento de la Junta Directiva y del mío propio.

El movimiento de socios habido durante el año transcurrido, es el siguiente:

	Activos	Adherentes
En 31 de marzo de 1937	319	27
Han ingresado durante el período	14	3
Totales	333	30
Se han eliminado por diferentes causas	22	9
Quedan en 31 de marzo de 1938	311	21

Los socios ingresados durante el período son los siguientes:

Activos: Dr. Luis A. Solórzano, Prof. Ernesto Natale, Ingº Agrº Santiago Boaglio, Dr. Alberto Castellanos (reincorporado), Ingº Alberto Vinardell, Dr. Luis Floriani (reincorporado), Dr. Lizardo Molina Carranza, Dr. Germinal Rodríguez, Ingº Enrique D'André, Ingº José Giannone, Ingº Eduardo Martignone, Dr. Jacobo Wainer, Prof. Luis A. Borruat, Ingº Antonio Escudero (reincorporado.

Adherentes: Señores Eduardo D. García, Carlos E. Glücksmann, Eduardo A. Quevedo Capdevila.

Correspondientes: Prof. Georges Darmois (en París), Prof. Tulio Levi Civita (en Roma).

Durante el período que acaba de terminar, la Sociedad ha tenido que lamentar el fallecimiento de los siguientes consocios, a quienes la Junta Directiva les tributó el correspondiente homenaje en su debida oportunidad:

Honorarios: Ingº Guillermo Marconi y Dr. Eduardo L. Holmberg.
Correspondientes: Ingº Leonardo Torres Quevedo, en Madrid; Dr. Emilio Hassler, en Asunción; Dr. Rodolfo de Arteaga, en Montevideo.
Activos: Ingº José Debenedetti, Dr. Luis A. Tamini y Dr. Nicolás Lozano.

Actualmente la Sociedad cuenta con dos socios honorarios, que son los doctores Walter Nernst y Alberto Einstein.

Los socios honorarios que ha tenido la Sociedad desde 1872, año de su fundación, son los siguientes:

Dr. Pedro Visca, Dr. Mario Isola, Dr. Germán Burmeister, Dr. Benjamín A. Gould, Dr. R. A. Philippi, Dr. Guillermo Rawson, Dr. Carlos Berg, Dr. Valentín Balbín, Dr. Florentino Ameghino, Dr. Carlos Darwin, Dr. César Lombroso, Ingº Luis A. Huergo, Ingº Vicente Castro, Dr. Juan J. J. Kyle, Dr. Estanislao S. Zeballos, Ingº Santiago E. Barabino, Dr. Carlos Spegazzini, Ingº J. Mendizábal Tamborel, Dr. Enrique Ferri, Ingº Eduardo Huergo, Dr. Angel Gallardo, Ingº Guillermo Marconi y Dr. Eduardo L. Holmberg.

La Sociedad cuenta en la época actual con los siguientes socios:

Honorarios	2	
Vitalicio	1	
Correspondientes	55	
Activos	311	
Adherentes	21	
Protectores de la Organización Didáctica de Buenos Aires	3	393
Activos de la Sección Córdoba	63	
» » » » Santa Fé	57	
» » » » Mendoza	44	164
Total general		557

PATRIMONIO DE LA SOCIEDAD

Los bienes del activo de la Sociedad están comprobados por los documentos y elementos que a continuación se detallan y que son las constancias de su existencia legal:

1) *Muebles y útiles,* por valor de $ 31.203,11 m/n., se encuentran en el Edificio social adornando sus salas, habitaciones y dependencias.

2) *Títulos y acciones,* que suman $ 59.924,89 m/n. ($ 60.000,00 m/n. nominales y $ 100 o/s nominales) y que se encuentran depositados en custodia en el Banco de la Nación Argentina, con la siguiente distribución:

a) Un título de la Deuda Pública Externa de la Provincia de Buenos Aires, Nº 163.257, por valor de cien pesos oro sellado nominales ($ 100,00 o/s. n.).

b) Cincuenta mil quinientos pesos nominales ($ 50.500,00) de Certificados del Empréstito de Cancelación y Fomento General.

c) Cuatro mil pesos nominales ($ 4.000,00) de Bonos Hipotecarios de Construcciones Económicas.

d) Cuatro mil pesos nominales ($ 4.000,00) de Cédulas Hipotecarias Argentinas, Serie E.

e) Mil quinientos pesos nominales ($ 1.500,00) de Cédulas Hipotecarias Argentinas, Serie C.

3) *Concesión terreno Santa Fé 1145,* avaluada en $ 155.400,00 m/n. Emerge de la Ordenanza Municipal de fecha 14 de julio de 1922 que acuerda el terreno para construir el palacio de la Sociedad.

4) *Edificio social,* costo real $ 482.954,18 m/n., gastados por el Gobierno Nacional para levantar el palacio de la calle Santa Fé 1145, sede de la Sociedad.

5) *Biblioteca social,* avaluada en $ 164.463,46 m/n. y representada por 39.800 volúmenes, 11.300 folletos, «Anales», etc.

NOTA. — Se hace constar que con el producido de la venta del antiguo edificio social de la calle Cevallos 269, se adquirieron treinta y cuatro mil pesos nominales ($ 34.000,00) de Certificados del Empréstito de Cancelación y Fomento General que devengan un interés del 5½ %.

OBRAS EN EL EDIFICIO DE LA SOCIEDAD

Las obras ejecutadas en el edificio de la Sociedad en el transcurso del año 1937, todas ellas realizadas por la Dirección General de Arquitectura, y cuyo importe asciende a $ 4.403,60 m/n., han sido las siguientes:

Transformación de un patio en local cubierto, para acceso al salón de actos, implicando dicha transformación la construcción de cubierta especial, desagües, desviación y cambio de conductos de ventilación, brazos de luz y aspirador eléctrico.

VENTA DE LA CASA CEVALLOS N° 269

Ya en la Memoria correspondiente al ejercicio 1° de abril de 1934 al 31 de marzo de 1935, el ingeniero Nicolás Besio Moreno daba cuenta de las gestiones realizadas para vender la propiedad de la calle Cevallos N° 269.

Fracasado el remate que tuvo lugar el 12 de noviembre de 1934, se aceptó el ofrecimiento del arquitecto Francisco Squirru, de arrendar la casa, efectuando por cuenta propia las reparaciones y mejoras que fueran necesarias. Celebróse así un contrato por dos años con opción a otros dos.

Las deficiencias del edificio, propias de una construcción antigua, en que la estructura resistente de la azotea era de vigas de madera, dió origen, en enero de 1937, a un principio de derrumbe en los fondos, sin que, felizmente, hubiera que lamentar desgracias personales. Esto motivó ciertas desaveniencias con el locatario.

Como se consigna en el resumen correspondiente a la sesión del 5 de junio de 1937, la Junta Directiva consideró una propuesta de compra de la citada propiedad, y resolvió designar a los miembros de la misma: arquitecto Carlos E. Géneau, Dr. Santiago Barabino Amadeo y Dr. Antonio Casacuberta para que convinieran, con el interesado, las ulterioridades del caso, quedando facultado el presidente para solventar cualquier dificultad que pudiera surgir.

En sesión del 1° de julio de 1937 esta presidencia dió cuenta de las dificultades que creó el locatario y de la realización de la venta al señor Pedro Zamora Casas, por la suma de $ 34.000.— m/n.

El detalle de los gastos de indemnización al locatario, de escrituración, etc., se especifica en el resumen de la sesión que tuvo lugar el 26 de agosto de 1937.

Con el propósito de engrosar el fondo de reserva de la Sociedad, según el detalle que se consigna bajo el rubro « Patrimonio de la Sociedad », de esta Memoria, la Junta Directiva resolvió, en su sesión del 19 de agosto, adquirir títulos por valor de $ 34.000.— m/n.

Agrégase a la presente Memoria, cuadros demostrativos y el balance general, los cuales permitirán a los señores socios interiorizarse de sus detalles.

CONCLUSIÓN

Del análisis de la Memoria que hoy someto a la Asamblea, podéis juzgar si se han cumplido, aunque parcialmente, los vaticinios de mi distinguido antecesor, augurando a la nueva presidencia « un período fructífero para la antigua casa y para la ciencia argentina y su difusión ».

De haberse cumplido, ello deberéis atribuirlo a la inteligente y eficaz colaboración de los miembros de la Junta Directiva, quienes supieron brindar, en todo momento, su tiempo y su pensamiento a la Institución.

Permitidme que al cerrar esta memoria recomiende a vuestra consideración, al personal de la casa, por el celo que ha desplegado en el desempeño de sus funciones, y que me particularice en Claudio López, su Intendente, quien, identificado con la Sociedad, vela por sus intereses como de cosa propia.

Hago votos por el acierto en la elección de las autoridades que hoy se renuevan, para mayor prosperidad de nuestra Institución, prosperidad que implica mejoramiento de la cultura nacional y engrandecimiento de nuestra patria ubérrima.

Buenos Aires, 31 de marzo de 1938.

JORGE W. DOBRANICH

BALANCE DE COMPROBACION DE SUMAS Y SALDOS
Año ecnómico 1937/1938

Folio	Cuenta	Debe	Haber	Debe	Haber
120	Capital		869650.37		869650.37
101	Organización Didáctica	524.75	2812.10		2287.35
4	Acciones Edificio Social		3710.—		3710.—
7	Edificio Cevallos 269	41893.78	41893.78		
16	Tít. Deuda P. E. Bs. Aires	227.27		227.27	
17	Céd. Hip. Arg. Serie E	3648.—		3648.—	
18	» » » » C	1442.10		1442.10	
19	Cert. de Canc. y Fomento	50650.21		50650.21	
20	Edificio Social	482954.18		482954.18	
38	Conc. terreno Santa Fé	111888.—	3108.—	108780.—	
40	Gobierno Nacional (M. O. P.)	17000.—	4403.60	12596.40	
42	Comité VII Cong. Cient.	181.90		181.90	
59	Intereses		2217.91		2217.91
62	Bonos Hip. Const. Econ.	3957.31		3957.31	
72	Caja	128811.96	128558.84	253.12	
69	Recibos al cobro	18780.—	15480.—	3300.—	
77	Cuotas de socios	630.—	15440.—		14810.—
79	« Tomás Palumbo », Tall. Gráf.	8726.74	8726.74		
81	Subsidio Gob. Nacional	13266.67	5266.67	8000.—	
82	» Municipal	1800.—		1800.—	
83	Sección Santa Fé		670.—		670.—
84	Conc. Subsidio Gob. Nacional		7500.—		7500.—
85	» » Municipal		1800.—		1800.—
89	Muebles y Utiles	32203.11	1000.—	31203.11	
91	Contrib. a Gastos Generales		5040.—		5040.—
93	Amort. Conc. terreno Santa Fé	3108.—		3108.—	
95	Gastos Generales	3989.47	170.—	3819.47	
97	Sueldos	12430.—		12430.—	
100	Sección Mendoza		168.—		168.—
102	Comisiones	1387.90		1387.90	
103	Biblioteca	164463.46		164463.46	
105	Banco Nación Argentina	68113.70	62902.05	5211.65	
109	Anales	9076.74	3426.32	5650.42	
107	Banco Municipal Préstamos	1866.65	180.—	1686.65	
110	Fondo cons. y mej. Edificio	180.—	1866.65		1686.65
111	Saldo a cobrar venta Edificio	31280.—	31280.—		
111	Quebranto venta Edificio	9526.68		9526.68	
111	Indemniz. inquilino Edificio	600.—	600.—		
112	Imp. y contrib. Edificio	424.90	424.90		
112	Gastos escrituración Edificio	438.—	438.—		
114	Subsidio Bibliotecas Populares	1200.—	600.—	600.—	
124	Conc. Sub. Bibliotecas Populares		1200.—		1200.—
122	Ganancias y Pérdidas	862.45	7000.—		6137.55
	Sumas iguales	1227533.93	1227533.93	916877.83	916877.83

Buenos Aires, 31 de marzo de 1938.

Vº Bº

ANTONIO CASACUBERTA — SANTIAGO BARABINO AMADEO
Secretarios

JORGE W. DOBRANICH
Presidente

ADOLFO E. PORRAL
Gerente

CARLOS E. GÉNEAU
Tesorero

BALANCE GENERAL

ACTIVO

Bienes Muebles	Muebles y Utiles	$ 31.203.11	
	Biblioteca social	» 164.463.46	$ 195.666.57
Bienes Inmuebles	Concesión terreno Santa Fé 1145	$ 108.780.—	
	Nuevo Edificio Social Santa Fé 1145 .	» 482.954.18	» 591.734.18
Títulos de Renta	Título Deuda Púb. Ext. Pcia. B. Aires .	$ 227.27	
	Cédulas Hip. Argentinas, Serie E.	» 3.648.—	
	» » » » C.	» 1.442.10	
	Certificados Emp. de Cancelación y Fomento	» 50.650.21	
	Bonos Hip. de Construc. Económicas ..	» 3.957.31	» 59.924.89
Subsidios	Gobierno Nacional (M. O. P.)	$ 12.596.40	
	Subsidio Gobierno Nacional	» 8.000.—	
	» Municipal	» 1.800.—	
	» Bibliotecas Populares	» 600.—	» 22.996.40
Deudores Varios	Comité VII Congreso Cient. Americano	» 181.90	
	Recibos al cobro	» 3.300.—	» 3.481.90
Caja y Bancos	Banco de la Nación Argentina	$ 5.211.65	
	» Municipal de Préstamos	» 1.686.65	
	Caja	» 253.12	» 7.151.42
	Total		$ 880.955.36

ADOLFO E. PORRAL
Gerente

CARLOS E. GÉNEAU
Tesorero

AÑO ECONOMICO 1937/1938

PASIVO

Capital Social	$	873.271.36
Organización Didáctica de Buenos Aires	»	2.287.35
Acciones Edificio Cevallos 269	»	3.710.—
Fondo conservación y mejoras Edificio Social	»	1.686.65
Total	$	880.955.36

Buenos Aires, marzo 31 de 1938.

Vº Bº

JORGE W. DOBRANICH
Presidente

ANTONIO CASACUBERTA — SANTIAGO BARABINO AMADEO
Secretarios

BALANCE GENERAL AÑO ECONOMICO 1937/1938

ACTIVO

Bienes Muebles	Muebles y Utiles	$ 31.203.11	
	Biblioteca social	» 164.463.46	$ 195.666 57
Bienes Inmuebles	Concesión terreno Santa Fé 1145	$ 108.780.—	
	Nuevo Edificio Social Santa Fé 1145	» 482.954.18	» 591 734 18
Títulos de Renta	Título Deuda Púb. Ext. Pcia. B. Aires	$ 227.27	
	Cédulas Hip. Argentinas, Serie E.	» 3.648.—	
	» » » » C.	» 1.442.10	
	Certificados Emp. de Cancelación y Fomento	» 50.650.21	
	Bonos Hip. de Construc. Económicas	» 3.957.31	» 59.924.89
Subsidios	Gobierno Nacional (M. O. P.)	$ 12.596.40	
	Subsidio Gobierno Nacional	» 8.000.—	
	» Municipal	» 1.800.—	
	» Bibliotecas Populares	» 600.—	» 22.996 40
Deudores Varios	Comité VII Congreso Cient. Americano	» 181.90	
	Recibos al cobro	» 3.300.—	» 3.481.90
Caja y Bancos	Banco de la Nación Argentina	$ 5.211.65	
	» Municipal de Préstamos	» 1.686.65	
	Caja	» 253.12	» 7.151.42
	Total		$ 880.955 36

PASIVO

Capital Social	$ 873.271.36
Organización Didáctica de Buenos Aires	» 2.287.35
Acciones Edificio Cevallos 269	» 3.710.—
Fondo conservación y mejoras Edificio Social	» 1.686.65
Total	$ 880.955.36

Buenos Aires, marzo 31 de 1938.

Vº Bº

ADOLFO E. PORRAL
Gerente

CARLOS E. GÉNEAU
Tesorero

JORGE W. DOBRANICH
Presidente

ANTONIO CASACUBERTA — SANTIAGO BARABINO AMADEO
Secretarios

DEMOSTRACION DE

DEBE

Amortización concesión terreno Santa Fé	$	3.108.—
Gastos Generales	»	3.819.47
Sueldos	»	12.430.—
Comisiones	»	1.387.90
Anales	»	5.650.42
Quebranto venta edificio Cevallos 269	»	9.526.68
Capital (utilidad del Ejercicio)	»	3.620.99
Total	$	39.543.46

ADOLFO E. PORRAL
Gerente

CARLOS E. GÉNEAU
Tesorero

GANANCIAS Y PERDIDAS

		HABER
Cuotas de socios	$	14.810.—
Intereses	»	2.217.91
Sección Santa Fé	»	670.—
» Mendoza	»	168.—
Concesión Subsidio Gobierno Nacional	»	7.500.—
» » Municipal	»	1.800.—
» » Bibliotecas Populares	»	1.200.—
Ganancias y Pérdidas	»	6.137.55
Contribuciones a Gastos Generales	»	5.040.—
Total	$	39.543.46

Buenos Aires, marzo 31 de 1938.

Vº Bº

JORGE W. DOBRANICH
Presidente

ANTONIO CASACUBERTA — SANTIAGO BARABINO AMADEO
Secretarios

DEMOSTRACION DE GANANCIAS Y PERDIDAS

DEBE		HABER	
Amortización concesión terreno Santa Fé	$ 3.108.—	Cuotas de socios	$ 14.810. —
Gastos Generales	» 3.819.47	Intereses	» 2.217.91
Sueldos	» 12.430.—	Sección Santa Fé	» 670.—
Comisiones	» 1.387.90	» Mendoza	» 168.—
Anales	» 5.650.42	Concesión Subsidio Gobierno Nacional	» 7.500.—
Quebranto venta edificio Cevallos 269	» 9.526.68	» » Municipal	» 1.800.—
Capital (utilidad del Ejercicio)	» 3.620.99	» » Bibliotecas Populares	» 1.200.—
		Ganancias y Pérdidas	» 6.137.55
		Contribuciones a Gastos Generales	» 5.040.—
Total	$ 39.543.46	Total	$ 39.543.46

Buenos Aires, marzo 31 de 1938.

Vº Bº

ADOLFO E. PORRAL
Gerente

CARLOS E. GÉNEAU
Tesorero

JORGE W. DOBRANICH
Presidente

ANTONIO CASACUBERTA — SANTIAGO BARABINO AMADEO
Secretarios

COTEJOS ECONOMICOS Y SELECCION ECONOMICA

POR EL ING. MAURICIO DURRIEU

(Continuación)

51. — En esta nueva expresión del valor actual, pongamos

$$U'' = U \quad ; \quad P'' = P \quad ; \quad S'' = S \quad ; \quad r'' = r_1 .$$

Obtendremos

$$C_a = \frac{\left(C - \frac{C_l}{(1+r)^l}\right)\left(d_l + \frac{r_1}{1+r}\right) + \frac{C_l}{(1+r)^{l-a}}\left(d_{l-a} + \frac{r_1}{1+r}\right)}{d_{l-a} + \frac{r_1}{1+r}} =$$

$$= \left(C - \frac{C_l}{(1+r)^l}\right)\frac{d_l + \frac{r_1}{1+r}}{d_{l-a} + \frac{r_1}{1+r}} + \frac{C_l}{(1+r)^{l-a}} \qquad [34]$$

y si admitiéremos aún que r_1 se reduzca a la tasa del interés tomada para la amortización, anulándose de consiguiente las cargas fijas de conservación en la inactividad, que en otros casos suelen originarse, se ve que

$$C_a = \left(C - \frac{C_l}{(1+r)^l}\right)\frac{d_l + \frac{r}{1+r}}{d_{l-a} + \frac{r}{1+r}} + \frac{C_l}{(1+r)^{l-a}} =$$

$$= \left(C - \frac{C_l}{(1+r)^l}\right) \frac{\dfrac{r}{[(1+r)^l - 1](1+r)} + \dfrac{r}{1+r}}{\dfrac{r}{[(1+r)^{l-a} - 1](1+r)} + \dfrac{r}{1+r}} + \frac{C_l}{(1+r)^{l-a}} =$$

$$= \left(C - \frac{C_l}{(1+r)^l}\right) \frac{\dfrac{1}{(1+r)^l - 1} + 1}{\dfrac{1}{(1+r)^{l-a} - 1} + 1} + \frac{C_l}{(1+r)^{l-a}} =$$

$$= \left(C - \frac{C_l}{(1+r)^l}\right) \frac{\dfrac{1}{(1+r)^l - 1} + 1}{\dfrac{(1+r)^{l-a}}{(1+r)^{l-a} - 1}} + \frac{C_l}{(1+r)^{l-a}} =$$

$$= \left(C - \frac{C_l}{(1+r)^l}\right) \frac{\dfrac{(1+r)^{l-a} - 1}{(1+r)^l - 1} + (1+r)^{l-a} - 1}{(1+r)^{l-a}} + \frac{C_l}{(1+r)^{l-a}} =$$

$$= \frac{\left(C - \dfrac{C_l}{(1+r)^l}\right) \dfrac{(1+r)^{l-a} - 1}{(1+r)^l - 1} + \left(C - \dfrac{C_l}{(1+r)^l}\right) [(1+r)^{l-a} - 1]}{(1+r)^{l-a}} +$$

$$+ \frac{C_l}{(1+r)^{l-a}} = \frac{\left(C - \dfrac{C_l}{(1+r)^l}\right) \dfrac{(1+r)^{l-a} - 1}{(1+r)^l - 1} - \left(C - \dfrac{C_l}{(1+r)^l}\right)}{(1+r)^{l-a}} +$$

$$+ C - \left(\frac{C_l}{(1+r)} - \frac{C_l}{(1+r)^{l-a}}\right) =$$

$$= \left(C - \frac{C_l}{(1+r)^l}\right) \frac{1}{(1+r)^{l-a}} \left(\frac{(1+r)^{l-a} - 1}{(1+r)^l - 1} - 1\right) +$$

$$+ C - \left(\frac{C_l}{(1+r)^l} - \frac{C_l (1+r)^a}{(1+r)^l}\right) =$$

$$= \left(C - \frac{C_l}{(1+r)}\right) \frac{1}{(1+r)^{l-a}} \frac{(1+r)^{l-a} - (1+r)^l}{(1+r)^l - 1} + C -$$

$$- \frac{C_l}{(1+r)^l} [1-(1+r)^a] = \left(C - \frac{C_l}{(1+r)^l}\right) \frac{1}{(1+r)^l - 1} \frac{(1+r)^{l-a} - (1+r)^l}{(1+r)^{l-a}} +$$

$$+ C - \frac{C}{(1+r)_l} [1-(1+r)^a] = C - \frac{C_l}{(1+r)^l} [1-(1+r)^a] -$$

$$- \left(C - \frac{C_l}{(1+r)^l}\right) \frac{1}{(1+r)^l - 1} \frac{(1+r)^l - (1+r)^{l-a}}{(1+r)^{l-a}} =$$

$$= C + \frac{C_l}{(1+r)^l} [(1+r)^a - 1] - \left(C - \frac{C_l}{(1+r)^l}\right) \frac{(1+r)^a - 1}{(1+r)^l - 1} = C +$$

$$+ \frac{C_l}{(1+r)^l} [(1+r)^a - 1] - \left(C - \frac{C_l}{(1+r)^l}\right) \frac{[(1+r)^a - 1] \frac{(1+r)}{r}}{[(1+r)^l - 1] \frac{(1+r)}{r}} =$$

$$= C + \frac{C_l}{(1+r)^l} \frac{[(1+r)^a - 1] \frac{1+r}{r}}{\frac{1+r}{r}} -$$

$$- \left(C - \frac{C_l}{(1+r)^l}\right) \frac{[(1+r)^a - 1] \frac{(1+r)}{r}}{[(1+r)^l - 1] \frac{1+r}{r}} =$$

$$\left.\begin{aligned} &= C + \frac{C_l}{(1+r)^l} \frac{r}{1+r} z_a - \left(C - \frac{C_l}{(1+r)^l}\right) z_a d_a = \\ &= C (1 - z_a d_a) + \frac{C_l}{(1+r)^l} z_a \left(\frac{r}{1+r} + d_l\right) \end{aligned}\right\} \quad [35]$$

Como

$$z_a = \frac{(1+r)^a - 1}{r}(1+r) = \frac{T_a}{1-T_a}\,\frac{1+r}{r}$$

y

$$d_l = \frac{r}{(1+r)^l - 1}\,\frac{1}{1+r} = \frac{1-T_l}{T_l}\,\frac{r}{1+r}$$

la [35] da:

$$C_a = C\left(1 - \frac{T_a(1-T_l)}{(1-T_a)T_l}\right) +$$

$$+ C_l(1-T_l)\frac{T_a}{1-T_a}\,\frac{1+r}{r}\left(\frac{r}{1+r} + \frac{1-T_l}{T_l}\,\frac{r}{1+r}\right) =$$

$$= C\left(1 - \frac{T_a}{T_l}\,\frac{1-T_l}{1-T_a}\right) + C_l(1-T_l)\frac{T_a}{1-T_a}\left(1 + \frac{1-T_l}{T_l}\right) =$$

$$= C\frac{T_l - T_a}{T_l(1-T_a)} + C_l\frac{T_a - T_a T_l}{T_l - T_a T_l} = \frac{C(T_l - T_a) + C_l(T_a - T_a T_l)}{T_l - T_a T_l} \quad [35_a]$$

La [35] es, por cierto, más fácil de obtener por consideraciones simples y directas, por cuanto estriba en deducir el valor actual mediante la depreciación por amortización.

Efectivamente, el capital invertido, que en el día inicial de la inversión monta a $C - \frac{C_l}{(1+r)^l}$, amortízase en el decurso de los a años en la proporción

$$\left(C - \frac{C_l}{(1+r)^l}\right) d_l\, z_a ,$$

pues que las anualidades $\left(C - \frac{C_l}{(1+r)^l}\right) d_l$, acumulan esa suma en a años. Mas, el capital inicial, $C - \frac{C_l}{(1+r)^l}$, aumenta asimismo en $\frac{C_l}{(1+r)^l}(1+r)^a$ en esos a años. Luego, la depreciación es

$$D_a = C - \left(\frac{C_l}{(1+r)^l} - \frac{C_l(1+r)^a}{(1+r)^l}\right) - C_a$$

y como por hipótesis

$$D_a = \left(C - \frac{C_l}{(1+r)^l}\right) d_l\, z_a \,,$$

$$C_a = C - \left(\frac{C_l}{(1+r)^l} - \frac{C_l\,(1+r)^a}{(1+r)^l}\right) - \left(C - \frac{C_l}{(1+r)^l}\right) d_l\, z_a \,,$$

que es la [35].

52. — Admitamos todavía que a las simplificaciones del precedente caso (nº 51), se agrega la de $r = 0$.

Así las cosas,

$$d_{l-a} = \frac{1}{l-a} \quad ; \quad d_l = \frac{1}{l} \quad ; \quad (1+r)^a = (1+r)^{l-a} = (1+r)^l = 1 \quad ; \quad z_a = a \,.$$

Partiendo, pues, de la [34], deducimos

$$C_a = (C - C_l)\,\frac{\frac{1}{l}}{\frac{1}{l-a}} + C_l = (C - C_l)\,\frac{l-a}{l} + C_l =$$

$$= (C - C_l) - (C - C_l)\,\frac{a}{l} + C_l = C - (C - C_l)\,\frac{a}{l} \qquad [36]$$

fórmula en la que el segundo término del segundo miembro expresa la depreciación por ley lineal, es decir, la que resulta de suponer que decrezca siempre el valor de la estructura en proporción directa al tiempo transcurrido.

Evidente es que la [36] también puede deducirse de la [35], y con más prontitud. Lo mismo cabe obtenerla por razonamiento directo. Si, en este caso, fuese la hipótesis que la depreciación ocurra en proporción al tiempo, como la total es $C - C_l$, la anual será

$$\frac{C - C_l}{l} \,,$$

y con las a anualidades del período a años, obtenemos un capital

$$\frac{C - C_l}{l}\, a \,.$$

Por lo tanto,

$$C_a = C - (C - C_l)\,\frac{a}{l} \,.$$

53. — Cargas de servicio o explotación. — El servicio o explotación de una instalación industrial, una obra, una estructura, que engendra las llamadas *cargas de servicio o de explotación,* tiene por característica esencial la de corresponder a *una actividad.* Esta actividad comprende a su vez aspectos variadísimos. En el caso más general, de producción con instalaciones y maquinarias, abarca la adquisición de materiales y materias, el transporte, la manutención y la remoción de unos y otras; toda la escala de servicios manuales requeridos para transformar las materias primas o adaptarlas a sus fines; las prestaciones mecánicas principales de la producción y asimismo las accesorias de máquinas o herramientas que no son partes de las instalaciones fijas; costos generales; costos de conservación y renovación parcial de los medios industriales; costos de expendio de los productos; intereses del fondo de gastos corrientes; imprevistos; en suma, todos los rubros citados en el cuadro de « Elementos del costo anual de servicio ».

Esta multiplicidad de elementos, complica visiblemente la consideración económica de los servicios o explotaciones, y obliga a clasificarles y computarles con suma prolijidad y atención, no tan sólo para alcanzar resultados fidedignos, sino igualmente para los fines de la comparación a que están destinados implícita, si no directamente.

La variedad de los objetos que puede satisfacer el cálculo de costos anuales de servicio, lleva a modificar y aun a simplificar en condición y medida correspondientes la reunión de los elementos útiles que invisten la calidad de elementos de servicio o explotación. Al tomar en cuenta los de cada rubro, habrá de plantearse invariablemente, con criterio análogo al empleado para las cargas fijas, si puede reunírseles en un solo total para incorporarles, directamente o tras determinados cálculos preparatorios, en la expresión del costo anual de servicio, o bien si es fuerza considerarles por separado, atentas las condiciones en que se ofrecen e intervienen en los costos.

En cuanto sigue, estudiamos las expresiones generales merced a las cuales pueden introducirse los costos de servicio en las expresiones del caso del costo anual de servicio. Conocidas tales expresiones, serán utilizadas, caso por caso, según cuadre.

54. — Costos de producción o marcha. — A mérito de las consideraciones del número que precede, no necesitamos detenernos en explicar la forma en que podrán calcularse estos costos por partes.

Que las expensas de producción o marcha puedan reunirse en

una sola cantidad, o deban, por el contrario, calcularse separadamente, toda inversión anual podrá resultar, o bien:

1° constante; o inversamente,
2° variable de un año a otro.

Llamemos P_1 el monto de aquella inversión en el primer caso. Escribiremos entonces:

$$\text{Costo anual de producción o marcha} = P_1 \qquad [37]$$

A esta inversión anual corresponde un capital presente inicial, relativo a n años:

$$P_1 + \frac{P_1}{1+r} + \frac{P_1}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{P_1}{(1+r)^{n-1}}$$

y esta suma monta a

$$P_1\left[1 + \frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+r)^{n-1}}\right] =$$

$$= \frac{P_1}{(1+r)^{n-1}}\left[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \ldots + 1\right] =$$

$$= P_1 \frac{1}{(1+r)^{n-1}} \frac{(1+r)^n - 1}{r} = P_1 \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n} \frac{1+r}{r} = P_1 \frac{T_n}{T_1} \qquad [38]$$

expresión en la que n podrá valer a, l, hl o $hl + a$ años, según sea el caso.

Para estas diversas duraciones del período de subsistencia, tendremos entonces los capitales presentes:

$$n = a \qquad \frac{P_1}{(1+r)^a} \frac{[(1+r)^a - 1](1+r)}{r} = P_1 \frac{T_a}{T_1} \qquad [39]$$

$$n = l \qquad \frac{P_1}{(1+r)^l} \frac{[(1+r)^l - 1](1+r)}{r} = P_1 \frac{T_l}{T_1} \qquad [40]$$

$$n = hl \qquad \frac{P_1}{(1+r)^{hl}} \frac{[(1+r)^{hl} - 1](1+r)}{r} = P_1 \frac{T_{hl}}{T_1} \qquad [41]$$

$$n = hl + a \qquad \frac{P_1}{(1+r)^{hl+a}} \frac{[(1+2)^{hl+a} - 1](1+r)}{r} = P_1 \frac{T_{hl+a}}{T_1} \qquad [42]$$

55. — Cuando variasen de cualquier manera, en general, las cargas anuales por concepto de producción o marcha — variación que visiblemente admite la totalización, año por año, de los costes y costos diversos de la producción o marcha al año, — ocurrirá calcular una anualidad media, tanto a efectos de introducirla en la expresión del costo anual de servicio, como para hacer lo propio en las fórmulas [39] a [42].

Llamemos, con ese fin, P_1, P_2, ..., P_n, los costos anuales sucesivos de producción o marcha. El capital presente inicial necesario para cubrir el costo anual P_i, al comienzo del año i, es

$$P_{p_i} = \frac{P_i}{(1+r)^{i-1}} \, .$$

Al final del plazo n, tornaráse este capital presente en el capital

$$P_{p_i}(1+r)^n = \frac{P_i}{(1+r)^{i-1}}(1+r)^n \, .$$

Las anualidades indispensables para constituir ese capital final, durante el plazo n, valdrán

$$\frac{P_i}{(1+r)^{i-1}}(1+r)^n \frac{r}{[(1+r)^n - 1](1+r)} = P_i(1 - T_{i-1})\frac{T_1}{T_n} \, ,$$

y aplicando este razonamiento a todos los P_i

$$P_{n_m} = \frac{r(1+r)^n}{[(1+r)^n - 1](1+r)}\left[P_1 + \frac{P_2}{1+r} + \frac{P_3}{(1+r)^2} + \dots + \frac{P_n}{(1+r)^{n-1}}\right] =$$

$$= \frac{T_1}{T_n}[P_1 + P_2(1 - T_1) + P_3(1 - T_2) + \dots + P_n(1 - T_{n-1})] \qquad [43]$$

Introducido este valor medio de la anualidad de producción o marcha en las fórmulas [39] a [42], suministra los capitales fijos correspondientes a cada supuesto para el valor n. Tenemos, pues, $n = a$

$$P_{a_m} = \frac{r(1+r)^a}{[(1+r)^a - 1](1+r)}\left[P_1 + \frac{P_2}{1+r} + \frac{P_3}{(1+r)^2} + \dots + \frac{P_a}{(1+r)^{a-1}}\right] =$$

$$= \frac{T_1}{T_a}[P_1 + P_2(1 - T_1) + P_3(1 - T_2) + \dots + P_a(1 - T_{a-1})]$$

y

$$C_{p_a} = P_1 + \frac{P_2}{1+r} + \frac{P_3}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{P_a}{(1+r)^{a-1}} =$$

$$= P_1 + P_2 (1 - T_1) + P_3 (1 - T_2) + \ldots + P_a (1 - T_{a-1}) \quad [44]$$

$n = l.$

$$P_{l_m} = \frac{r(1+r)^l}{[(1+r)^l - 1](1+r)} \left[P_1 + \frac{P_2}{1+r} + \frac{P_3}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{P_l}{(1+r)^{l-1}} \right] =$$

$$= \frac{T_1}{T_l} [P_1 + P_2 (1 - T_1) + P_3 (1 - T_2) + \ldots + P_l (1 - T_{l-1})]$$

$$C_{p_l} = P_1 + \frac{P_2}{1+r} + \frac{P_3}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{P_l}{(1+r)^{l-1}} =$$

$$= P_1 + P_2 (1 - T_1) + P_3 (1 - T_2) + \ldots + P_l (1 - T_{l-1}) \quad [45]$$

$n = hl.$

$$P_{hl_m} = \frac{r(1+r)}{[(1+r)^{hl} - 1](1+r)} \left[P_1 + \frac{P_2}{1+r} + \frac{P_3}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{P_{hl}}{(1+r)^{hl-1}} \right] =$$

$$= \frac{T_1}{T_{hl}} [P_1 + P_2 (1 - T_1) + P_3 (1 - T_2) + \ldots + P_{hl} (1 - T_{hl-1})]$$

$$C_{p_{hl}} = P_1 + \frac{P_2}{1+r} + \frac{P_3}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{P_{hl}}{(1+r)^{hl-1}} =$$

$$= P_1 + P_2 (1 - T_1) + P_3 (1 - T_2) + \ldots + P_{hl} (1 - T_{hl-1}) \quad [46]$$

$n = hl + a.$

$$P_{hl+a_m} = \frac{r(1+r)^{hl+a}}{[(1+r)^{hl+a} - 1](1+r)} \left[P_1 + \frac{P_2}{1+r} + \frac{P_3}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{P_{hl+a}}{(1+r)^{hl+a-1}} \right] =$$

$$= \frac{T_1}{T_{hl+a}} [P_1 + P_2 (1 - T_1) + P_3 (1 - T_2) + \ldots P_{hl+a} (1 - T_{hl+a-1})]$$

$$C_{p_{hl+a}} = P_1 + \frac{P_2}{(1+r)} + \frac{P_3}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{P_{hl+a}}{(1+r)^{hl+a-1}} =$$

$$= P_1 + P_2 (1 - T_1) + P_3 (1 - T_2) + \ldots + P_{hl+a} (1 - T_{hl+a-1}) \quad [47]$$

56. — Las expresiones de la anualidad media correspondiente a los costos de producción o marcha, en los casos $n = hl$ y $n = hl + a$, son susceptibles de otra forma cuando se admite que los costos anuales se repiten con iguales montos en los años correspondientes de períodos sucesivos de vida de la instalación, obra o estructura.

Si entonces, para el supuesto $n = hl$, admitiéremos que P_1, P_2, P_3, ... P_l, se repiten en cada nuevo período de l años, tendremos:

1er. período | 2° período | n° período

1 2 3 l

0 1 2 3 l-1 l 1 2 3 l-1 2l 1 2 $(h$-1$)$ l 1 2 3 l-1 hl

P_1 P_2 P_3 P_l P_1 P_2 P_3 P_l P_1 P_2 P_3 P_l P_1 P_2 P_3 P_l

$$P'_{hl_m} = \frac{r(1+r)^{hl}}{[(1+r)^{hl}-1](1+r)}\left\{P_1\left[1+\frac{1}{(1+r)^l}+\frac{1}{(1+r)^{2l}}+\ldots+\frac{1}{(1+r)^{(h-1)l}}\right]+\right.$$

$$+P_2\left[\frac{1}{1+r}+\frac{1}{(1+r)^{l+1}}+\frac{1}{(1+r)^{2l+1}}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{1}{(1+r)^{(h-1)l+1}}\right]+$$

$$+P_3\left[\frac{1}{(1+r)^2}+\frac{1}{(1+r)^{l+2}}+\frac{1}{(1+r)^{2l+2}}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{1}{(1+r)^{(h-1)l+2}}\right]+$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+P_l\left[\frac{1}{(1+r)^{l-1}}+\frac{1}{(1+r)^{2l-1}}+\frac{1}{(1+r)^{3l-1}}+\ldots\right.$$

$$\left.\left.\ldots+\frac{1}{(1+r)^{hl-1}}\right]\right\}=$$

$$=\frac{r(1+r)^{hl}}{[(1+r)^{hl}-1](1+r)}\left\{P_1\frac{(1+r)^{hl}-1}{[(1+r)^l-1](1+r)^{(h-1)l}}+\right.$$

$$+P_2\frac{(1+r)^{hl}-1}{[(1+r)^l-1](1+r)^{(h-1)l}(1+r)}+$$

$$+P_3\frac{(1+r)^{hl}-1}{[(1+r)^l-1](1+r)^{(h-1)l}(1+r)^2}+\ldots$$

$$\left.\ldots+P_l\frac{(1+r)^{hl}-1}{[(1+r)^l-1](1+r)^{(h-1)l}(1+r)^{l-1}}\right\}=$$

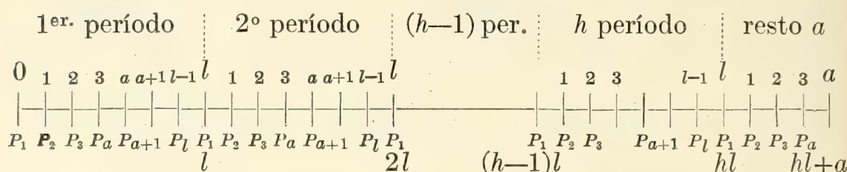
$$=\frac{r}{1+r}\,\frac{(1+r)^l}{(1+r)^l-1}\left\{P_1+\frac{P_2}{1+r}+\frac{P_3}{(1+r)^2}+\ldots+\frac{P_l}{(1+r)^1}\right\}=$$

$$=\frac{T_1}{T_l}\left\{P_1+P_2(1-T_1)+P_3(1-T_2)+\ldots P_l(1-T_{l-1})\right\},$$

que es el mismo valor hallado para P_{l_m} en el supuesto $n = l$.

57. — Despréndese de esto, ante todo, que si $h = \infty$, valdrá la misma expresión.

58. — Si, ahora, supusiéramos que en h períodos consecutivos de l años y un resto de a años, los costos anuales correlativos de producción o marcha en cada período fuesen de igual monto, tendremos:



$$P'_{hl+a_m} = \frac{r\,(1+r)^{hl+a}}{[(1+r)^{hl+a}-1]\,(1+r)} \Bigg\{$$

$$\Bigg\{ P_1 \left[+1 \frac{1}{(1+r)^l} + \frac{1}{(1+r)^{2l}} + \ldots + \frac{1}{(1+r)^{hl}} \right] +$$

$$+ P_2 \left[\frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^{l+1}} + \frac{1}{(1+r)^{2l+1}} + \ldots + \frac{1}{(1+r)^{hl+1}} \right] +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+ P_a \left[\frac{1}{(1+r)^{a-1}} + \frac{1}{(1+r)^{l+a-1}} + \frac{1}{(1+r)^{2l+a-1}} + \ldots + \frac{1}{(1+r)^{hl+a-1}} \right] +$$

$$+ P_{a+1} \left[\frac{1}{(1+r)^{a}} + \frac{1}{(1+r)^{l+a}} + \frac{1}{(1+r)^{2l+a}} + \ldots + \frac{1}{(1+r)^{hl+a}} \right] +$$

$$+ P_{a+2} \left[\frac{1}{(1+r)^{a+1}} + \frac{1}{(1+r)^{l+a+1}} + \frac{1}{(1+r)^{2l+a+1}} + \ldots + \frac{1}{(1+r)^{hl+a+1}} \right] +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+ P_l \left[\frac{1}{(1+r)^{l-1}} + \frac{1}{(1+r)^{2l-1}} + \frac{1}{(1+r)^{3l-1}} + \ldots + \frac{1}{(1+r)^{hl-1}} \right] \Bigg\} =$$

$$= \frac{r(1+r)^{hl+a}}{[(1+r)^{hl+a}-1](1+r)} \Bigg\{$$

$$\Bigg\{ P_1 \frac{(1+r)^{(h+1)l}-1}{(1+r)^l[(1+r)^l-1]} + P_2 \frac{(1+r)^{(h+1)}-1}{(1+r)^{hl}(1+r)[(1+r)^l-1]} + \dots +$$

$$+ P_a \frac{(1+r)^{(h+1)l}-1}{(1+r)^{hl}(1+r)^{a-1}[(1+r)^l-1]} +$$

$$+ P_{a+1} \frac{(1+r)^{hl}-1}{(1+r)^{(h-1)l}(1+r)^a[(1+r)^l-1]} +$$

$$+ P_{a+2} \frac{(1+r)^{hl}-1}{(1+r)^{(h-1)l}(1+r)^{a+1}[(1+r)^l-1]} +$$

$$+ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots +$$

$$+ P_{l-1} \frac{[(1+r)^{hl}-1](1+r)^2}{(1+r)^{hl}[(1+r)^l-1]} + P_l \frac{[(1+r)^{hl}-1](1+r)}{(1+r)^{hl}[(1+r)^l-1]} \Bigg\} =$$

$$= \frac{r(1+r)^{hl+a}}{[(1+r)^{hl+a}-1](1+r)} \Bigg\{$$

$$\Bigg[\Bigg\{ P_1 + \frac{P_2}{1+r} + \dots + \frac{P_a}{(1+r)^{a-1}} \Bigg\} \frac{[(1+r)^{(h+1)l}-1](1+r)^l}{(1+r)^{(h+1)l}[(1+r)^l-1]} +$$

$$+ \Bigg\{ P_{a+1}(1+r)^{l-a} + P_{a+2}(1+r)^{l-(a+1)} + \dots + P_{l-1}(1+r)^2 +$$

$$+ P_l(1+r) \Bigg\} \frac{(1+r)^{hl}-1}{(1+r)^{hl}[(1+r)^l-1]} \Bigg] \qquad [48]$$

o también, mediante la transformación Benitz

$$P'_{hl+a_m} = \frac{T_1}{T_{hl+a}} \Bigg[\{P_1 + P_2(1-T_1) + P_3(1-T_2) + \dots$$

$$\dots + P_a(1-T_a)\} \frac{T_{(h+1)l}}{T_l} + \Bigg\{ \frac{P_{a+1}}{1-T_{l-a}} + \frac{P_{a+2}}{1-T_{l-(a+1)}} + \dots$$

$$\dots + \frac{P_{l-1}}{1-T_2} + \frac{P_l}{1-T_1} \Bigg\} \frac{T_{hl}(1-T_l)}{T_l} \Bigg] \qquad [48\,a]$$

El capital presente, es la cantidad entre paréntesis.

59. — COSTOS DE CONSERVACIÓN [1]. — En su definición general, la conservación de las cosas responde al objeto de hacer que esas cosas, en cuanto sea posible, conserven su virtud y sus cualidades, y cuando hállense utilizadas con propiedad, en someterlas a los reparos necesarios para cumplir aquel fin. En la industria, las obras y los enseres son cosas que ora pueden permanecer sin aplicación inmediata, pese a lo cual no pierden ordinariamente su utilidad y valor; y ora prestan función en la producción o como accesorios de un servicio. La alternativa conduce a deslindar los costos de materias, trabajos y demás con que se evita o se subsana el demérito de cada cosa, atendiendo a la condición de expectativa o contrariamente de aplicación en que por turnos se halle — deslinde tanto más necesario en la práctica cuanto los requisitos de la conservación varían mucho, en general, en su naturaleza y en su monto, según correspondan a una u otra de aquellas condiciones.

Ya vimos en el cuadro de « Elementos del costo anual de servicio » y el número 42, que la conservación de instalaciones, obras, etc., inactivas, inclúyese en la categoría de las cargas fijas, y dimos a conocer la manera de proceder con ese objeto.

Los costos de conservación ocurrentes durante el servicio o la explotación de las mismas instalaciones, obras, etc., deben considerarse en unión de las restantes expensas demandadas por el propio servicio o funcionamiento. Cabría, así, como primer procedimiento, incluir esos costos en los de producción o marcha; mas, la propiedad de los cálculos y la prolijidad, invitan a variar este método, por cuanto los costos de conservación no corren estrictamente pareja con los de producción o marcha, y tanto o más nacen de la condición de los materiales y de las estructuras que compongan las instalaciones, obras, enseres, etc., que del servicio a que son éstas destinadas.

Por lo demás, ocurre todavía distinguir entre *reparos* y *restauraciones*, a los efectos de atribuir con propiedad los costos respectivos.

Reparos, en el sentido preciso con que empleamos aquí el término, son los trabajos ejecutados en una obra, instalación, enser, etc., con el propósito de subsanar la deficiencia de su estado, bien provenga ella de un desperfecto ocasionado por el servicio o de la acción de desgaste nacida de la aplicación del objeto.

Restauración, en vez, significa la ejecución de reparos y en cierto caso también de renovaciones parciales que vuélvense necesarios siempre que una obra, una instalación, un enser, han perdido el es-

[1] Véase número 13.

tado con que pusiéronse en servicio, y se quiere continuar o darles su apropiada aplicación.

El reparo, responde al fin de mantener corriente y exenta de peligro la utilización del objeto; la restauración, procura restablecer la posibilidad de emplear ese objeto, y sin cambiar fundamentalmente la estructura del mismo, puede llegar a reformarla siguiendo mejores directivas técnicas.

Por más que la conservación guarde a un tiempo relación, por una parte, con los costos de servicio, y por otra parte, con los de restauración y conservación — lo que vuelve difícil en numerosos casos establecer distinciones para atribuirlos con propiedad, — preciso es sentar claramente que las renovaciones de partes esenciales no interesan tan directa y adecuadamente la explotación o el servicio de las obras, instalaciones, etc., como el mantenimiento de la utilidad y del valor de dichas obras, instalaciones, etc. Los costos de las renovaciones de partes importantes, de igual manera que los de restauraciones, deben conceptuarse con más tino como menguas del capital de establecimiento, criterio que no queda desmentido por la atribución corriente a los costos de servicio de las renovaciones de partes menudas y muy desgastables, en razón de la causa evidente del desgaste que tórnalas necesarias.

En la práctica, siempre que el monto de los costos de conservación asuma una importancia relativa, habrá de procurarse desentrañar su origen y distribuirles conforme cuadre a éste. En tal caso, podrá suceder que esos gastos no resulten anuales, ni siquiera se sucedan a intervalos uniformes.

Cuando, opuestamente, fuesen los costos de conservación de escaso monto, y siempre que no resultase posible deslindar bien sus elementos, se les apreciará como un porcentaje del capital fijo correspondiente.

En esta hipótesis, de igual manera que si los costos de conservación fuesen constantes, se tendrá:

$$\text{Costos anuales de conservación} = S_1. \qquad [49]$$

El capital presente inicial respectivo, admitida la preparación siempre anticipada de S_1, fórmase por la suma

$$S_1\left[1 + \frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+r)^{n-1}}\right] =$$

$$= S_1 \frac{[(1+r)^n - 1]\,(1+r)}{r\,(1+r)^n} = S_1 \frac{T_n}{T_1} \qquad [50]$$

y así sucesivamente

$$n = a \qquad S_1 \frac{[(1+r)^a - 1](1+r)}{r(1+r)^a} = S_1 \frac{T_a}{T_1} \qquad [51]$$

$$n = l \qquad S_1 \frac{[(1+r)^l - 1](1+r)}{r(1+r)^l} = S_1 \frac{T_l}{T_1} \qquad [52]$$

$$n = hl \qquad S_1 \frac{[(1+r)^{hl} - 1](1+r)}{r(1+r)^{hl}} = S_1 \frac{T_{hl}}{T_1} \qquad [53]$$

$$n = hl + a \qquad S_1 \frac{[(1+r)^{hl+a} - 1](1+r)}{r(1+r)^{hl+a}} = S_1 \frac{T_{hl+a}}{T_1} \qquad [54]$$

60. — Sin repetir razonamientos y desarrollos, se puede escribir, asimismo, para el caso de que los costos anuales varíen de cualquier manera, año tras año, en general

$$S_{n_m} = \frac{(r\,1+r)^n}{([1+r)^n - 1](1+r)} \left[S_1 + \frac{S_2}{1+r} + \frac{S_3}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{S_n}{(1+r)^{n-1}} \right] =$$

$$= \frac{T_1}{T_n} [S_1 + S_2(1 - T_1) + S_3(1 - T_2) + \ldots + S_n(1 - T_{n-1})] \qquad [55]$$

Verificadas en esta fórmula las cuatro hipótesis conocidas, dedúcese:

$$n = a \qquad S_{a_m} = \frac{r(1+r)^a}{[(1+r)^a - 1](1+r)} \left[S_1 + \frac{S_2}{1+r} + \frac{S_3}{(1+r)^2} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{S_a}{(1+r)^{a-1}} \right] = \frac{T_1}{T_a} [S_1 + S_2(1 - T_1) +$$

$$+ S_3(1_1 - T_2) + \ldots + S_a(1 - T_{a-1})],$$

que corresponde al capital presente:

$$S_1 + S_2(1 - T_1) + S_3(1 - T_2) + \ldots + S_a(1 - T_{a-1}); \qquad [56]$$

$$n = l \qquad S_{l_m} = \frac{r(1+r)^l}{[(1+r)^l - 1](1+r)} \left[S_1 + \frac{S_2}{1+r} + \frac{S_3}{(1+r)^2} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{S_l}{(1+r)^{l-1}} \right] = \frac{T_1}{T_l} [S_1 + S_2(1 - T_1) +$$

$$+ S_3(1 - T_2) + \ldots + S_l(1 - T_{l-1})]$$

para la cual el capital presente es

$$S_1 + S_2(1 - T_1) + S_3(1 - T_2) + \ldots + S_l(1 - T_{l-1}); \quad [57]$$

$$n = hl \qquad S_{hl_m} = \frac{r(1+r)^{hl}}{[(1+r)^{hl} - 1](1+r)} \left[S_1 + \frac{S_2}{1+r} + \frac{S_3}{(1+r)^2} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{S_{hl}}{(1+r)^{hl-1}} = \frac{T_1}{T_{hl}} [S_1 + S_2(1 - T_1) + \right.$$

$$S_3(1 - T_2) + \ldots + S_{hl}(1 - T_{hl-1})],$$

cuyo capital presente correlativo es

$$S_1 + S_2(1 - T_1) + S_3(1 - T_2) + \ldots + S_{hl}(1 - T_{hl-1}); \quad [58]$$

y, por fin,

$$n = hl + a \qquad S_{hl+a_m} = \frac{r(1+r)^{hl+a}}{[(1+r)^{hl+a} - 1](1+r)} \left[S_1 + \frac{S_2}{1+r} + \right.$$

$$\left. + \frac{S_3}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{S_{hl+a}}{(1+r)^{hl+a-1}}\right] = \frac{T_1}{T_{hl+a}} [S_1 + S_2(1 - T_1) +$$

$$+ S_3(1 - T_2) + \ldots + S_{hl+a}(1 - T_{hl+a-1})]$$

a cuyo valor corresponde el capital presente inicial

$$S_1 + S_2(1 - T_1) + S_3(1 - T_2) + \ldots + S_{hl+a}(1 - T_{hl+a-1}) \quad [59]$$

61. — También sin renovar las deducciones, ocurre asentar que si año por año correlativos de cada período, los costos de conservación se mantuvieren iguales, la anualidad media de un plazo de subsistencia hl vale lo mismo que para un plazo l (N° 56), y este mismo valor ofrece para $h = \infty$.

62. — Cuando, en el mismo supuesto del número 61, el plazo de subsistencia durase $hl + a$ años,

$$S_{hl+a_m} = \frac{r(1+r)^{hl+a}}{[(1+r)^{hl+a}-1](1+r)} \left\{ S_1 \frac{(1+r)^{(h+1)l}-1}{[(1+r)^l-1](1+r)^{hl}} + \right.$$

$$+ S_2 \frac{(1+r)^{(h+1)l}-1}{[(1+r)^l-1](1+r)^{hl}(1+r)} + S_3 \frac{(1+r)^{(h+1)l}-1}{[(1+r)^l-1](1+r)^{hl}(1+r)^2} + \ldots$$

$$\ldots + S_a \frac{(1+r)^{(h+1)l}-1}{[(1+r)^l-1](1+r)^{hl}(1+r)^{a-1}} +$$

$$+ S_{a+1} \frac{(1+r)^{(h+1)l}-1}{[(1+r)^l-1](1+r)^{hl}(1+r)^a} + \ldots$$

$$\ldots + S_{l-1} \frac{(1+r)^{(h+1)l}-1}{[(1+r)^l-1](1+r)^{hl-2}} +$$

$$\left. + S_l \frac{(1+r)^{(h+1)l}-1}{[(1+r)^l-1](1+r)^{hl-1}} \right\} \qquad [60]$$

El capital presente correspondiente, como lo dijimos en el caso similar del número 58, es la suma entre paréntesis.

63. — Un caso particular, si bien muy frecuente, de esta investigación del costo medio de conservación anual en servicio, es el que ocurre cuando las expensas no son consecutivas año tras año, sino saltuarias y variables.

Podrían resultar, entonces, periódicas; mas, al deducir la expresión de una anualidad media para el caso más general, quedará también resuelto el de periodicidad.

Sin repetir los razonamientos empleados para el caso del número 55, escribiremos, en el supuesto de que durante un período, n, de subsistencia de la obra, instalación, etc., ocurran costos de conservación a los a', b, c ... años:

$$S'_{n_m} = \frac{r(1+r)^n}{[(1+r)^n-1](1+r)} \left[\frac{S_{a'}}{(1+r)^{a'-1}} + \frac{S_b}{(1+r)^{b-1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{S_c}{(1+r)^{c-1}} + \ldots \right] = \frac{T_1}{T_n} [S_a' (1 - T_{a'-1}) +$$

$$+ S_b (1 - T_{b-1}) + S_c (1 - T_{c-1}) + \ldots] \qquad [61]$$

Luego, si

$$n = a \qquad S_{a'_m} = \frac{r\,(1+r)^a}{[(1+r)^a - 1]\,(1+r)}\left[\frac{S_{a'}}{(1+r)^{a'-1}} + \frac{S_b}{(1+r)^{b-1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{S_c}{(1+r)^{c-1}} + \ldots + \frac{S_{s \leq a}}{(1+r)^{s-1}}\right] = \frac{T_1}{T_a}\,[S_{a'}\,(1 - T_{a'-1}) +$$

$$+ S_b\,(1 - T_{b-1}) + S_c\,(1 - T_{c-1}) + \ldots S_{s \leq a}\,(1 - T_{s-1})] \qquad [62]$$

$$n = l \qquad S'_{l_m} = \frac{r\,(1+r)^l}{[(1+r)^l - 1]\,(1+r)}\left[\frac{S_{a'}}{(1+r)^{a'-1}} + \frac{S_b}{(1+r)^{b-1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{S_c}{(1+r)^{c-1}} + \ldots + \frac{S_{t \leq l}}{(1+r)^{t-1}}\right] = \frac{T_1}{T_l}\,[S_{a'}\,(1 - T_{a'-1}) +$$

$$+ S_b\,(1 - T_{b-1})) + S_c\,(1 - T_{c-1}) + \ldots + S_{t \leq l}\,(1 - T_1)] \qquad [63]$$

$$n = hl \qquad S'_{hl_m} = \frac{r\,(1+r)^{hl}}{[(1+r)^{hl} - 1]\,(1+r)}\left[\frac{S_{a'}}{(1+r)^{a'-1}} + \frac{S_b}{(1+r)^{b-1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{S_c}{(1+r)^{c-1}} + \ldots + \frac{S_{u \leq hl}}{(1+r)^{u-1}}\right] = \frac{T_1}{T_{hl}}\,[S_{a'}\,(1 - T'_{a-1}) +$$

$$+ S_b\,(1 - T_{b-1}) + S_c(1 - T_{c-1}) + \ldots + S_{u \leq hl}\,(1 - T_{u-1})] \qquad [64]$$

$$n = hl + a \qquad S'_{hl+a} = \frac{r\,(1+r)^{hl+a}}{[(1+r) - 1]^{hl+a}\,(1+r)}\left[\frac{S_{a'}}{(1+r)^{a'-1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{S_b}{(1+r)^{b-1}} + \frac{S_c}{(1+r)^{c-1}} + \ldots + \frac{S_{v \leq hl+a}}{(1+r)^{v-1}}\right] =$$

$$= \frac{T_1}{T_{hl+a}}\,[S_{a'}\,(1 - T_{a'-1}) + S_b\,(1 - T_{b-1}) + S_c\,(1 - T_{c-1}) + \ldots$$

$$\ldots + S_{v \leq hl+a}\,(1 - T_{v-1})] \qquad [65]$$

Supuesto $n = \infty$, se aplicará la [63].

64. — Costos de despacho.— Las causas de que se originen costos de despacho en las industrias y obras, han sido ya señaladas en las consideraciones generales del número 14, y no resulta necesario volver a mencionarlas aquí, como tampoco repetir la enunciación de las rúbricas que de ordinario constituyen estos costos. Una clasificación prolija de dichas rúbricas y de las partidas que les pertenecen, poco interés ofrecería para la finalidad de los estudios de selección económica de concepto general.

Indudable es que en tanto exista producción, la salida de los productos ha de encararse normalmente en manera continua. La mayoría, entonces, de los actos esenciales de despacho (transportes a los puntos de expedición al exterior, selección, almacenamiento, embalaje, etc.), ocurrirán con continuidad y será posible establecer los costos correspondientes a un determinado período de servicio — al año, por lo regular.

Los costos accesorios de despacho, no tienen todos el mismo carácter de continuidad ni de regularidad para originarse. Son muy variables; mas, a los efectos de formar el monto de los costos de despacho en un problema de selección económica, será lo más rápido y acertado, en general, calcularles por un porcentaje del gasto restante del mismo concepto, o del caudal de ventas, sumando el importe a que de tal suerte se arribe a los demás costos directamente estimables.

Es consiguiente de estas breves razones, que tenemos, por analogía a lo hecho para los costos de conservación, uno de estos dos casos:

1° Un valor constante, D_1, estimado por medio de los datos de la Contabilidad o como un porcentaje del monto de las ventas;

2° valores variables, D_1, D_2, etc., por año, cuando se pudiere prever una variación de la producción.

Las fórmulas [49] y [50] a [60], valdrán para las condiciones similares del despacho, sustituyendo en ellas el valor literal S por el D que corresponda.

65. — Intereses del capital circulante. — Toda explotación industrial ejércese con la base de un capital destinado a cubrir las más variadas expensas de las actividades de la producción. Ese

capital, *U*, hace frente a la serie de costos que, siguiendo los enunciados del profesor Schülz Mehrin [1], determinamos así (véase número 16):

a) — Para existencias de materias primas;
b) — » » » » auxiliares (carbón, aceite, estopa, etc., etc.);
c) — para materias, salarios y otros elementos de los productos a adquirirse o elaborados en la propia industria, almacenados temporariamente;
d) — para materias, salarios y otros elementos de los productos que se hallan en elaboración;
e) — para productos almacenados;
f) — » valores diversos en disponibilidad, hasta tanto sirvan al fin de la empresa productora (Dinero en caja; Cambio; Cheques; otros documentos bancarios; Créditos).

El capital *U*, comprometido en estas condiciones, suele tener monto diverso en el decurso de un mismo ejercicio, y tanto para señalarle como para atribuir a las cargas de servicio una suma atendible de intereses, ocurre valerse de los datos de la Contabilidad de cada empresa, que para comodidad y sencillez mayores, suelen resumirse como medias de los montos mensuales.

Con esta base, puede entenderse que tanto el monto de *U* cada año, como asimismo su variación en el transcurso de la actividad industrial a que responde, no constituyen valores precisos, sino más bien valores medios o de estimación, y así las cosas, no aparece indispensable realizar con la cantidad anual, $r\,U$, operaciones matemáticas tendientes a considerar sus variaciones en un plazo determinado.

En la mayoría de los casos, pues, admitimos que establecido un valor medio de *U*, y tomada una tasa de interés, *r*, podrá tenerse por constante el costo anual con el importe $r\,U$. Entonces,

$$\text{Carga anual por intereses del capital circulante} = r\,U. \qquad [66]$$

Cuando se creyese oportuno tomar en cuenta una sucesión de valores, U_1, U_2, etc., para el capital circulante, ejercicio tras ejercicio, se podrá calcular entonces el valor medio, $r\,U$, para el plazo

(1) «Betriebsvergleiche», en Maschinenbau, Berlín, Abril 21 de 1927, 6° tomo, p. 397.

de subsistencia, conforme a los procedimientos que ya conocemos. Aquí también valdrían las fórmulas [49] a [60], sustituyendo en ellas el valor literal S por el rU correspondiente.

66. — Riesgos. — En las consideraciones fundamentales (N° 15) relativas a los valores económicos que intervienen en las selecciones, así como en el cuadro general de « Elementos del costo anual de servicio », hemos establecido el concepto de los riesgos, especificando la naturaleza y clasificación a que hállanse sujetos.

De todos los elementos del costo anual de servicio, son los riesgos el más difícil de expresar con algún viso de exactitud. Desde luego, los *imprevisibles* son aún más variables y circunstanciales que los *previsibles*; mas, a menudo estos últimos no pueden estimarse con propiedad como rubro independiente, razón por la cual úsase entonces, para mayor sencillez, incorporarles en rubros generales con monto bastante arbitrario.

Hemos llamado I al valor literal que se atribuye de ordinario a los riesgos previsibles; con esta designación se incorporarán los riesgos en las expresiones del costo anual de servicio.

Como el acierto de su estimación por año es muy contingente, razones análogas a las formuladas para los intereses del capital circulante llevan a pensar que bastará, muy corrientemente, tomar ese valor como media anual invariable, que asimismo se estima frecuentemente en un porcentaje del capital.

Entonces, tendremos la expresión

$$\text{Carga anual por riesgos} = I \qquad [67]$$

Queda entendido que si motivos especiales llevasen a conocer una variación del importe medio anual de los riesgos, a intervalos anuales o saltuarios, se calcularía el valor medio para todo el plazo de comparación mediante fórmulas análogas a las [49] a [60] o [61] a [65], según corresponda.

(Continuará)

BIBLIOGRAFIA

DE LIBROS RECIBIDOS EN LA ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

Por C. C. D.

Actualités Scientifiques et Industrielles. Folletos ($16 \frac{1}{2} \times 25 \frac{1}{2}$) editados por Hermann & Cía. París. Números de páginas y precios variables. Se detallan los últimos repartidos siguiendo la numeración correlativa.

Nº 511-512. — Gomez (D. M.), *Les Lois Physiques de l'Hémodynamique* (Leur Détermination piézographique). 52 y 32 páginas con diagramas. Precios: 12 y 10 francos. 1937.

Fascículo I y II de la serie « Recherches d'Hémodynamique et Cardiologie » dirigida por el autor, Domingo M. Gómez, laureado de la Academia Francesa de Medicina y adscripto a la « Clinique Nationale des Quinze-Vingts » (cardiología).

Sabido es cuán complejos son los problemas físicos de la circulación de la sangre, complicación que procede del hecho de tratarse de un sistema cerrado, esencialmente deformable y ramificado, que comporta una red capilar en su recorrido y dentro del cual el régimen es intermitente. Fenómenos fisiológicos varios complican aun más su estudio; las leyes de la hidrodinámica son inaplicables. Así lo hace presente el autor en su Prefacio. El sistema piezográfico que pregona tiene la ventaja, a su juicio, de no perturbar, con su intervención, el fenómeno mismo que se desea estudiar.

Después de describir el aparato en siete capítulos desarrolla los resultados obtenidos relativos a diversas leyes de la hemodinámica.

Un segundo fascículo, escrito con la colaboración del profesor Langevin, se titula « La Piezographie Directe et Instantanée, ses applications aux études d'Hémodynamique; controle des Méthodes Mécaniques ».

Los autores se esfuerzan en simplificar, en lo posible, la técnica que permite hacer avaluaciones en el hombre, poniendo a la vista las múltiples aplicaciones posibles de esas nuevas nociones, tanto en el dominio de la fisiología como en el de la patología cardiovascular. Comporta dos capítulos: el primero trata de piezografía directa e instantánea; el otro el contralor físico de los métodos mecánicos.

Nº 513-514. — Nadson (G. A.), *Biologie* (Rayonnement, Facteurs Chimiques et Physiques). Dos folletos respectivamente de 26 páginas, 9 figu-

ras en el texto, 6 láminas fuera; y 36 páginas, 25 figuras, 5 láminas fuera del texto. Precio: 12 francos cada uno. 1937.

El I trata ciertas regularidades de los cambios de la « Materia Viva », bajo la influencia de los factores externos, principalmente de los rayos X y del Radio. El II se ocupa de los cambios de los caracteres hereditarios provocados experimentalmente y la creación de nuevas razas estables, en las levaduras.

El autor es miembro de la Academia de Ciencias de la U. R. S. S. Trae una buena bibliografía.

Al final de su trabajo dice el profesor Nadson que, contrariamente al célebre aforismo de Leibnitz: « Natura non facit saltus », la naturaleza, y particularmente la viviente, avanza por saltos y la aparición de nuevas formas de microorganismos avanza igualmente por crisis y « brincos ». Y eso ocurre, lo mismo en los casos de aparición « espontánea » de formas nuevas que en las influenciadas por factores exteriores diversos.

Puede decirse de una manera general, que las razas obtenidas por vía experimental se parecen mucho a las « espontáneas ». No tenemos motivos para negar la posibilidad de crear por vía experimental, haciendo obrar factores externos, razas verdaderamente nuevas y estables que aún no existen en la naturaleza.

Nº 522-523. — MARINESCO (NÉDA), *Propriètés Piezo-Chimiques, physiques et Biophysiques des Ultra-Sons.* Dos folletos respectivamente de 56 páginas, 19 figuras, 5 láminas fuera del texto, y 68 páginas, 18 figuras y 7 láminas fuera de texto. Precios: 15 y 18 francos. 1937.

El primer folleto se ocupa de la técnica de las ondas elásticas de alta frecuencia; y el otro de la destrucción de los microorganismos; preparación de los coloides a bajas temperaturas; reacciones explosivas y fotoquímicas. El autor es encargado de investigaciones en el Instituto francés de Biología físico-química; empieza tratando los ultrasonidos en general y más particularmente expone sus propias investigaciones. En el primer folleto trata, con características especiales, lo relativo al emisor piezo-eléctrico, las propiedades electromecánicas del cuarzo en célula equivalente; la amplitud en el vacío y en carga, la resistencia de radiación, el rendimiento del emisor, el amortiguamiento de las ondas elásticas, etc. El otro trae un resumen de tres años de investigaciones del autor; cuestiones de biofísica en particular, coloides, reacciones explosivas o fotoquímicas mantenidas por los ultrasonidos.

Nº 515. — DUCLAUX (J.), *Pression Osmotique.* 56 páginas. Precio: 15 francos. 1937.

Constituye el capítulo IV del Tomo II del Tratado de Química-física del profesor Duclaux. Trae interpretaciones cinéticas de la presión osmótica; las demostraciones termodinámicas; el efecto Gouy-Chaperon, y una Bibliografía.

Nº 525. — TINBERGEN (J.), *An Econometric approach to Business Cycle Problems.* 75 páginas, con varios gráficos. Precio: 18 francos. 1937.

Fascículo II de la serie « Impasses Économiques » dirigida por el Ingeniero del cuerpo de minas y Doctor en Derecho Roberto Gibrat. El autor es perito adscripto al « Economic Intelligence Service » de la Secretaría de la Liga de las Naciones. Después de un Prefacio y de una Introducción, se describe el Modelo, los movimientos del Sistema y se tratan los Problemas del ciclo político de los negocios.

Entre otras interesantes consideraciones el autor manifiesta, al final, que los resultados de sus cálculos evidencian, aparte de varios hechos bien conocidos, que, con respecto a los tipos de movimientos que pueden concebirse, existen un número no despreciable de problemas descuidados así como posibilidades aun no encaradas.

LE MYRE (GEORGES), *Le Baccara.* Volumen (12 × 18½) con 206 páginas y algunas figuras en el texto. Precio: 12 francos. Hermann & Cie. París.

La casa editora ha hecho una nueva distribución de este textito que contiene un estudio sobre el conocido juego del « baccará ».

LEVI (BEPPO), *Analisi Matematica y Algebrica ed Infinitesimale.* Tomo de VII + 541 páginas (15 × 23,5). Nicola Zanichelli, editor. Precio: 85 liras. Bologna, 1937.

Contiene este tomo, en sus líneas fundamentales, el curso bienal dado por el autor, Dr. en Matemáticas de Turín, profesor de Teoría de las Funciones en la Facultad de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales de la « Università degli Studi » de Bologna, socio correspondiente de la « Accademia Nazionale dei Lincei ». Naturalmente, el autor ha agregado complementos que, por falta de tiempo, no pueden exponerse en los cursos orales.

Como lo explica en la portada de su libro, éste tiende, por un lado, a tener un carácter cultural y formativo, por otro, a una índole práctica. Fuera de otras consideraciones, retengamos esta: que el libro, en razón de cierta generalidad de vistas y de la variedad de los temas encarados en un espacio relativamente reducido, será útil a los estudiantes, aún después de haber terminado ellos sus estudios. El libro expone el tema en XVI capítulos que tratan sucesivamente: los polinomios y funciones racionales enteras; complejos, determinantes, sistemas de ecuaciones lineales; multiplicación de complejos, vectores, cuaterniones; números complejos; continuidad; particularidades relativas al dominio real; serie de potencias; derivadas; derivadas en el campo real, consecuencias; algunas proposiciones sobre las ecuaciones algebraicas en el campo complejo; integrales encaradas como funciones primitivas y definiciones directa de las integrales; integral de Riemann; aplicaciones analíticas y al cálculo numérico; ecuaciones diferenciales ordinarias; funciones de más de una variable; aplicaciones geométricas. Al final trae el libro tres notas: una sobre la notación dife-

rencial, otra sobre la noción de integral y la última sobre sistemas de ecuaciones. Un índice alfabético y otro de nombres terminan el texto.

El autor trae una breve indicación histórica de cada matemático que va citando, y muchas otras aclaraciones y consideraciones y críticas sobre las cuestiones que viene tratando, buscando librarse de principios discutibles. Constituye un buen texto para el que quiere aprender la materia con eficacia y pisando terreno firme.

WEGENER (ALFRED), *La Genèse des Continents et des Océans* (13 × 21), VIII + 236 páginas, con 63 figuras. Librería Nizet & Bastard. Precio: 35 francos. París, 1937.

Se trata de una nueva versión francesa de la obra alemana de Wegener (5ª y última edición) hecha por Armando Lerner.

Trae una teoría de las translaciones continentales.

Los geólogos admiten que la parte visible de la corteza terrestre está constituída especialmente por rocas livianas y àcidas (sial) debajo de las cuales existe una capa de mayor densidad (sima), siendo el núcleo (nife) aun más denso.

Alfredo Wegener supone que las masas de sial, primitivamente unidas, no lo están actualmente, y constituyen masas continentales que flotan sobre el sima, el cual se encuentra en la constitución de los fondos oceánicos. Estos continentes, bajo la acción de ciertas fuerzas, efectúan movimientos desde los polos hacia el ecuador por un lado; y de este hacia el oeste por otro.

Este trabajo expone, en su conjunto, la teoría en cuestión, discutiendo detalladamente todos los trabajos más recientes publicados al respecto. Puede ser leído por los no especialistas interesados en el enigma de la Tierra y para ellos constituye un buen complemento de los conocimientos clásicos que todo hombre culto debe poseer.

SOCIOS ACTIVOS

Aguilar, Félix
Albizzati, Carlos M.
Alvarez, Raúl J.
Alvarez de Toledo, Belisario
Allende Lezama, Luciano P.
Anastasi, Camilo
Anchorena, Juan E.
André, Enrique de
Andrioletti, Juan Luis
Añón Suárez, Vicente
Aparicio, Francisco de
Aráoz Alfaro, Gregorio
Arbecchi, Armando C.
Arce, Manuel J.
Arditi Thompson, H.
Armani, Aquiles
Arnaudo, Silvio J.
Avila Méndez, Delfín
Aztiria, Ignacio
Bado, Atilio A.
Bachmann, Enesto
Baglietto, Eduardo E.
Balbiani, Atilio
Bancalari, Agustín
Barabino Amadeo, S.
Barbieri, Antonio
Bargna, Juan L.
Barilari, Mariano J.
Barral Souto, José
Barrancos, Leónidas A.
Becke, Alejandro von der
Berrino, Juan B.
Bertino, José Carlos
Besio Moreno, Nicolás
Bianchi Lischetti, A.
Biggeri, Carlos
Blaquier, Juan
Boaglio, Santiago
Bolognini, Héctor
Bonanni, Cayetano A.
Bontempi, Luis
Bordenave, Pablo E.
Borruat, Luis
Borzi, Ana María
Bosch, Gonzalo
Bosisio, Anecto J.
Bottaro, Juan C.
Bozzini, Luis (h.)
Briano, Juan A.
Bunge, Juan C.
Buontempo, Guillermo
Butty, Enrique
Buzzo, Alfredo
Buzzo, Eduardo B.
Caillet Bois, Teodoro
Calandra, Raúl E.
Camus, Nicolás
Canale, Humberto
Carabelli, Juan José
Carbia, Rómulo D.
Carbone, Esteban
Carbonell, José J.
Cárcova, Enrique de la
Carelli, Antonio
Carelli, Humberto H.
Caride Massini, Pedro
Carman, Ernesto
Carrea, Juan Ubaldo
Casacuberta, Antonio
Castellanos, Alberto
Castello, Manuel F.
Castiñeiras, Julio R.
Celasco, Juan L.
Cock, Guillermo E.
Coni Bazán, F. A.
Curti, Orlando P.
Curutchet, Luis
Chanourdie, Enrique
Chizzini Melo, Aníbal F.
D'Ascoli, Lucio
Dassen, Claro C.
Dasso, Héctor
Dasso, Ricardo L.
De Cesare, Elías A.
De Fina, Armando L.
De la Ini, Juan E.
Dellepiane, Luis J.
Deulofeu, Venancio
Díaz, Emilio C.
Dieulefait, Carlos E.
Doello-Jurado, Martín
Dobranich, Jorge W.
Domínguez, Juan A.
Dubecq, Raúl E.
Dueñas, José
Duhau, Luis
Dupont, Enrique
Durañona y Vedia, A.
Durrieu, Mauricio
Edelberg, Benjamín
Escudero, Antonio
Escudero, Pedro
Faré, Santo S.
Fernández, Alberto J.
Fernández Díaz, A.
Fernández Long, S.
Figini, Angel
Figuerero, Hernando W.
Fischer, Gustavo Juan
Flores, Emilio M.
Floriani, Luis
Florit, Carlos J.
Forn, Carlos J.
Fossa Mancini, E.
Franceschi, Alfredo
Fürnkorn, Divico A.
Gadda, Carlos Manuel
Galmarini, Alfredo G.
Gandolfi Herrero, Augusto
Gandolfo, José S.
Gascón, Alberto
Gaspar, Fernando L.
Géneau, Carlos E.
Gerardi, Donato
Ghigliazza, Sebastián
Giagnoni, Bartolomé E.
Giannone, José
Gradín, Carlos
Grieben, Arturo
Gutiérrez, Ricardo J.
Haussler, Emilio
Herbin, Luis A.
Hermitte, Enrique
Herrera Vegas, M.
Herzer, Bernardo
Hickethier, Carlos F.
Hofmann, Herbert
Hortal, José Angel
Houssay, Bernardo A.
Hoyo, Arturo
Igartúa, Luis María
Irigoyen, Luis H.
Isetta, José
Ivanissevich, Ludovico
Jorge, José M.
Jakob, Cristofredo
King, Diarmid O.
Kinkelin Pelletán, J. C. de
Kraglievich, Nicolás T.
Krapf, Eduardo
Labarthe, Julio
Lagunas, Simón
La Menza, Francisco
Laporte, Luis B.
Larco, Esteban
Lasso, Alfredo L.
Latzina, Eduardo
Ligniéres, Roberto
Lizer y Trelles, C. A.
Lombardi, Alberto
Loyarte, Ramón G.
Lugones, Arturo M.
Llauró, José
Mac Donagh, E. J.
Magnin, Félix J.
Magnin, Jorge
Mainini, Carlos
Mallol, Emilio
Mamberto, Benito
Marcó del Pont, E.
Marchionatto, Juan B.
Maresca, Antonio J.
Marini, Tomás L.
Martignone, Eduardo
Marotta, F. Pedro
Marotta, R. Armando
Mata, Leopoldo
Méndez, Julio
Meoli, Gabriel
Meoli, Humberto
Mercau, Agustín
Mermoz, Francisco A.
Molfino, José F.
Molina Carranza, L.
Molle, Clotilde C.
Montes, Vicente E.
Moreno, Evaristo V.
Nágera, Juan José
Natale, Alfredo
Natale, Ernesto
Negrete, Lucía
Negri, Mario L.
Nelson, Ernesto
Nielsen, Juan
Oliveri, Alfredo E.
Ortega Belgrano, Raúl
Ortiz, Aníbal A.
Ortiz de Rosas, Jorge
Otamendi, Gustavo
Ottonello, Héctor
Páez, José María
Page, Franklin Nelson
Paitoví y Oliveras, A.
Paquet, Carlos
Parodi, Edmundo
Parodi, Lorenzo R.
Pasman, Raúl G.
Pasman, Rodolfo E.
Pastore, Franco
Paz Anchorena, José M.
Pérez Hernández, A.
Perrone, Cayetano
Pestalardo, Agustín
Pini, Aldo S.
Platz, Hubert
Podestá, Juan Carlos
Polti, Modesto
Posadas, Carlos
Quinos, José Luis
Quinterno, Bruno F.
Quiroga, Pedro R.
Raimondi, Alejandro
Raffo, Bartolomé M.
Ramaccioni, Danilo
Ramallo, Carlos M.
Ratto, Héctor R.
Rebuelto, Antonio
Rebuelto, Emilio
Reece, William Asher
Repetto, Blas Angel
Repossini, José
Ringuelet, Emilio J.
Rissotto, Atilio A.
Rivarola, Rodolfo
Robles, Angel A.
Rodríguez Aravena, S.
Rodríguez, Germinal
Roffo, Angel H.
Roffo, Juan
Roldán, Raimundo
Romero Brest, Enrique
Rokotnitz, Otto
Rospide, Juan
Rossell Soler, Pedro
Ruata, Luis E.
Ruiz Moreno, Isidoro
Ruiz Moreno, Adrián

Rumi, Tomás J.
Sabaria, Enrique
Sagastume Berra, A. E.
Salomón, Hugo
Sánchez, José Ricardo
Sánchez, Gregorio L.
Sánchez Díaz, Abel
Sánchez Sorondo, M. G.
Sanromán, Iberio
Santángelo, Rodolfo
Sarhy, Juan F.
Sarrabayrouse, Eugenio
Savon, Marcos A.
Schnack, Benno J.
Schmidt, Max
Schulz, Guillermo
Selva, Domingo
Sesma, Angel
Sheahan, Juan F.
Silva, Leónidas L.
Simons, Hellmut
Siri, Luis
Sobral, Arturo
Solari, Emilio F.
Solari, Miguel A.
Soler, Frank L.
Sordelli, Alfredo
Spinetto, David J.
Spota, Víctor J.
Storni, Segundo R.
Suárez, Angel
Taiana, Alberto F.
Taiana, Jorge
Tarragona, José
Tedeschi, Virgilio
Tello, Eugenio
Torre Bertucci, Pedro
Torello, Pablo
Tossini, Luis
Trelles, Rogelio A.
Trucco, Sixto E.
Valeiras, Antonio
Valentini, Argentino
Valentinuzzi, Máximo
Vallebella, Colón B.
Vanossi, Reinaldo
Varela, Rufino
Vecchi. Arístides de
Vela Huergo, Julio
Veyga, Francisco de
Vidal, Eduardo
Villalobos D., C.
Vignaux, Juan C.
Vinardell, Alberto
Volpatti, Eduardo
Wainer, Jacobo
White, Guillermo J.
Wauters, Carlos
Wysztelewski, W. de
Zamboni, Agustín
Zappi, Enrique V.
Zavalla, Carlos M.
Zuloaga, Angel M.

SOCIOS ADHERENTES

Bazzanella, José
Devoto, Carlos Alberto
Ferramola, Raúl
Folcini, Martín L. G.
García, Eduardo D.
Glücksmann, Carlos E.
Goyena, Ricardo J.
Magne de la Croix, P. A.
Milesi, Emilio Angel
Quevedo Capdevila, Eduardo A.
Recoder, Roberto F.
Repetto, Cayetano
Rusconi, Carlos
Somonte, Eduardo
Wechsler, Wolf

CASAS ADHERENTES

Angel Estrada y Cía.
Lutz, Ferrando y Cía.
Hijos de Atilio Massone
Otto Hess, S. A.
Est. Gráf. "Tomás Palumbo"
Jacobo Peuser, S. A. Ltda.

SOCIO VITALICIO

Huergo, Eduardo María

MIEMBROS PROTECTORES DE LA ORGANIZACION DIDACTICA DE BUENOS AIRES

Anchorena, Juan E.
Besio Moreno, Nicolás
Tornquist, E. y Cía. (Lda.)

SECCION CORDOBA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Ing. Pedro N. Gordillo; Vice-presidente, Dr. Miguel Fernández; Vice-presidente, Ing. Daniel A. García; Secretarios, Dr. Guillermo V. Stuckert; Prof. Tulio Mácola; Tesoreros, Dr. Juan Olsacher; Dr. Carlos C. Hosseus; Vocales, Ing. Clodoveo Pascualini; Dr. Agustín E. Larrauri; Dra. J. Gambastiani de Peláez; Arq. Salvador Godoy; Ing. Jorge E. Bobone; Dr. Federico Padula; Ing. Luis Chechi; Dr. Edwin Rothlin.

SOCIOS ACTIVOS

Achával, Luis
Aguiar, Henoch D.
Amaya, Arturo A.
Arrambide, Miguel
Bobone, Jorge E.
Bodenbender, G.
Bonet, Rafael
Borzacow, Wladimir
Brandan, Ramón A.
Broglia, Alberto A.
Buteler, Jesús E.
Camilloni, Carlos
Carlomagno, José
Chaudet, Enrique
Checchi, Luis
Deheza, Eduardo
Del Viso, Jacinto
De Tezanos Pinto, J.
Devoto, Heraclio A.
Espinosa, Manual
Esteban, Fernando
Fernández, Miguel
Fitz Simon, Sgo. E.
Fontana, Lorenzo P.
Fuchs, Guillermo J.
García, Daniel
Gavier, Daniel E.
Giménez de Azúa, F.
Godoy, Salvador A.
Gómez, Calixto A.
Gordillo, Pedro N.
Granillo Barros, M.
Hosseus, Carlos Curt
Jagsich, Juan
Kronfus, Juan
Lofayette Zimmer, M.
Larrauri, Agustín C.
Lutzow Holm, Olaf.
Mácola, Berardo A.
Mácola, Tulio

Mirizzi, Pablo Luis
Ninci, Carlos A.
Ninci, Raúl T.
Novillo Corvalán, S.
Olsacher, Juan
Padula, Federico
Pasqualini, Clodoveo
Peláez, J. Gambastiani de
Pilotto, Bernardo
Ponce Laforgue, C.
Roggeri, Domingo
Rothlin, Edwin
Sayago, Gumersindo
Schmiedecke, Augusto
Sigal, Moisés
Sparn, Enrique
Stuckert, Guillermo V.
Taravella, Ambrosio L.
Tarragó, Emeterio
Torres, Valeriano
Trebino, Natalio
Vercello, Carlos
Yadarola, Mauricio L.

SECCION SANTA FE

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Gustavo A. Fester; Vice-presidente, Dr. José Piazza; Secretario de correspondencia, Ing. Quím. Francisco A. Bertuzzi; Secretario de actas, Ing. Quím. José Cruellas; Tesorero, Ing. Quím. Enrique Virasoro; Vocal 1º, Ing. José Babini; Vocal 2º, Prof. Rolando Hereñú; Vocal suplente 1º, Prof. Julio Salaber; Vocal suplente 2º, Ing. Quím. Guillermo Berraz; Encargado de Biblioteca y Canje, Ing. Quím. Rodolfo Rouzaut; Encargado de Publicaciones, Ing. José Babini.

SOCIOS ACTIVOS

Anadón, Leónidas
Ariotti, Juan Carlos
Babini, José
Benet, Pedro José
Berraz, Guillermo
Bertuzzi, Francisco A.
Bonazzola, César J.
Borruat, Luis (hijo)
Borzone, Rodolfo
Bossi, Celestino
Caballero, Martín A.
Camo, José María
Cerana, Miguel
Claus, Guillermo
Courault, Pablo
Crouzeilles, A. L. de
Cruellas, José
Christen, Carlos
Christen, Rodolfo G.
Damianovich, Horacio
Falco, Federico
Fester, Gustavo A.
Frenguelli, Joaquín
Gollán, Josué (h.).
Gschwind, Eduardo P.
Guinle, Hugo José
Hereñú, Rolando
Hotschewer, Curto
Juliá Tolrá, Antonio
Kleer, Gregorio
Mai, Carlos
Mántaras, Fernando
Marelli, Hipólito
Martino, Antonio E.
Montpellier, Luis Marcos
Mounier, Celestino
Muzzio, Enrique
Nigro, Angel
Niklison, Carlos A.
Oliva, José
Peresutti, Luis
Piazza, José
Piñero, Rodolfo
Pozzo, Hiram J.
Ragonese, Arturo E.
Reinares, Sergio
Rouzaut, Rodolfo
Salaber, Julio
Salgado, José
Santini, Bruno L. P.
Schivazappa, Mario
Simonutti, Atilio A.
Tissembaum, Mariano
Urondo, Francisco E.
Virasoro, Enrique

SECCION MENDOZA

COMISION DIRECTIVA

Presidente honorario, Ing. José S. Corti; Presidente, Dr. Juan B. Lara; Vice-presidente, Ing. Agr. José Raúl Ponce; Secretario, Ing. Agr. Julio Tolosa (h); Tesorero, Ing. Cayetano C. Piccione; Bibliotecario, Sr. Adrián Ruiz Leal; Vocales: Dr. Eduardo Carette; Dr. Mario Bidone; Ing. Alfredo Rosenthal; Sr. Manuel Tellechea; Ing. Agr. Rafael E. Pontis.

SOCIOS ACTIVOS

Alurralde, Juan Carlos
Anzorena, Jacinto
Ayala Castagnino, G.
Basso, Germinal
Benegas, Raúl
Bidone, Mario
Borsani, Carlos Pablo
Burgoa, Pedro A.
Carette, Eduardo
Croce, Francisco M.
Espinosa, Norberto A.
Flor Alvarado, José M.
Gabrielli, Francisco J.
Galeano, Edgardo
García, José Federico
Godoy Vergelin, G.
Gomensoro, José N.
Granzella, Sinibaldo
Guiard, Ricardo
Jofré, Alberto L.
Lara, Juan B.
Lucero, Braulio G.
Lugones, Manuel G.
Magistretti, Guillermo
Maneschi, Ernesto
Maroso, José Angel
Maveroff, Aquiles
Mayorga, Santiago C.
Miyara, Salomón
Paganotto, Juan P.
Pelaia, Dante
Piccione, Cayetano C.
Ponce, José Raúl
Pontis, Rafael E.
Rosales, Ranulfo S.
Rosenthal, Alfredo
Ruiz, Aníbal
Ruiz Leal, Adrián
Silvestre, Tomás
Stura, Angel C.
Tellechea, Manuel
Tolosa, Julio (h)
Toso, Juan P.
Villanueva, Miguel Angel

SECCION LA PLATA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Carlos A. Sagastume; Secretario, Ing. Adolfo P. Grissi; Tesorero, Dr. Carlos Teobaldo; Vocales: Dr. Hilario Magliano, Dra. Juana Cortelezzi; Ing. Juan Sabato; Dr. Federico E. Christmann.

SOCIOS ACTIVOS

Alsina Fuertes, Fidel
Angli, Jerónimo
Arroyo Basaldúa, Víctor M.
Bonet, Luis A.
Cortelezzi, Juana
Crespi Gherzi, Rodolfo A.
Christmann, Federico E.
Daló, Héctor R.
Ferrari, Obdulio J. F.
Gascón, Jorge
Gershánik, Simón
Giovambattista, Humberto
Grisi, Adolfo P.
Magliano, Hilario
Méndez, José D.
Micheletti, Luis A.
Nico, Raúl
Oliva, Virgilio
Paternosto, Pedro G.
Platzceck, Ricardo P.
Sabato, Ernesto R.
Sabato, Juan
Sáez, Francisco A.
Sagastume, Carlos A
Teobaldo, Carlos
Toranzos, Fausto I
Trejo, César A.
Vucetich, Danilo G.
Wilkens, Alejandro

SOCIOS CORRESPONDIENTES

Aguilar y Santillán, R. .... México
Amaral, Afranio de .... San Pablo (Br.)
Avendaño, Leónidas .... Lima
Alvarez, Antenor .... Sgo. del Estero
Bonarelli, Guido .... Gubbio (It.)
Borel, Emile .... París
Bachmann, Carlos J. .... Lima
Bragg, William Henry .... Londres
Bolívar, Ignacio .... Madrid
Bruch, Carlos .... Olivos (B. A.)
Cabrera, Blás .... Madrid
Campos Porto, Pablo .... Río de Janeiro
Carabajal, Melitón M. .... Lima
Corti, José S. .... Mendoza
Darmois Georges .... París
Dávila, Rubén .... Santiago (Ch.)
Dabbene, Roberto .... La Plata
Escomel, Edmundo .... Arequipa (P.)
Fiebrig, Carlos .... Munich (Al.)
Fontecilla Larrain, Arturo ... Santiago (Ch.)
Fort, Michel .... Lima
González del Riego, Felipe .. Lima
Greve, Germán .... Santiago (Ch.)
Guinier, Philibert .... Nancy (Fr.)
Hadamard, Jacques .... París
Hauman, Luciano .... Bruselas
Hernández, Juvenal .... Santiago (Ch.)
Hijar y Haro, Luis .... México
Janet, Pierre .... París
Jiménez de Asúa, Luis .... Madrid
Kinart, Fernando .... Amberes
Lahille, Fernando .... Tarn (Fr.)
Langevin, Paul .... París
Levi Civita, Tulio .... Roma
Lobo, Bruno .... Río de Janeiro
Mardones, Francisco .... Santiago (Ch.)
Molina, Enrique .... Concepc. (Ch.)
Monjarás, Jesús E. .... México
Moretti, Gaetano .... Milán
Oliver Schneider, Carlos ... Santiago (Ch.)
Pereira d'Andrade, Lençastre Nova Goa (I. P.)
Perrin, Tomás G. .... México
Porter, Carlos E. .... Santiago (Ch.)
Pi y Suñer, Augusto .... Barcelona
Reyes Cox, Eduardo .... Santiago (Ch.)
Rospigliosi y Vigil, Carlos .. Lima
Rowe, Leo S. .... New York
Shepperd, William R. .... Wáshington
Tello, Julio C. .... Lima
Villarán, Manuel V. .... Lima
Vélez, Daniel M. .... México
Valle, Rafael H. .... México
Vitoria, Eduardo .... Barcelona
Volterra, Vito .... Roma

ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

ADOPTADOS PARA SUS PUBLICACIONES POR LA

ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

DIRECTOR: EMILIO REBUELTO

MAYO 1938. — ENTREGA V. — TOMO CXXV

SUMARIO

BUENOS AIRES

CALLE SANTA FÉ 1145

1938

ADVERTENCIA. — Los colaboradores de los Anales son personalmente responsables de la tesis sustentada en sus escritos. Tienen derecho a la corrección de dos pruebas. Los que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos, deben solicitarla por escrito. Los manuscritos, correspondencia, etc., se enviarán a la sede social, **Santa Fe 1145.**

Impreso en los Talleres Gráficos "TOMAS PALUMBO" - La Madrid 321-325 - Buenos Aires

LOS SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES Y SUS APLICACIONES AL ESTUDIO DE LOS CUERPOS CONVEXOS

POR

FRANCISCO LA MENZA

*(Continuación *)*

CAPITULO III

§ 9. - CADENAS REGULARES Y CADENAS SINGULARES

30. **Permanencias singulares de una matriz.**.— En el § precedente hemos definido el concepto de permanencia de una matriz y hemos hecho notar, (22, Obs.), su significado geométrico. Ahora ampliaremos dicho concepto y veremos que también corresponde a una propiedad geométrica análoga.

Diremos que $h + \nu$ filas de la matriz de un sistema $S_h(m, n)$, compatible de característica $h > 0$, forman una *permanencia singular* de ella, cuando el sistema parcial, $S'_h\,(h + \nu, n)$, de $S_h\,(m, n)$, relativo a las $h + \nu$ filas dadas, tiene la misma característica h y es totalmente singular.

El número h se llama *orden* de la permanencia singular, y el número ν, su *grado de singularidad*. En particular, cuando es $h + \nu = m$, la permanencia se llama *totalmente singular*.

Puesto que el sistema parcial, $S'_h\,(h + \nu, n)$ es, (1, IV), también compatible; por ser, además, totalmente singular de característica $h > 0$, resulta inmediatamente, de (7, III):

I) *Si $h + \nu$ filas de una matriz de característica $h > 0$, constituyen una permanencia singular, todos los determinantes de orden $h + 1$, formados con dichas filas, son nulos.*

En una permanencia singular de orden $h > 0$ y grado $\nu > 0$ de singularidad, hay, por lo tanto, $\binom{h+\nu}{h+1}$ determinantes nulos de orden $h + 1$.

(*) Ver *Anales S. C. A.*, Octubre 1937, Entrega IV, Tomo CXXIV.

De (4, VIII) y de (7) se concluye inmediatamente que:

II) *La condición necesaria y suficiente para que* $h + \nu$ *filas de una matriz de un* S_h (m, n) *compatible de característica* $h > 0$ *formen una permanencia singular, es que entre los determinnates principales del sistema exista, por lo menos uno,* δ, *constituído por* h *filas de las* $h + \nu$ *dadas.*

El correspondiente resolvente, R_h (δ), es (4, VI), también principal. Los orlados de δ con cada una de las ν filas restantes de las dadas, son (I), todos nulos. R_h (δ) tiene, por lo tanto, (7), ν determinantes orlados nulos y $m - h - \nu$ orlados no nulos, los cuales tienen, (4, V), el mismo signo que δ. Como, (4, V), el signo de δ, determina el signo de todos los demás determinantes principales del sistema parcial formado por las inecuaciones relativas a las $h + \nu$ filas de la permanencia singular dada, dicho signo de δ, se dirá también, *signo* de la permanencia.

Cada uno de los orlados nulos se dice que constituye una *singularidad* de la permanencia dada con respecto al determinante δ, considerado. Como el número ν, de singularidades, es (7), siempre el mismo, cualquiera que sea el determinante principal δ, formado con h filas de las $h + \nu$ dadas, este número ν, se llama *grado* de la permanencia singular.

En particular, para $\nu = 0$, el resultante R_h (δ) carece de orlados nulos, es (7), regular, por lo tanto, las h filas de δ, forman, (21, I, II), también una permanencia, que llamaremos *regular* y que coincide con las definidas en (21). En lo sucesivo, cuando hablemos de una *permanencia*, sin ninguna especificación, nos referiremos indistintamente a una permanencia regular o singular.

Como, (18), un sistema irreducible de característica $h < 3$, es un sistema regular, todos sus resolventes principales, (7), son también regulares; por consiguiente, (II):

III) *Las matrices de sistemas compatibles e irreducibles de característica* $h < 3$, *carecen de permanencias singulares.*

En virtud de la definición y de (II), una permanencia singular de orden h con ν singularidades, está dada cuando se dan las filas que forman todos los determinantes principales de orden h, del correspondiente sistema parcial, totalmente singular, que ella determina.

Una permanencia singular de orden h, con ν singularidades, será designada con la notación P_h $[\nu]$; una permanencia regular de igual orden h, y determinante, δ, con P_h (δ). En lo sucesivo, la notación P_h designará una permanencia de orden h, que puede ser regular o singular.

Obs.: El caso de una permanencia singular con ν singularidades y de orden $h > 2$, (III), corresponde geométricamente al caso de un *vértice* de la figura poliédrica convexa h-dimensional, definida, (8), por todo sistema compatible cuya matriz admita la dada permanencia, en un espacio puntual euclídeo de h dimensiones. En dicho vértice concurren, precisamente, los $h + \nu$ hiperplanos, (10), relativos a las $h + \nu$ filas de la permanencia, por ser totalmente singular el sistema parcial formado con las $h + \nu$, correspoudientes inecuaciones.

Ejemplo 1:

En la figura del *ejemplo 3*, (20), las filas 1, 2, 3, 4, 5 de la correspondiente matriz, forman una permanencia singular de cuarto orden con una sola singularidad. Sus determinantes principales de cuarto orden son, en este caso, todos los formados por dichas filas:
(1234); (1235); (1245); (1345); (2345). Estos se determinan de acuerdo con las condiciones (16, II, III).

Sea, ahora, $P_h [\nu]$, una permanencia singular de orden h con ν singularidades de una matriz. Consideremos la matriz parcial de ella, formada por las $h + \nu$ filas de $P_h [\nu]$. Es también, por definición, una matriz de característica h. El correspondiente sistema parcial, $S'_h (h + \nu, n)$, es totalmente singular y también (1, IV), compatible. A cada sección completa de éste, corresponde, (25, II), una cadena cerrada de clase $h + \nu$ y orden $h - 1 > 1$, por ser, (III), $h > 2$. Las permanencias, (24), de esta cadena, que son todas regulares, se llamarán *permanencias componentes*, o, simplemente, *componentes*, de la permanencia singular, $P_h [\nu]$, dada.

Dado que, (26, II), también el conjunto de permanencias componentes de una permanencia regular de orden $h > 1$ constituye una cadena elemental de orden $h - 1$ que es también cerrada, resulta:

IV) *El conjunto de permanencias componentes de una permanencia regular o singular de orden* $h > 1$, *constituye una cadena cerrada de orden* $h - 1$.

Es claro que para el caso de $h = 1$, permanencias unitarias, las componentes son permanencias nulas, (23), y, por lo tanto, cadenas para las cuales, (25), no tiene sentido el calificativo de cerradas. Pero este caso no interesa, porque todas las permanencias unitarias son, (III), regulares.

En consecuencia, una permanencia singular, $P_h [\nu]$, también está determinada cuando se da la cadena cerrada que forman sus com-

ponentes. Las filas de sus correspondientes determinantes principales quedan determinadas por las condiciones (16, II, III). Para obtenerlas todas bastará formar las $\binom{h+\nu}{h}$ combinaciones de orden h con las $h+\nu$ filas de la dada permanencia singular, $P_h[\nu]$ y considerar, en estos grupos, todos aquéllos que tienen no menos de dos grupos de $h-1$ filas coincidentes con las permanencias componentes de $P_h[\nu]$. Estos grupos de orden h, y sólo éstos, forman determinantes principales de la permanencia singular considerada.

Ejemplo 2:

Las componentes de la permanencia singular del ejemplo precedente, forman la cadena cerrada:

$$C_3 = \{124\}\{125\}\{134\}\{135\}\{234\}\{235\}.$$

Sus determinantes principales han sido obtenidos en el *ejemplo 1* con el procedimiento indicado.

Ejemplo 3:

Sea $P_4[2]$ la permanencia singular de cuarto orden con dos singularidades, cuya cadena de componentes es:

$$C_3 = \{123\}\{124\}\{135\}\{145\}\{236\}\{245\}\{256\}\{356\}.$$

De los quince grupos de cuatro filas que se pueden formar con sus seis filas, sólo constituyen determinantes principales de $P_4[2]$ los siguientes:
1234; 1235; 1236; 1245; 1256; 1345; 1356; 1456; 2356; 2456; los otros nó, como se reconoce fácilmente aplicando la regla dada más arriba.

Cuando sea necesario poner en evidencia las filas que forman una permanencia singular, la designaremos encerrando en un corchete la cadena cerrada constituída por sus componentes. Así:

$$[\{124\}\{125\}\{134\}\{135\}\{234\}\{235\}]$$

designará la permanencia singular del *ejemplo 2*.

Finalmente, en virtud de (18, V, VI) y de (21, III),

V) *La condición necesaria y suficiente para que $h+\nu$ filas de la matriz de un sistema compatible e irreducible, de característica $h>2$, definan una permanencia singular de orden h con ν singularidades, es que las $h+\nu$ filas formen una cadena cerrada de orden $h-1$ y de clase $h+\nu$.*

31. **Permanencias regulares y singulares conjugadas.** — Se extiende fácilmente a las permanencias singulares, también el concepto de permanencias conjugadas (22). Para ello, observemos primeramente que la propiedad que caracteriza a dos permanencias regulares conjugadas, con respecto a sus componentes, es que:

I) *El conjunto de permanencias componentes, no comunes, de dos permanencias regulares de orden* $h > 1$, *constituye una cadena cerrada de orden* $h - 1$ *y de clase* $h + 1$, como resulta inmediatamente de (22) y de la agregación de cadenas, (27).

Recíprocamente,

II) *Si dos cadenas elementales de orden* $h - 1 > 0$, *tienen una permanencia común, sus filas constituyen sendas permanencias regulares conjugadas de orden* $h > 1$ *de una misma matriz,* como se deduce inmediatamente de (22).

Esta es también la propiedad que nos permitirá definir dos permanencias singulares conjugadas de modo que este concepto corresponda, a su vez, a una análoga propiedad geométrica, como en el caso de las regulares, (22, Obs.).

Para ello probaremos antes que:

III) *Si dos permanencias cualesquiera, de orden* $h > 1$, *de una misma matriz, tienen una sola componente común, todas las otras componentes no comunes, forman una cadena cerrada de orden* $h - 1$ *de dicha matriz.*

Sean (30, IV), C^1_{h-1} y C^2_{h-1} las correspondientes cadenas componentes cerradas y P_{h-1} la componente común. Para probar que el conjunto de las no comunes también forma una cadena cerrada de orden $h - 1$, bastará, (25), demostrar que, en dicho conjunto, con cada permanencia, figuran todas sus conjugadas. Por ser $h > 1$, es $h - 1 > 0$. Para $h = 2$, se trata, (30, III), de permanencias regulares, el teorema está demostrado en (I). Para $h > 2$, siendo $h - 1 > 1$, las cadenas dadas, son, por lo menos, de segundo orden. Cada permanencia de C^1_{h-1}, tiene todas sus conjugadas en C^1_{h-1}, y si ninguna de ellas es la P_{h-1}, figurarán también en el conjunto considerado. Si, en cambio, una de ellas es la P_{h-1}, como ésta tiene también todas sus conjugadas en C^2_{h-1}, entre todas, hay una que es conjugada de la dada. Del mismo modo se razona con las de C^2_{h-1}.

Recíprocamente,

IV) *Si dos cadenas cerradas,* C^1_{h-1} *y* C^2_{h-1}, *de orden* $h - 1 > 0$, *tienen una sola permanencia común, y las no comunes forman, a su vez, una cadena cerrada* C_{h-1}, *de orden* $h - 1$, *dichas cadenas son las componentes de sendas permanencias de orden* h, *de una misma matriz de característica* h.

Consideremos, (24, III), uno de los sistemas, $S_{h-1}(m, n)$ regulares finitos, correspondientes a la cadena C_{h-1}, y sea $M_{h-1}(m, n)$ su matriz. Si la cadena C_{h-1} es, (26), elemental, entonces $m = h$, y, en tal caso, C^1_{h-1} y C^2_{h-1}, son componentes de cadenas regulares; el teorema está demostrado en (II). Sea ahora, $h < m$; es posible, razonando en forma análoga que en (18, VI), agregar a la matriz $M_{h-1}(m, n)$, una nueva columna, de manera que se obtenga una matriz, $M_h(m, n)$ de característica h y de modo que ésta admita dos permanencias P^1_h y P^2_h cuyas componentes sean, respectivamente, C^1_{h-1} y C^2_{h-1}; bastará, para ello, elegir los elementos de la nueva columna de manera que los determinantes de orden h, formados por $h - 1$ filas de cada permanencia de C^1_{h-1} y de C^2_{h-1}, tengan signos convenientes. En cuanto a los respectivos orlados de orden $h + 1$, también podrán ser elegidos de modo que P^1_h y P^2_h, resulten con las correspondientes singularidades. Será suficiente (30, II), anular todos los formados por $h + 1$ filas de P^1_h y los formados por $h + 1$ filas de P^2_h, si ambas tienen más de h filas. Para todo ello basta referirse, como en (18, VI), a los resolventes del sistema $S_h(m, n)$, cuya matriz es $M_h(m, n)$. En definitiva, el sistema $S_{h-1}(m, n)$, resultará ser, así, una sección regular finita de $S_h(m, n)$, con una nueva inecuación convenientemente agregada al sistema, como en (18).

Diremos que dos permanencias cualesquiera (regulares o singulares) de una misma matriz y del mismo orden h, son *conjugadas*, cuando tienen una componente común y el conjunto de las componentes no comunes, forma una cadena cerrada, que es, (30), de orden $h - 1$. En particular, esta definición coincide, (I, II), con el caso de dos permanencias regulares.

Obs.: Es claro que el significado geométrico de dos permanencias singulares conjugadas, es el mismo que el de dos permanencias regulares (22, Obs.), como se reconoce inmediatamente de su definición y de (30, Obs.).

32. **Cadenas regulares y cadenas singulares.** — También generalizaremos el concepto de cadena de permanencias al caso de matrices con permanencias cualesquiera, es decir, regulares y singulares.

Diremos que un conjunto de permanencias (regulares o singulares) de una matriz, constituye una *cadena de permanencias* de la matriz, cuando toda permanencia del conjunto tiene una conjugada en él. La cadena se llama *regular*, cuando todas sus permanencias son regulares; *singular*, en caso contrario.

Como en (24), convendremos en llamar *cadena*, también al conjunto formado por una sola permanencia. Utilizaremos para las cadenas generales, las mismas notaciones que para las regulares, cuando no sea necesario distinguirlas. En lo sucesivo, cuando hablemos de una cadena sin ningún calificativo, se entenderá que se trata indistintamente de una cadena regular o singular, es decir, general.

Se dirá que una cadena no idéntica, es *cerrada*, si con cada permanencia figuran en la cadena, todas sus conjugadas. En caso contrario, se dirá que la cadena es *abierta*. Esta definición coincide con la dada en (25), para las cadenas regulares. Valen, como es inmediato reconocerlo, para las cadenas generales, los teoremas (25, IV y V), pues su demostración es análoga.

Para la formación de cadenas generales vale una regla semejante a la dada en (26, VI), pero veremos que todas ellas pueden ser deducidas de las cadenas regulares. De la precedente definición y de (30, V) y de los teoremas del número (31), se deduce para las cadenas generales que:

I) *a*) *En una cadena, no puede haber más de dos permanencias con una misma componente común* (17, VIII);

b) *Ninguna cadena puede ser separada en dos partes, sin que alguna permanencia de una parte, tenga una conjugada en la otra*, (26);

c) *Todas las permanencias de una cadena, pueden ser ordenadas de modo que cada una de ellas sea conjugada de la precedente*, (26, VI).

La propiedad *b* se expresa brevemente diciendo que el conjunto de permanencias de una cadena, es *conexo*.

En virtud de (30, III):

II) *No existen cadenas singulares de orden* $h < 3$.

Para las cadenas generales, subsiste el teorema análogo al (24, I) referente a las cadenas regulares:

III) *El conjunto de todas las permanencias de la matriz*, $M_h(m, n)$, *de un sistema*, $S_h(m, n)$, *compatible, regular o singular, forma una cadena*, $C_h(m, n)$, *respectivamente regular o singular, de orden y h de clase m*.

En efecto, si es $h < 3$, puesto que el sistema es reducible (14, II y 15, I) a un sistema regular, el teorema está demostrado en (24, I). Bastará probarlo, pues, para $h \geq 3$, y, (18, IX), para un sistema, $S_h(m, n)$ irreducible. También podemos suponer que es $m > h$, porque el caso $m = h$, siendo (7), regular, ha sido demostrado en (24, I). Puesto que el sistema es compatible, admite, (4, VIII), un resol-

vente principal, R_h (δ), regular o singular, respecto de un determinante δ de orden h, también principal. Sea P_h la permanencia regular, (21, I), o singular, (30, I), que corresponde a R_h (δ) en M_h (m, n), y, en este último caso, con las mismas ν, singularidades que R_h (δ).

Por ser $m > h$, existe (17, V), en R_h (δ), por lo menos, otro determinante principal δ', el cual tiene con δ, $h - 1 \geq 3 - 1 = 2$, filas comunes y, por lo tanto, otro resolvente principal, (7), al cual corresponde en la matriz una nueva permanencia P'_h. Es claro que sean regulares o singulares los resolventes principales R_h (δ) y R'_h (δ'), las correspondientes permanencias P_h y P'_h tienen una componente común formada por las $h - 1$ filas comunes de δ y δ'; como (30), en el caso singular, δ y δ' determinan todos los demás determinantes principales, las demás componentes de P_h y P'_h distintas de la permanencia común, forman, a su vez, (31, I, III), una cadena cerrada de orden $h - 1$. Luego P_h y P'_h son, (31), conjugadas en M_h (m, n). Así siguiendo se obtiene un conjunto de permanencias de orden h, en M_h (m, n), que determinan una cadena $\mathcal{C}_h$ (m, n), de orden h y de clase m, porque, por ser S_h (m, n) irreducible, toda fila de la matriz pertenece necesariamente, (18, IX) a alguna permanencia.

Ejemplo 1:

El sistema singular que define la región convexa cuya figura es la del *ejemplo 3*, (20), pertenece a la cadena singular,

$$\mathcal{C}_4(6,4) = [\{125\}\ \{124\}\ \{135\}\ \{134\}\ \{234\}\ \{235\}]\ \{1256\}\ \{1356\}$$
$$\{1246\}\ \{1346\}\ \{2346\}\ \{2356\};$$

en donde se ha designado con 6 la fila que corresponde a la inecuación del hiperplano que no concurre con los otros cinco. La cadena consta de siete permanencias. La primera es singular y las otras seis son regulares.

Recíproco:

IV) *A toda cadena* $\mathcal{C}_h$ (m, n) (*regular o singular*) *de permanencias de una matriz*, M_h (m, n), *corresponde un sistema compatible* S_h (m, n) *de m inecuaciones principales, de característica h y de dimensión n.*

En virtud de (30, III) podemos suponer $h \geq 3$, porque para $h < 3$, siendo $\mathcal{C}_h$ (m, n) regular, el teorema está demostrado en (24, III).

Sea S_h (m, n), el sistema correspondiente a dicha matriz, M_h (m, n), y P_h una permanencia de la cadena $\mathcal{C}_h$ (m, n), dada. Como, (21, I) y (30, I) a P_h corresponde un resolvente principal R_h (δ) del sistema considerado, éste es, (4, VIII) compatible. Si la dada cadena no

tiene más permanencias, el teorema está demostrado. Si tiene otras permanencias, sea P'_h una conjugada de la P_h, puesto que éstas tienen una componente común de orden $h — 1$, y las restantes componentes no comunes, (31, II, IV), forman una cadena cerrada de orden $h — 1$, sus respectivos determinantes δ y δ', tienen $h — 1 \geq \geq 3 — 1 = 2$ filas comunes, luego, (7), δ' pertenece al resolvente R_h (δ); por lo tanto el correspondiente resolvente principal, R'_h (δ), es un resolvente, (16, VII), del mismo sistema S_h (m, n). De este modo, resulta demostrado el teorema, porque todos los resolventes así obtenidos son del sistema S_h (m, n), el cual tiene necesariamente, (18, VIII), y (I, b) m inecuaciones principales, característica h y dimensión n por ser h la característica de la correspondiente matriz y n el número de sus columnas.

33. **Contracción de dos permanencias.** — Interesa particularmente en esta teoría de las formas geométricas, la obtención de todas las posibles cadenas regulares y singulares que admite un dado tipo, T_h (m, n) de matriz, porque de este modo se obtienen también, en virtud del teorema precedente, todos los sistemas compatibles e irreducibles, S_h (m, n), cuyas matrices pertenecen al dado tipo; es decir, de dada característica h, dimensión n y dado número, m, de inecuaciones principales, y en consecuencia, (8), quedan determinadas sus correspondientes figuras.

Veremos que, para ello, será suficiente formar todas las cadenas regulares que admite el dado tipo de matriz, cuestión resuelta en (26); las posibles cadenas singulares se deducen de las regulares mediante una nueva operación que en seguida definiremos.

Sean P^1_h y P^2_h dos permanencias conjugadas de una misma cadena regular o singular, C_h (m, n), de orden $h > 2$. Sus respectivas permanencias componentes constituyen, (30, IV), sendas cadenas regulares cerradas C^1_{h-1} y C^2_{h-1} de orden $h — 1 > 2 — 1 = 1$; la cadena C_{h-1}, de orden $h — 1$ que resulta (31), del conjunto de las permanencias componentes no comunes de C^1_{h-1} y C^2_{h-1}, se dirá *contracción* de las permanencias conjugadas P^1_h y P^2_h dadas. En cuanto a las permanencias P^1_h y P^2_h, se dice que han sido *contraídas*, y ellas mismas se dirán, con frecuencia, *elementos* de la contracción.

Con respecto a esta nueva operación con las permanencias de una misma cadena, C_h (m, n), dos eventualidades son posibles:

a) El conjunto de permanencias formado por la permanencia singular, $[C_{h-1}]$, proveniente de la dada contracción y de las restantes permanencias de C_h (m, n), es decir, todas, menos P^1_h y P^2_h,

constituye, a su vez, una nueva cadena de orden h y de clase m; en cuanto a la dimensión n, es siempre la misma, no puede alterar en esta operación;

b) Dicho conjunto, no forma cadena, o bien forma una cadena de clase menor que la de la clase dada.

En el primer caso, *a*), se dirá que la cadena $C_h(m, n)$ *admite* la dada contracción, P_h^1, P_h^2; en caso contrario, *b*), se dirá que *no admite* la contracción, P_h^1, P_h^2. La nueva cadena así obtenida, se dirá cadena *deducida* de la $C_h(m, n)$ mediante la contracción de P_h^1 y P_h^2.

Se comprende que pueden presentarse las dos eventualidades consideradas, porque cada contracción equivale a una permanencia singular con más singularidades que las existentes en las permanencias contraídas, en caso de ser singular alguna de ellas, y esta nueva singularidad, (30, I), implica la anulación de nuevos determinantes de orden $h + 1$, en toda matriz que admite la dada cadena, $C_h(m, n)$, en la cual se hace la *contracción*. La operación será posible o no, según que se verifiquen, en dicha matriz, las relaciones (6.3) entre todos sus determinantes de orden $h + 1$.

Ejemplo 1:

La cadena regular,

$$C_3(6, n) = \{123\}\ \{124\}\ \{135\}\ \{145\}\ \{236\}\ \{245\}\ \{256\}\ \{356\},$$

del *ejemplo 1*, (26), no admite la contracción cuyos elementos son las permanencias $\{123\}$ y $\{135\}$. En efecto, para que estas cuatro filas formen una permanencia singular de la nueva cadena resultante, es preciso (30, I) que sea nulo el determinante de cuarto orden formado con ellas. Es decir, $(1235) = 0$.

Escribamos las relaciones (6 . 3) en la forma:

$$(i\,j\,k\,l)\ (1235)^3 = \begin{vmatrix} (i\ 235) & (1\ i\ 35) & (12\ i\ 5) & (123\ i) \\ (j\ 235) & (1\ j\ 35) & (12\ j\ 5) & (123\ j) \\ (k\ 235) & (1\ k\ 35) & (12\ k\ 5) & (123\ k) \\ (l\ 235) & (1\ l\ 35) & (12\ l\ 5) & (123\ l) \end{vmatrix}, \qquad (\alpha)$$

donde con i, j, k, l se designa una cualquiera de las filas *1*, *2*, *4* y *6*.

En particular, para $i = 1$, $j = 2$, resulta:

$$(12\,k\,l)\ (1235) = \begin{vmatrix} (12\ k\ 5) & (123\ k) \\ (12\ l\ 5) & (123\ l) \end{vmatrix}, \qquad (\beta)$$

porque todos los que tienen en (α) dos filas iguales son idénticamente nulos.

La realción (β) tiene lugar cualesquiera que sean los valores asignados a los determinantes que en ella figuran; en particular, cuando sea $(1235) = 0$ se debe tener también

$$\begin{vmatrix} (12\,k\,5) & (123\,k) \\ (12\,l\,5) & (123\,l) \end{vmatrix} = 0\ ;$$

de donde, para $k = 4$, $l = 6$ resulta:

$$(1245)\ (1236) = -(1234)\ (1256)\,. \qquad (\gamma)$$

Ahora bien, esta última relación es incompatible con las relaciones de signo entre los determinantes de cuarto orden de dicha cadena, las cuales están consignadas en el cuadro de la página 123. En efecto, según aquéllas, el primer miembro de (γ) tiene signo negativo, mientras que el segundo resulta positivo. Ello es solamente posible si uno, al menos, de los factores de cada miembro fuese nulo, a su vez. Pero en tal caso, el grado de singularidad de la permanencia sería superior al dado, contra lo supuesto. La cadena considerada no admite, pues, tal contracción. En cambio, es fácil ver que admite la contracción cuyos elementos son las permanencias $\{135\}$ y $\{145\}$.

Obs.: El significado geométrico de una contracción no es otra cosa que la supresión de la arista común determinada, (30, Obs.), por las dos permanencias contraídas, reuniendo los dos vértices, (31, Obs.), correspondientes a ellas, en uno solo, en los casos en que ello es posible, de modo que se conserven la dimensión h de la figura convexa y su número m de caras.

Un caso en que tal operación, seguramente, no es posible sin que disminuya el número de filas de la cadena, está dado por el teorema siguiente:

I) *Si en una cadena $\mathcal{C}_h\,(m, n)$, una fila i, pertenece sólo a h permanencias suyas, toda contracción, cuyos elementos son permanencias que contienen la fila i, da lugar a una nueva cadena, de igual orden, h, en la cual falta la fila i.*

Puesto que, por definición, es $h > 2$, y $\mathcal{C}_h\,(m, n)$, tiene más de una permanencia, es, (24), $m > h$. Sea, (32, IV), $S_h\,(m, n)$, un sistema perteneciente a la dada cadena. El sistema subordinado de primer orden, (10, I), en el cual es cero el polinomio relativo a la fila i, es compatible y tiene, (21, I, y 30, II), h determinantes principales, los correspondientes a las h permanencias a las que pertenece i, en $\mathcal{C}_h\,(m, n)$. Por lo tanto, siendo su característica complementaria (11), $h' = h - 1$, su correspondiente resolvente principal, (7), y (26, II), se reduce a una sola ecuación cuyos coeficientes tienen todos el mismo signo que el relativo determinante orlado. Pero éste se

obtiene, por otra parte, (10), anulando en un resolvente principal de S_h (m, n), la variable paramétrica X_i, relativa a la fila i. Si por efecto de la contracción se anula el correspondiente determinante de orden $h + 1$, resulta en dicho resolvente una ecuación homogénea con h coeficientes de signos iguales entre sí, lo cual implica que, en el nuevo sistema así obtenido, también compatible, (9, I), es sobrante la fila i. Luego, en la correspondiente cadena (32, II), falta la fila i.

Cuando en una cadena se efectúa una contracción de modo que en la nueva cadena resultante hay una fila menos que en la cadena dada, se dirá que la operación es una *contracción inadecuada*; en caso en que la contracción es posible y no altera el número de filas de la cadena, se dirá que es una *contracción adecuada*. Resulta así, en consecuencia:

II) *Si una cadena* C_h (m, n), *admite una dada contracción, la cadena deducida de ella tiene clase igual o menor que* C_h (m, n), *según que dicha contracción sea, respectivamente, adecuada o inadecuada.*

Puesto que, por definición, la contracción adecuada, cuando es admitida por una cadena, no hace más que reducir a una sola dos permanencias conjugadas, se deduce, (32), inmediatamente, que:

III) *Toda cadena, deducida por contracción adecuada de permanencias de otra cadena cerrada, es también cerrada.*

La existencia de una cadena C_h (m, n), regular o singular, en una matriz de dado tipo, T_h (m, n), implica, (24 y 30), relaciones de signo y de anulación perfectamente determinadas entre sus determinantes de orden $h + 1$, las cuales deben ser compatibles con las demás relaciones entre los determinantes de una misma matriz, dadas por las expresiones (6.3).

Escribamos explícitamente dichas expresiones, haciendo intervenir, como variables, las filas de la correspondiente matriz. Se tiene:

$$(i_1 \ldots i_h i_{h+1})(a_1 \ldots a_h a_{h+1})^h = \begin{vmatrix} (i_1 \ a_2 \ldots a_{h+1})(a_1 i_1 \ a_3 \ldots a_{h+1}) \ldots (a_1 a_2 \ldots a_h i_1) \\ (i_2 \ a_2 \ldots a_{h+1})(a_1 i_2 \ a_3 \ldots a_{h+1}) \ldots (a_1 a_2 \ldots a_h i_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (i_{h+1} a_2 \ldots a_{h+1})(a_1 i_{h+1} a_3 \ldots a_{h+1}) \ldots (a_1 a_2 \ldots a_h i_{h+1}) \end{vmatrix}$$

Para $i_1 = a_1$, $i_2 = a_2$, $\ldots$, $i_{h-1} = a_{h-1}$, resulta, en particular,

$$(a_1 a_2 \ldots a_{h-1} i_h i_{h+1})(a_1 a_2 \ldots a_h a_{h+1}) = \begin{vmatrix} (a_1 \ldots a_{h-1} i_h \ \ a_{h+1}) \ (a_1 \ldots a_h i_h) \\ (a_1 \ldots a_{h-1} i_{h+1} a_{h+1}) \ (a_1 \ldots a_h i_{h+1}) \end{vmatrix},$$

o sea, en el segundo miembro, un determinante de segundo orden. Esta última igualdad se verifica idénticamente, cualesquiera que sean los valores de los determinantes de orden $h + 1$ que en ella figuran. Luego, para $(a_1\, a_2 \ldots a_h\, a_{h+1}) = 0$, se debe tener también

$$\begin{vmatrix} (a_1 \ldots a_{h-1}\, i_h \;\; a_{h+1})\,(a_1 \ldots a_h\, i_h) \\ (a_1 \ldots a_{h-1}\, i_{h+1}\, a_{h+1})\,(a_1 \ldots a_h\, i_{h+1}) \end{vmatrix} = 0\,.$$

De donde

$$(a_1 \ldots a_{h-1}\, i_h\, a_{h+1})(a_1 \ldots a_h\, i_{h+1}) = (a_1 \ldots a_{h-1}\, i_{h+1}\, a_{h+1})(a_1 \ldots a_h\, i_h) \quad [33.1]$$

Tratándose solamente de signos y de ceros, es fácil ver que las demás relaciones (6.3), en las cuales hay menos de $h - 1$ coincidencias de filas, son siempre posibles. Basta, por lo tanto, que se verifiquen sólo estas últimas para cada determinante nulo de orden $h + 1$. En consecuencia:

IV) *La condición necesaria y suficiente para que una cadena,* $C_h(m, n)$, *admita una contracción adecuada de dos permanencias suyas, es que, además de las relaciones existentes entre los determinantes de orden* $h + 1$ *de toda matriz que tiene dicha cadena, se verifiquen las nuevas relaciones* (33.1) *que resultan de anular en ella, el otro determinante de orden* $h + 1$, *por efecto de la contracción.*

En virtud de esto,

V) *Toda cadena cerrada singular puede ser deducida, mediante sucesivas contracciones adecuadas, de las cadenas regulares cerradas de igual orden y clase que la dada.*

§ 10. - DERIVACION DE CADENAS

34. **Cadenas derivadas de una cadena.** — Demostraremos aquí un grupo de proposiciones fundamentales que permitirán definir, para toda cadena $C_h(m, n)$, una operación parecida a la derivación y que, en cierto modo, hasta tiene, como aquélla, un análogo significado geométrico.

Recordemos, (23), que, dada una permanencia regular $P_h(\delta)$ de una matriz, las permanencias subordinadas de ella, relativas a s filas dadas, son de orden $h - s$, si es $s < h$, y de orden nulo, si es $s = h$ y se obtienen de $P_h(\delta)$, suprimiendo, en ésta, (23, I) las s filas dadas. Recíprocamente, dada una permanencia regular, $P'_h(\delta)$

nula o no, se puede considerar, de infinitos modos, como una permanencia subordinada de otra, de orden superior a ella.

La operación que consiste en formar la permanencia subordinada de una permanencia regular $P_h(\delta)$, relativa a s filas dadas, la llamaremos *derivación de la permanencia*, y llamaremos *permanencia derivada* de orden s, relativa a las s filas dadas, a la nueva permanencia que así se obtiene. La permanencia derivada de orden s relativa a s filas dadas, $a_1, a_2, \ldots, a_s$ de $P_h(\delta)$, la indicaremos con la notación

$$\mathcal{D}^{s}_{a_1, a_2, \ldots, a_s} P_h(\delta)$$

o simplemente con

$$P_h \mathcal{D} \qquad \text{o} \qquad \mathcal{D}_{a_1, a_2, \ldots, a_s} P_h$$

según convenga.

Ella se obtiene, como hemos dicho, suprimiendo en $P_h(\delta)$ las s filas cuando sea $s < h$, y todas, cuando sea $s = h$.

Probemos que:

I) *El conjunto de todas las permanencias derivadas de orden s, relativas a s filas dadas, de las permanencias de una misma cadena regular,* $C_h(m, n)$, *forman también una cadena regular de orden* $h - s$, *para* $s < h$, *y nula para* $s = h$.

Esta propiedad es una consecuencia inmediata de la definición de cadena regular y de la operación precedente, puesto que al suprimir, en las permanencias que las contienen, el mismo grupo de filas, las que eran conjugadas, siguen siendo todavía, (22), conjugadas. En el caso $s = h$, la cadena se reduce a permanencias nulas. Es, por lo tanto, una cadena nula.

La cadena, así obtenida, de orden $h - s$, para $s < h$, y de orden *cero* para $s = h$, la llamaremos *cadena derivada de orden s* de la cadena dada, relativa al grupo, g, de filas dadas, y la designaremos con la notación

$$\mathcal{D}^{s}_{g} C_h(m, n) = C'_{h-s},$$

o también con

$$\mathcal{D}_g C_h \quad , \quad C_h \mathcal{D}^s ,$$

según convenga.

El grupo g, se llama *grupo de filas de la cadena derivada.* En particular, cuando se trata de una sola fila, ésta se dirá *fila de la cadena derivada.*

Siendo, (30, IV), el conjunto de permanencias componentes de una permanencia singular P_h, de orden h, una cadena regular C_{h-1} de orden $h - 1$, se dirá *permanencia derivada de orden s*, con respecto a $s < h - 1$ filas dadas de P_h, a la cadena derivada, (I), de C_{h-1}, con respecto a dicho grupo de filas.

Esta operación, puede extenderse, en las permanencias singulares, P_h, aún al caso de un grupo $s = h - 1$ de sus filas. Para ello, basta recordar que, por definición, la derivación de permanencias regulares, equivale a la formación de permanencias subordinadas y que éstas implican, a su vez, (10), los sistemas subordinados compatibles de orden s, relativos al correspondiente resolvente principal. Puesto que, (30), a una permanencia singular, P_h [ν], corresponden sistemas compatibles totalmente singulares formados por sus $h + \nu$ filas; las filas que, en cada resolvente principal R_h (δ) de éstas con respecto a un dado determinante δ, dan lugar a un sistema subordinado compatible de orden $s = h - 1$, son, (10, I), las $h - 1$ que pertenecen a δ; la restante fila de δ, es la relativa a aquella variable paramétrica que define, en $R_h(\delta)$, el mencionado sistema subordinado compatible, el cual tiene, (11), característica complementaria $h' = h - (h - 1) = 1$, es decir, es unitario, y por lo tanto regular. Corresponde, pues, a una permanencia regular cuya fila es la susodicha. Esta consideración justifica el siguiente convenio. Consideraremos, de una permanencia singular, P_h, también la *derivada de orden s* con respecto a $s = h - 1$ filas dadas de ella, correspondientes a una misma componente, como una *cadena unitaria* cuya única permanencia es la fila restante, en cualquier determinante principal, δ, que contiene a las $h - 1$ dadas.

Ejemplo 1:

Así, la derivada de la permanencia singular P_4 [2] del *ejemplo 3*, (30), con respecto al grupo 123, es una cualquiera de las cadenas unitarias abiertas siguientes: $\{4\}$; $\{5\}$; $\{6\}$. La indeterminación es sólo aparente, porque, el correspondiente sistema subordinado compatible, es el mismo. Esto no significa sino que él puede obtenerse en uno cualquiera de los tres resolventes cuyos determinantes principales son (1234), (1235), (1236).

También se puede considerar, de una permanencia singular, la permanencia derivada de orden $s \geq h$ con respecto a s filas de ella, entre las cuales figuren $h - 1$ filas de una misma permanencia componente, conviniendo en que sea la *derivada* de orden $s \geq h$, una *permanencia nula;* lo cual está plenamente justificado por el

hecho de que los correspondientes sistemas subordinados son idénticos, por tener (11, I), característica complementaria nula.

Estas consideraciones permiten generalizar la derivación a toda cadena regular o singular de permanencias y probar que:

II) *El conjunto de todas las permanencias derivadas de orden s, relativas a s filas dadas de las permanencias de una misma cadena regular o singular, forman también una cadena de orden $h - s$ para $s < h$, y de orden cero para $s \geq h$.*

Es consecuencia inmediata de la definición de cadena (32), puesto que la derivación se reduce a suprimir, en las permanencias que las contienen, el grupo de filas con respecto al cual se deriva; luego las permanencias conjugadas, siguen siendo también conjugadas. Es claro que para $s < h$, el orden de la cadena derivada es $h - s$ y cero para $s \geq h$, debido a que tal resulta el de cada una de sus permanencias.

Finalmente, es inmediato que la derivación de cadenas, puede hacerse ya sea simultánea o sucesivamente, y en cualquier orden. Con lo que resulta la propiedad de *inversión* en el orden de la derivación de cadenas:

III) *Si una cadena admite la cadena derivada de orden s, relativa a s filas dadas, ella es independiente del orden, y puede obtenerse de las derivadas sucesivas de orden inferior, relativas a las mismas filas dadas.*

Ejemplo 2:

La derivada de la cadena singular $\mathcal{C}_4$ (6,4) del *ejemplo 1*, (32), de primer orden, con respecto a la fila 1 de ella, es la cadena de tercer orden:

$$\mathcal{D}_1\ \mathcal{C}_4\,(6,4) = [\{25\}\ \{24\}\ \{35\}\ \{34\}]\ \{256\}\ \{356\}\ \{246\}\ \{346\} \qquad (\alpha)$$

Ella ha sido obtenida derivando cada permanencia de $\mathcal{C}_4$ (6,4). Es decir, considerando todas las que contienen la fila 1 y suprimiendo en ellas esta misma fila.

La derivada de segundo orden de la misma cadena, con respecto al grupo de filas, 12, es:

$$\mathcal{D}_{12}\ \mathcal{C}_4\,(6,4) = [\{5\}\ \{4\}\ ]\ \{56\}\ \{46\}. \qquad (\beta)$$

Esta misma cadena resulta derivando nuevamente, con respecto a la fila 2, la (α):

$$\mathcal{D}_2\left(\mathcal{D}_1\ \mathcal{C}_4\,(6,4)\right) = [\{5\}\ \{4\}]\ \{56\}\ \{46\}.$$

De las definiciones dadas y de (32, II), se deduce inmediatamente que:

IV) *Las cadenas derivadas de orden s, de una misma cadena singular de orden h, son cadenas regulares para* $s = h - 1$, $s = h - 2$ *y* $s \geq h$ *y cadenas singulares, en todos los demás casos;* puesto que resultan, respectivamente, cadenas de primer orden, segundo orden, y orden cero, y de orden superior, en los demás casos.

En el ejemplo precedente la cadena (β), derivada de segundo orden de la cadena singular $\mathcal{C}_4(6, 4)$, de cuarto orden, es una cadena regular.

Puesto que las cadenas derivadas de orden $h - 1$ y de orden $h - 2$, de una cadena singular de orden h, son siempre cadenas regulares de primer orden y de segundo orden respectivamente, se puede usar para ellas la notación de las cadenas regulares. Sin embargo, en ciertos casos, es útil saber si una permanencia de primer o de segundo orden de una cadena derivada, proviene o no de una permanencia singular, en la cadena primitiva. En tal caso conviene conservar la notación, como si se tratase de una permanencia singular.

Ejemplo 3:

Así la derivada

$$\mathcal{D}_{12}\, \mathcal{C}_4(6,4) = [\{5\}\{4\}\{56\}\{46\}]$$

del ejemplo precedente, es una cadena binaria, y, por lo tanto, (32, II), regular. Ella es idéntica a la cadena

$$\{54\}\{56\}\{64\}.$$

Sin embargo aquella notación expresa algo más que ésta; asegura que la permanencia $\{54\}$ proviene de una permanencia singular de $\mathcal{C}_4(6,4)$.

Sea, ahora, $\mathcal{C}_h(m, n)$, una cadena dada, y $S_h(m, n)$, (32, IV), un sistema perteneciente a ella. La operación que consiste en obtener el sistema subordinado compatible de orden s, relativa a s polinomios dados de $S_h(m, n)$, de característica subordinada (11), $h' = h - s$, para $s < h$ y cero para $s \geq h$, corresponde a la derivación de la cadena $\mathcal{C}_h(m, n)$, respecto a las s filas de dichos polinomios dados y viceversa. Podemos concluir, entonces (32, III, IV), que:

V) *A todo sistema subordinado compatible de orden s, relativo a s polinomios dados de un* $S_h(m, n)$, *corresponde la cadena derivada de orden s, con respecto a las filas de los s polinomios, en la cadena,* $\mathcal{C}_h(m, n)$, *a que pertenece el sistema dado;* y recíprocamente:

VI) *A toda cadena derivada de orden s, de* $\mathcal{C}_h(m, n)$, *con respecto a un grupo de s filas dadas de ella, pertenece el sistema subordinado*

compatible del sistema $S_h(m, n)$, *con respecto a los s polinomios de las s filas dadas de* $C_h(m, n)$,

Ejemplo 4:

Así, en la figura del *ejemplo 3,* (20), a la cadena (α), derivada de primer orden con respecto a la fila 1, de la cadena $C_4(6,4)$, a que pertenece dicha figura, corresponde la pirámide cuadrangular, de vértices 12345, 125, 135, 134 y 124, en la cual, la base ha sido designada, con el número 6, pues, esos mismos vértices están dados por las permanencias [{25} {24} {35} {34}], {256}, {356}, {246}, {346}, la primera de las cuales es singular y las otras cuatro son regulares.

En cambio a la cadena (β), derivada de segundo orden de $C_4(6,4)$, con respecto a las filas 1,2, corresponde la cara triangular, cuyos vértices son 12345, 124 y 125; las relativas permanencias son {54}, {46}, {64}, puesto que la [{5} {4}] es también regular e idéntica a la {54}, (IV).

Los dos teoremas precedentes y este último ejemplo, justifican plenamente la analogía de la derivación de cadenas anunciada al principio de este número, con la derivación ordinaria, puesto que también determina, como ésta, los elementos límites de la figura, *caras, aristas, vértices,* etc.

Resulta inmediatamente, (32), que:

VII) *Las cadenas derivadas de una cadena cerrada de orden mayor que la unidad, son también cerradas.*

En cuanto a las cadenas unitarias, sus cadenas derivadas, son de orden cero; es decir, idénticas, y el teorema carece de sentido.

También, como consecuencia inmediata de (10, I), y (V, VI), resulta:

VIII) *A cada par de sistemas subordinados compatibles de primer orden, contiguos en un mismo* $S_h(m, n)$, *perteneciente a una cadena* $C_h(m, n)$; $(h > 1)$, *corresponde un par de cadenas, derivadas de primer orden de* $C_h(m, n)$, *que tienen una cadena en común, derivada de segundo orden de* $C_h(m, n)$, *a la cual pertenece, a su vez, la intersección de ambos sistemas contiguos.*

Recíprocamente:

IX) *A cada par de cadenas derivadas de primer orden de una cadena* $C_h(m, n)$, *de orden* $h > 1$, *con una cadena en común, derivada de segundo orden de* $C_h(m, n)$, *corresponde, en todo* $S_h(m, n)$ *perteneciente a* $C_h(m, n)$, *un par de sistemas subordinados de primer orden compatibles, contiguos en el sistema, y a la cadena derivada de segundo orden, la intersección de éstos.*

Sea C_h una cadena de orden $h > 1$ y C_{h-1}^1 y C_{h-1}^2 dos cadenas derivadas de primer orden de C_h, que tienen una cadena en común,

derivada de segundo orden de C_h; las cadenas C_{h-1}^1 y C_{h-1}^2 se dicen *asociadas en* C_h.

Si

$$C_{h-1}^1 = \mathcal{D}_a C_h \quad \text{y} \quad C_{h-1}^2 = \mathcal{D}_b C_h,$$

se tiene:

$$\mathcal{D}_b C_{h-1}^1 = \mathcal{D}_b \left(\mathcal{D}_a C_h\right) = \mathcal{D}_{a,b} C_h.$$

$$\mathcal{D}_a C_{h-1}^2 = \mathcal{D}_a \left(\mathcal{D}_b C_h\right) = \mathcal{D}_{b,a} C_h.$$

Luego (III), siendo

$$\mathcal{D}_{a,b} C_h = \mathcal{D}_{b,a} C_h,$$

resulta:

$$\mathcal{D}_b C_{h-1}^1 = \mathcal{D}_a C_{h-1}^2 = \mathcal{D}_{a,b} C_h.$$

Es decir:

X) *La cadena común, de orden $h - 2$, de un par de cadenas asociadas, en una cadena C_h, de orden $h > 1$, es la cadena derivada de primer orden de una cualquiera del par asociado, con respecto a la fila de la otra.*

De (VIII) y de (19, III), se sigue inmediatamente que:

XI) *En toda cadena C_h de orden $h > 1$, a cada cadena derivada de primer orden de ella, corresponde una cadena derivada de primer orden asociada en C_h.*

Ejemplo 5:

Sea C_4 (6,4) la primera cadena del *ejemplo 3*, (26). Se tiene:

$$C_3 = \mathcal{D}_1 C_4(6,4) = \{234\}\{235\}\{246\}\{345\}\{256\}\{456\},$$

$$C_3' = \mathcal{D}_2 C_4(6,4) = \{134\}\{135\}\{146\}\{346\}\{156\}\{356\},$$

Ambas cadenas, C_3 y C_3', así obtenidas, son asociadas en la C_4 (6,4), pues

$$\mathcal{D}_2 C_3 = \mathcal{D}_2 \left(\mathcal{D}_1 C_4(6,4)\right) = \{34\}\{35\}\{46\}\{56\},$$

$$\mathcal{D}_1 C_3' = \mathcal{D}_1 \left(\mathcal{D}_2 C_4(6,4)\right) = \{34\}\{35\}\{46\}\{56\}.$$

Tienen, en común, la cadena:

$$C_2'' = \{34\}\{35\}\{46\}\{56\},$$

que es, a la vez, la

$$\mathcal{D}_{1,2} C_4(6,4) = \{34\}\{35\}\{46\}\{56\}.$$

El significado geométrico de cada uno de estos resultados es muy claro. La primera cadena obtenida, C_3, corresponde a la *cara pentaédrica* de la primera figura del *ejemplo 3*, (26), cuyos vértices son: 1234; 1235, 1246; 1345; 1256 y 1456. La segunda cadena, C'_3, corresponde también a una *cara pentaédrica*, cuyos vértices son: 1234; 1235; 1246; 2346; 1256 y 2356. Ambas caras pentaédricas tienen, en común, a su vez, una *cara plana*, formada por el *cuadrilátero* de vértices 1234; 1235; 1246 y 1256, que corresponde a la cadena C''_2.

Ejemplo 6:

Sea C_4 (6,4), la cadena singular considerada en el *ejemplo 1*, (32). Ella corresponde a la figura del *ejemplo 3*, (20). Se tiene:

$$C_3 = \mathcal{D}_1\, C_4(6,4) = [\{25\}\{24\}\{35\}\{34\}]\{256\}\{356\}\{246\}\{346\},$$

$$C'_3 = \mathcal{D}_2\, C_4(6,4) = [\{15\}\{14\}\{34\}\{35\}]\{156\}\{146\}\{346\}\{356\}.$$

Ambas cadenas, C_3 y C'_3 son asociadas en la cadena C_4 (6,4); tienen en común la cadena

$$C''_2 = \mathcal{D}_{1,2}\, C_4(6,4) = [\{5\}\{4\}]\{56\}\{46\} \equiv \{54\}\{56\}\{46\}.$$

A la cadena C_3, en la mencionada figura, en la cual, al hiperplano que no pasa por el vértice 12345, lo designamos con el número 6, corresponde la *cara* formada por la *pirámide cuadrangular* de vértices: 12345; 1256; 1356; 1246 y 1346. A la cadena C'_3, la *cara* formada también por la *pirámide cuadrangular* de vértices: 12345; 1256; 1246; 2346 y 2356. Ambas pirámides tienen la *cara plana* común, formada por el *triángulo* de vértices: 12345; 1256 y 1246, que corresponde a la cadena C''_2.

Obs.: Nótese que no todo par de cadenas, derivadas de primer orden de una misma cadena C_h, es *asociado* en C_h. Ello podría inducir a error, después de haber probado, (III), la propiedad de inversión, en el orden de la derivación, porque debe resultar, necesariamente, en virtud de ello:

$$\mathcal{D}_a\left(\mathcal{D}_b\, C_h\right) = \mathcal{D}_b\left(\mathcal{D}_a\, C_h\right).$$

Pero es preciso, para esto, que las cadenas $\mathcal{D}_b\, C_h$ y $\mathcal{D}_a\, C_h$ sean, a su vez, respectivamente derivables con respecto a las filas a y b, lo que no siempre ocurre.

Así, en la cadena,

$$C_3 = \{123\}\{124\}\{135\}\{145\}\{236\}\{245\}\{256\}\{356\},$$

las siguientes cadenas derivadas de primer orden:

$$C_2 = \mathcal{D}_1 C_3 = \{23\}\{24\{\{35\}\{45\}$$

y

$$C'_2 = \mathcal{D}_6 C_3 = \{23\}\{25\}\{35\},$$

no son asociadas; pues, en C_2 no existe $\mathcal{D}_6 C_2$ ni en C'_2, $\mathcal{D}_1 C'_2$.

Es fácil probar, finalmente, que:

XII) *Toda cadena, C_h, de orden $h > 0$, queda unívocamente determinada cuando se dan sus derivadas de primer orden, las eventuales singularidades de C_h, de las cuales proceden las permanencias derivadas, y las filas de C_h, respecto de las cuales han sido obtenidas sus derivadas.*

El teorema es inmediato para una cadena regular C_h. Para ello, basta reponer, en las permanencias de cada una de sus cadenas derivadas, la fila respecto de la cual se derivó. Tomando, después, en tal conjunto, una sola vez cada permanencia repetida, resulta la cadena C_h; pues en tal operación, sólo pueden repetirse las permanencias de C_h, pero no formarse nuevas permanencias. Si la cadena es singular, puesto que, por hipótesis, se dan, en las derivadas, las permanencias que proceden de cada singularidad, como éstas son, (30, IV), en C_h, cadenas regulares de orden $h - 1$, el teorema se reduce al caso precedente.

Obs.: En general, no es preciso conocer todas las cadenas derivadas de primer orden de una cadena, para que ésta quede determinada. Basta conocer sólo algunas.

Ejemplo 7:

Las derivadas de primer orden de la cadena,

$$C_3 = \{123\}\{124\}\{135\}\{145\}\{236\}\{245\}\{256\}\{356\},$$

son:

$$\mathcal{D}_1 C_3 = \{23\}\{24\}\{35\}\{45\},$$

$$\mathcal{D}_2 C_3 = \{13\}\{14\}\{36\}\{45\}\{56\},$$

$$\mathcal{D}_3 C_3 = \{12\}\{15\}\{26\}\{56\},$$

$$\mathcal{D}_4 C_3 = \{12\}\{15\}\{25\},$$

$$\mathcal{D}_5 C_3 = \{13\}\{14\}\{24\}\{26\}\{36\},$$

$$\mathcal{D}_6 C_3 = \{23\}\{25\}\{35\}.$$

La cadena queda perfectamente determinada dando solamente $\mathcal{D}_2 C_3$ y $\mathcal{D}_5 C_3$. Pues, reponiendo en éstas, respectivamente, las filas 2 y 5, resulta: 123; 124; 236; 245; 256 y 135; 145; 245; 256; 356. Ocho de las cuales dan la cadena C_3. En cambio, se ve claramente que no bastan $\mathcal{D}_4 C_3$ y $\mathcal{D}_6 C_3$ para determinarla.

Sería interesante investigar cuál es el menor número de cadenas derivadas de primer orden, que es preciso dar, para determinar unívocamente la cadena.

Puesto que, (26, IV), en toda cadena elemental de orden h, todo grupo de h filas pertenece a alguna de sus $h+1$ permanencias, resulta:

XIII) *Una cadena elemental de orden h, admite todas las derivadas de órdenes $s \leq h$, con respecto a cualquier grupo de sus filas.*

35. **Teorema generalizado de Euler.** — Basándonos en las operaciones con las cadenas de permanencias de una matriz, demostraremos el conocido teorema de Euler generalizado para los politopos convexos cerrados del hiperespacio.

Convendremos en designar, por comodidad, con el símbolo $\begin{pmatrix} n \\ \cdot \\ i \end{pmatrix}$, el número combinatorio usual, cuando sea $0 \leq i \leq n$, y cuando sea $i > n$, pondremos $\begin{pmatrix} n \\ \cdot \\ i \end{pmatrix} = 0$.

Así, pues:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ \cdot \\ i \end{pmatrix} = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{i!} & \text{para } 0 \leq i \leq n, \\ \begin{pmatrix} n \\ \cdot \\ i \end{pmatrix} = 0 & \text{para } \quad i > n. \end{cases}$$

Designemos con $\mathcal{N}_i$, el número de cadenas derivadas de orden $i \leq h$, de una cadena no idéntica C_h. Es claro que es por definición (34) y (29)

$$\mathcal{N}_h = N_h.$$

Demostraremos que:

I) *El número,*

$$f = 1 - \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_3 + \ldots + (-1)^h \mathcal{N}_h, \qquad [35.1]$$

es invariante, para toda cadena regular no idéntica, en la agregación por cadenas elementales.

En efecto, para $h = 1$, cadenas unitarias, como en éstas, (27), la agregación no hace sino sustituir una fila por otra, el teorema es inmediato.

Sea ahora $h > 1$, C_h la cadena dada y C'_h la cadena resultante, (27). Al número $\mathcal{N}_i$ de cadenas derivadas de orden i de C_h, habrá que agregar las $\binom{h}{i-1}$, que contienen la nueva fila agregada (27, II). Luego, será:

$$\mathcal{N}'_i = \mathcal{N}_i + \binom{h}{i-1}, \qquad \text{para} \quad i = 1, 2, 3, \ldots, h-1;$$

designando con $\mathcal{N}'_i$ el número de cadenas derivadas de orden i de C'_h.

Puesto que en esta operación, se suprime la permanencia común, es

$$\mathcal{N}'_h = \mathcal{N}_h + \binom{h}{h-1} - 1 = \mathcal{N}_h + \binom{h}{h-1} - \binom{h}{h}.$$

Se tiene:

$$f' = 1 - \mathcal{N}'_1 + \mathcal{N}'_2 - \mathcal{N}'_3 + \ldots + (-1)^h \mathcal{N}'_h .$$

Sustituyendo en esta expresión las dos precedentes y teniendo en cuenta que es,

$$\binom{h}{0} - \binom{h}{1} + \binom{h}{2} - \binom{h}{3} + \ldots + (-1)^h \binom{h}{h} = 0 \ , \quad [35.2]$$

resulta:

$$f' = f;$$

y, por lo tanto, probada la proposición.

II) *El número,*

$$f = 1 - \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_3 + \ldots + (-1)^h \mathcal{N}_h ,$$

es invariante, para toda cadena regular no idéntica, en la sustitución por cadenas elementales.

Habrá que demostrarlo, (28, IX), para el caso $h > 2$.

Sea c el número de permanencias comunes a C_h y a la cadena elemental E_h, empleada, (28), en la sustitución. Se debe tener, [28.1], $1 < c < h$.

El número $\mathcal{N}'_{h-j}$ de derivadas de orden $h - j$ de la cadena resultante, C'_h, es,

$$\mathcal{N}'_{h-j} = \mathcal{N}_{h-j} + \binom{h+1-c}{j+1} - \binom{c}{j+1},$$

para

$$j = h - 1, h - 2, \ldots, 1,0 ;$$

porque cada derivada de orden $h - j$, en la cadena elemental E_h, es común a $j + 1$, permanencias; debiéndose tomar tales números combinatorios con la convención hecha al principio de este número.

Se tiene:

$$f' = 1 - \mathcal{N}'_1 + \mathcal{N}'_2 - \mathcal{N}'_3 + \ldots + (-1)^h \mathcal{N}'_h .$$

Sustituyendo en esta última expresión, la precedente, para los indicados valores de j, y teniendo en cuenta las expresiones análogas a la [35.2] que resultan, se obtiene,

$$f' = f ;$$

con lo que queda demostrado el teorema.

Probemos finalmente que:

III). *El número,*

$$f = 1 - \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_3 + \ldots + (-1)^h \mathcal{N}_h ,$$

es invariante en la contracción adecuada de dos permanencias de una cadena regular o singular de orden $h > 2$.

Esto es casi inmediato, puesto que en la contracción adecuada, (33), dos permanencias se contraen en una sola, con lo cual se pierde, en la cadena resultante, (34), una derivada de orden h y también una derivada de orden $h - 1$, la que se obtendría derivando la cadena dada con respecto a las $h - 1$ filas comunes de las permanencias contraídas. Por lo tanto, no altera el número f, en cada sucesiva contracción adecuada.

De (28, XI); (33, V) y de I, II y III de este número resulta el teorema de EULER:

IV) *Entre todas las cadenas derivadas de orden* 1, 2, 3, ..., **h** *de una misma cadena cerrada no idéntica de orden h, existe la relación:*

$$f = 1 - \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_3 + \ldots + (-1)^h \mathcal{N}_h = (-1)^h. \quad [35.3]$$

En virtud de (28, XI) y de (33, V), basta demostrar la proposición para una cadena elemental de orden h.

Pero, para ésta se tiene, (34, XIII),

$$\mathcal{N}_i = \binom{h+1}{i}; \quad i = 1, 2, 3, \ldots, h.$$

Luego:

$$f = 1 - \binom{h+1}{1} + \binom{h+1}{2} - \binom{h+1}{3} + \ldots + (-1)^h \binom{h+h}{h}.$$

Por otra parte, sabemos que es,

$$\binom{h}{0} - \binom{h+1}{1} + \binom{h+1}{2} - \binom{h+1}{3} + \ldots + (-1)^{h+1} \binom{h+1}{h+1} = 0.$$

De donde,

$$f = 1 - \binom{h+1}{1} + \binom{h+1}{2} - \binom{h+1}{3} + \ldots + (-1)^{h+1} \binom{h+1}{h} = (-1)^h,$$

lo que prueba, (32, IV) el teorema, el cual es válido también para $h = 1$, puesto que las cadenas cerradas unitarias son, (26), elementales.

El teorema de EULER suele escribirse también bajo la forma,

$$1 - \mathcal{N}_h + \mathcal{N}_{h-1} - \mathcal{N}_{h-2} + \ldots + (-1)^{h-1} = 0,$$

equivalente a [35.3] como prueba un simple cálculo [1].

[1] Noticias sobre este teorema pueden verse en el *Repertorio di Matematiche Superiori, II, Geometría* de E. PASCAL, pág. 802.

CAPITULO IV

§ 11 - MORFOLOGIA DE LAS FIGURAS POLIEDRICAS HIPERESPACIALES CONVEXAS

Vamos a ocuparnos ahora del problema fundamental de esta teoría que es el de la clasificación de los sistemas $S_h(m, n)$, normales compatibles, o sea (5), en lenguaje geométrico: la clasificación de las figuras poliédricas hiperespaciales convexas atendiendo a su *forma*. Parecerá superfluo, de primer intento, tal objeto, por cuanto la convexidad de las figuras poliédricas, es ya un carácter distintivo que permite agruparlas en una sola clase.

Pero una clasificación sólo tiene sentido en un cierto orden de ideas. Dentro de la clase, bastante amplia, de *figuras poliédricas convexas*, cabe considerar, todavía, figuras que poseen caracteres morfológicos diferentes. Y es natural que se puede ahondar en este proceso de diferenciación, hasta alcanzar sus propiedades más íntimos, por así decirlo, como son, por ejemplo, las de extensión y tamaño, objeto de la geometría métrica.

Nosotros clasifciaremos dichas figuras prescindiendo de toda propiedad métrica de las mismas. Tendremos en cuenta solamente aquéllas que sirven para determinar, eso que vagamente llamamos *forma de la figura*, y que definiremos con toda precisión.

Entre las varias tentativas de una clasificación morfológica de los poliedros del espacio ordinario, se debe a J. Steiner, la propuesta en el problema siguiente:

Wenn man Polyeder nur in Hinsicht der Art oder Gattung ihrer Grenzflächen von einander unterscheidt d. h. je nachdem diese Dreiecke, Vierecke, Fünfecke u. s. w. sind, so giebt es bekanntlich nur einen vierflächigen, zwei fünfflächige und sieben sechsflächige Körper. Wieviel verschiedene 7-8-9 ... *-n-flächige Körper sind in dieser Hinsicht möglich*? [1].

Si bien no está, en estas palabras, claramente expresado el concepto de poliedros *distintos*, se comprende lo que el autor quiere decir.

[1] Citado por O. Hermes en *Crell's Journal*, tomo 120, pág. 27-59 y 305-353.

Muchos se han ocupado de este problema (1), limitado al espacio ordinario, sin resolvelor completamente. Por dos razones que creemos fundamentales. Primera: por carecer de un instrumento analítico adecuado que permita determinar todos los poliedros de un dado número de caras, como lo exigía CAYLEY (véase pág. 3). Segunda: por no precisar, con exactitud, qué debe entenderse por poliedros de *igual forma.* El camino analítico utilizado aquí es completamente general y vale para los espacios de cualquier número de dimensiones. Permite, además, determinar todos los poliedros convexos de una dada dimensión y de un número dado de caras, mediante la obtención de sus correspondientes cadenas. En base a éstas, veremos también cómo es posible definir la *forma* por abstracción, de modo que coincida con la noción intuitiva que tenemos de ella. Creemos que toda clasificación de estas figuras, para ser fecunda, debe fundarse en las ideas de STEINER; es decir, tomar como base la forma.

Este problema, interesante de por sí, parece estar relacionado con el ya famoso *de los cuatro colores* (2), en el sentido de que la solución de este último puede hacerse depender de la del primero.

Observaremos, finalmente, que el problema de la clasificación debe ser posteorri al de la determinación de los poliedros, como lo exigía CAYLEY, y como también lo deja entender LEBESGUE en el artículo ya citado. Esa cuestión se resuelve completamente en el presente parágrafo, y se generaliza su solución, al espacio de cualquier número de dimensiones, y no solamente a los hiperpoliedros, sino también a toda figura hiperespacial poliédrica convexa. La segunda cuestión se desarrolla en las páginas que siguen, y, como hemos indicado al principio, se resuelve también. Queda por averiguar la función de la expresión $\Psi^r(m)$ que da el número de poliedros distintos sin que sea necesario construirlos efectivamente.

Aunque acerca de este último problema, no resuelto todavía ni siquiera para el espacio ordinario, no indicamos ninguna solución, creemos que el método aquí empleado puede dar buenos frutos.

Por ahora, nos interesa particularmente la exposición general de la teoría de la forma. Para ello será necesario volver a considerar las cadenas y establecer, entre ellas, criterios de comparación.

(1) Véase C. JORDAN, Recherches sur les Polyèdres, *Creell's Journal,* tomo 66, año 1866, pág. 22.

(2) Véase H. LEBESGUE, artículo citado, y también el artículo de A. ERRERA: *Exposé historique du problème des quatres couleurs,* en el Periodico di Matematiche, Serie IV, volumen VII, año 1927, pág. 20.

36. **Cadenas iguales.** Puesto que todas las cadenas de orden $h > 0$ y clase m, están caracterizadas, (32, I, *a*, *b*, *c*), por relaciones entre sus filas y no por éstas en sí; las podremos designar siempre por los mismos m números:

$$a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_m,$$

cada uno de los cuales representa, a su vez, una fila de la correspondiente matriz. Para indicar que, en una cadena, $C_h(m, n)$, una misma fila a_i pertenece a α_i permanencias suyas, escribiremos simbólicamente, $a_i^{(\alpha_i)}$. Como en toda cadena, (32), cada fila pertenece a un cierto número de permanencias, se obtiene así, para cada cadena $C_h(m, n)$, no idéntica, una expresión de la forma:

$$\mathcal{G}(a) \equiv a_1^{(\alpha_1)}, \ldots, a_i^{(\alpha_i)}, \ldots, a_m^{(\alpha_m)} \qquad [36.1]$$

que llamaremos *grupo* de la cadena $C_h(m, n)$, y a cada uno de los números $\alpha_i > 0$, *números característicos del grupo*. Si todos los números α_i son iguales entre sí, se dirá que el correspondiente grupo es *uniforme*.

Ejemplo 1:

La cadena $C_4(6, n)$ del *ejemplo 3*, (26), tiene grupo uniforme, en el cual, todos los números a_i son iguales a 6.

Puesto que, (24), en las cadenas unitarias, cada fila pertenece a una sola permanencia, en las binarias a dos, y en las cadenas elementales de orden h, (26, II), cada fila pertenece a h permanencias, resulta:

I) *Los grupos de las cadenas unitarias, binarias, y elementales de orden h, son uniformes; sus números característicos valen respectivamente* **1**, **2** *y* **h**.

Es claro que pudiéndose permutar de cualquier manera los números a_i que designan las filas de un mismo tipo, $T_h(m, n)$, de matriz, será preciso estudiar qué efecto produce, en una cadena de permanecias de ellas, cualquier sustitución σ, entre todas sus filas.

Sea, entonces, $C_h(m, n)$ una cadena no idéntica, $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_m$, sus filas, y

$$\sigma = \begin{pmatrix} a_{\nu_1} & a_{\nu_2} & \ldots & a_{\nu_i} & \ldots & a_{\nu_m} \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_i & \ldots & a_m \end{pmatrix}, \qquad [36.2]$$

una dada sustitución entre sus m filas.

Aplicar la sustitución σ, a una cadena $C_h(m, n)$, significa reemplazar, en cada permanencia de la cadena, las filas que la forman, por sus correspondientes en σ, conservando cada uno de los grupos de filas homólogas que en $C_h(m, n)$ forman permanencias, o componentes de éstas.

Es claro que:

II) *Si se aplica una dada sustitución* σ, *a una cadena no idéntica, se obtiene una cadena de igual orden y clase que la dada. Sus respectivos grupos tienen los mismos números característicos*; pues esta operación equivale a un cambio de numeración de las filas del correspondiente tipo de matriz a que pertenece la cadena dada.

Ejemplo 2:

La cadena:

$$C = \{1234\}\{1236\}\{1246\}\{1346\}\{2345\}\{2356\}\{2456\}\{3456\},$$

tiene el siguiente grupo:

$$\mathcal{G} \equiv 1^{(4)}, 2^{(6)}, 3^{(6)}, 4^{(6)}, 5^{(4)}, 6^{(6)}.$$

Mediante la sustitución:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

se transforma en la cadena del mismo orden y clase,

$$C' = \{3215\}\{3214\}\{3254\}\{3154\}\{2156\}\{2164\}\{2564\}\{1564\},$$

cuyo grupo es,

$$\mathcal{G}' \equiv 3^{(4)}, 2^{(6)}, 1^{(6)}, 5^{(6)}, 6^{(4)}, 4^{(6)},$$

el cual tiene los mismos números característicos que $\mathcal{G}$.

La cadena $C'_h(m, n)$, deducida de otra cadena $C_h(m, n)$, mediante una dada sustitución σ, entre las m filas de ésta, se llamará *cadena transformada de* $C_h(m, n)$, *por la sustitución* σ. Cuando sea necesario, la designaremos con la notación $\sigma.\ C_h(m, n)$. Es decir:

$$C'_h(m, n) \equiv \sigma.\ C_h(m, n).$$

Nótese que la cadena transformada de otra puede coincidir con la dada. Tal cosa ocurre seguramente, (26, IV), con todas las cadenas transformadas de una misma cadena elemental.

Diremos que una cadena no idéntica $C_h(m, n)$, es *igual* a otra cadena $C'_h(m, n)$, cuando existe una sustitución σ, entre las m filas de la primera que la transforma en la segunda.

Convendremos en considerar como *iguales entre sí*, dos cadenas idénticas cualesquiera. Es claro que si es:

$$\sigma . C_h(m, n) \equiv C'_h(m, n') ;$$

la sustitución inversa, σ^{-1}, transforma, a su vez, $C'_h(m, n')$ en la $C_h(m, n)$. Es decir:

$$\sigma^{-1} . C'_h(m, n') \equiv C_h(m, n) .$$

Puesto que las sustituciones entre m elementos forman grupo, la igualdad así definida, goza de las tres propiedades que la caracterizan. Para indicar la igualdad entre dos cadenas cualesquiera, idénticas o no, escribiremos, por lo tanto

$$C_h(m, n) = C'_h(m, n') .$$

Se dirá que dos permanencias regulares o singulares son *iguales* entre sí, cuando son iguales las correspondientes cadenas, (30, IV), de sus componentes. Nótese que dos cadenas iguales pueden ser de distintas dimensiones.

Dos cadenas o dos permanencias no iguales, se dirán, con frecuencia, *distintas* la una de la otra.

Cuando dos cadenas son tales que, a cada permanencia singular en una de ellas, corresponde, en la otra, una permanencia singular igual, se dirá que ambas cadenas tienen las *mismas singularidades*. Nótese que la precedente definición de igualdad de dos cadenas, implica un efectivo criterio de comparación, que permite reconocer, en cada caso, cuando dos cadenas dadas, $C_h(m, n)$ y $C_h(m, n')$, son o no iguales. Basta, para ello, aplicar en una, las m sustituciones entre sus m filas y ver si alguna de sus transformadas coincide con la otra.

(Concluirá)

LA ARQUITECTURA MOLECULAR EN BIOQUÍMICA

Por el Dr. CARLOS A. SAGASTUME

PROFESOR TITULAR DE QUIMICA BIOLOGICA EN LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

(*Conclusión*)

V. — Pigmentos metabolizantes

Los pigmentos clorofílicos cumplen una función esencialmente anabólica.

Debemos aludir brevemente ahora a los pigmentos respiratorios cuyo papel es presidir el metabolismo gaseoso y en especial el del O_2 y CO_2.

Son numerosos los cromoproteídos respiratorios actualmente conocidos. Roche los clasifica así:

Pigmentos respiratorios (Roche). 1934.

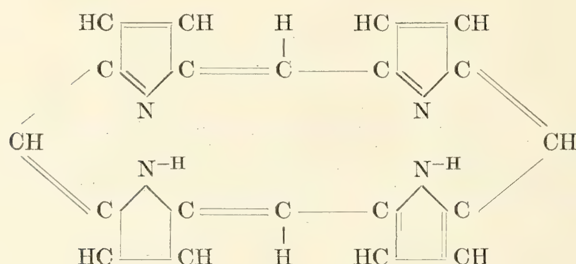
Hemoglobinas	pigmentos sanguíneos *rojos* que contienen Fe. y existen en los vertebrados.
Eritrocruorinas	pigmentos sanguíneos *rojos* que contienen Fe. y existen en muchos invertebrados.
Clorocruorinas	pigmentos sanguíneos *verdes* que contienen Fe. y existen en muchos anélidos.
Hemocianinas	pigmentos sanguíneos *azules* que contienen Cu. y existen en numerosos moluscos y crustáceos.
Hemeritrinas	pigmentos celómicos *marrón-violáceos* que contienen Fe. y existen en ciertos sipuncúlidos.

Pueden también subdividirse en cromoproteídos porfíricos a cuyo grupo pertenecen, por ejemplo, las hemoglobinas, y cromoproteídos no porfíricos entre los que pueden incluirse las hemocianinas y hemeritrinas.

Por razones obvias, nos limitaremos a decir únicamente dos palabras acerca de la hemoglobina, pero sin poder referirnos a sus parientes químicos, pues su estudio genealógico resultaría sumamente largo (Barcroft).

La disección de la molécula de hemoglobina ha demostrado la existencia en ella de un núcleo fundamental que Hans Fischer denominó « *porfina* » y cuya síntesis fué lograda por este sabio hace pocos años.

Porfina (Hans Fischer).



Según modernas investigaciones, la hemoglobina resulta de la unión de la globina con un cuerpo del tipo del heme (Fischer y colaboradores, 1931).

Se trata de cuatro anillos pirrólicos unidos por grupos metínicos y en cuya molécula se nota que los 4 anillos pirrólicos tienen en total 8 átomos de hidrógeno substituibles diversamente y 2 grupos imídicos — NH — con hidrógeno también substituible por metales.

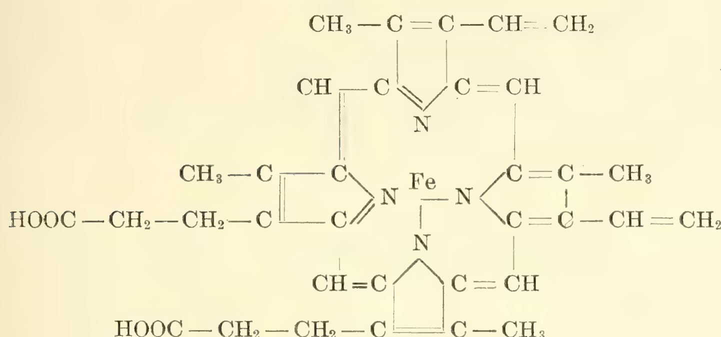
Substituyendo en la molécula de porfina átomos de hidrógeno unidos a carbono por grupos metílicos y etílicos, llega Hans Fischer a las *porfirinas*. Las porfirinas naturales tienen oxígeno en su molécula por la introducción en la misma, de ácidos (succínico, propiónico, etc.).

Las combinaciones de las porfirinas con el hierro se denominan *hemes* (Fischer 1931) si este metal se halla al estado bivalente, *hematinas* si funciona como trivalente.

A las diferentes porfirinas corresponden diferentes hemes y a éstos diferentes hematinas, así: proto, hemato, deuteroporfirinas y sus correspondientes proto, hemato y deuterohemes y proto, hemato y deuterohematinas.

Así el protoheme de las hemoglobinas responde, según Hans Fischer, a la siguiente estructura:

Protoheme de las Hemoglobinas.



(Hans Fischer) $C_{34}H_{32}N_4O_4Fe$.

Sabido es que la hemoglobina impregna el glóbulo rojo, pero no pasa al plasma en que aquel flota. La función del pigmento rojo, es contraer combinación con el oxígeno y transportarlo a las más profundas intimidades del organismo.

Si el oxígeno se hallara simplemente disuelto en la sangre, ésta no podría contener más de 0,36 %. El oxígeno se encuentra al estado de combinación con la hemoglobina formando un compuesto lábil, fácil de disociar y que por diferencia de presión cede rápidamente oxígeno.

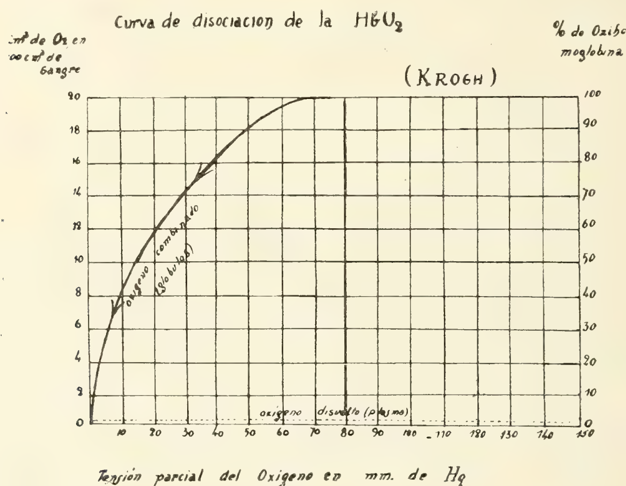
Recordando que 1 gr. de hemoglobina se combina con 1,34 cm^3 de oxígeno, se puede calcular que el organismo humano normal adulto, transporta en el total de su sangre algo más de 1 litro de oxígeno. De esto surge la conclusión que sin hemoglobina la vida es imposible. Si no tuviera hemoglobina la sangre, para transportar permanentemente ese litro de oxígeno se necesitarían 333 litros de plasma. Seríamos en tal caso, fenomenalmente voluminosos desde que pesaríamos cerca de 4500 kilos. Es probable que los hombres nos resignáramos a tal situación; pero ¿y las damas cómo se las arreglarían para mantener la línea?

La hemoglobina es, pues, el cromoproteido que transporta oxígeno del pulmón al tejido. El oxígeno va combinado con la hemoglobina al estado de combinación reversible $Hb + O_2 \rightleftarrows HbO_2$.

Si se trata de una combinación, se verá que con cada átomo de Fe de la molécula de Hb se combinarán 2 átomos de oxígeno; vale

decir, que 56 grs. de Fe de la hemoglobina fijarán 32 grs. de oxígeno. Y eso es lo que en la práctica ocurre.

Si la fijación de oxígeno por la hemoglobina constituye una combinación química, ésta debe responder a la ley de las masas. Para averiguarlo es menester trazar la curva de disociación de la oxihemoglobina. Esta curva se obtiene ubicando en un sistema de coordenadas, sobre el eje de ordenadas, el porciento de O_2 combinado a la Hb y sobre la abscisa la tensión de O_2.



Si la curva de tal disociación responde a la ley de las masas, ella debe ser una hipérbole rectangular, es decir, que debe responder a la ecuación $x \times y = k$ (constante). Ello sucede en realidad. Y si el proceso natural de la fijación de oxígeno y disociación de la HbO_2 se aparta en algo de la ley de las masas, es por la gran concentración de hemoglobina en el glóbulo y por la interferencia de las sales que éste contiene.

Con hemoglobina privada de sales por diálisis y en dilución al 1 %, la ley de las masas se cumple íntegramente.

Pero no solamente el pigmento sanguíneo interviene en el transporte de O_2 del pulmón al tejido, sino que es consecuencia de tal oxigenación el proceso inverso, es decir, el transporte de CO_2 del tejido al pulmón. También es consecuencia el cociente respiratorio y el admirable equilibrio ácido-básico de la sangre, cuyo pH se mantiene normalmente constante, cerca del valor 7.35, gracias a sistemas

de regulación de una gran solidez a la par que de una sensibilidad exquisita.

La oxihemoglobina es un ácido más enérgico que la hemoglobina y por ello cuando la tensión de oxígeno aumenta y se forma más oxihemoglobina, aumenta la acidez y, para evitarlo, capta más álcali, quedan menos bases libres y, por consiguiente, se puede fijar en la sangre menor cantidad de CO_2. Al reducirse la HbO_2 a Hb, ocurre lo contrario. Por tal razón fija más CO_2. Esto repercute, pues, directamente sobre la reserva alcalina. En el hombre adulto normal la hemoglobina se origina con los hematíes, exclusivamente en la médula ósea. Ya hemos dicho que el pigmento se encuentra localizado en los eritrocitos. Después que estas células han cumplido el ciclo de su vida, 30 a 100 días y que se han desintegrado, la hemoglobina se disloca, se simplfica, formando pigmentos biliares. Se admitía que tal dislocación se producía en el hígado. Whipple y otros investigadores han comprobado que los pigmentos biliares se forman también en el bazo.

En punto a la formación natural de la hemoglobina, no podemos ni siquiera entrar a discutir los diversos factores físicos, mecánicos y químicos que concurren al proceso. Hay muchas sustancias minerales y orgánicas que presentan actividad pigmentogenética.

En el laboratorio de la cátedra a mi cargo comprobamos en el transcurso de un trabajo efectuado en colaboración con mi distinguido ex alumno el Dr. Pezzani que en animales que anemizábamos por sangría, la clorofila actuaba tan eficazmente como los extractos de hígado y riñón en la formación de hemoglobina.

VI. — Pigmentos y vitaminas

Hemos ya visto las relaciones genéticas entre el carotene y la vitamina A, relaciones tan íntimas como que el carotene es la previtamina. No es éste el único caso en que se hallan tan cerca un pigmento y una vitamina. Otro tanto parece que ocurre entre las flavinas y la vitamina B_2.

Las flavinas son pigmentos amarillos de fluorescencia verde, ampliamente difundidos en vegetales y animales. Su importancia bioquímica reside en la circunstancia de fijar hidrógeno originando leucoderivados, hidrógeno que así pueden transportar a otros cuerpos.

Hace poco tiempo Banga y Szent-Giörgy describieron la propiedad reversible de fijar y ceder H_2 que posee una flavina del músculo

cardíaco. Posteriormente Warburg y Christian descubrieron en la levadura, el mismo pigmento o un pigmento análogo unido a una proteína; bajo esta forma presenta los caracteres de una diastasa. El pigmento amarillo de Warburg y Christian es capaz de oxidar en presencia de una segunda diastasa incolora y de una codiastasa, el ácido hexosamonofosfórico.

Luego, se ha demostrado la existencia de flavina en la mayor parte de los órganos animales.

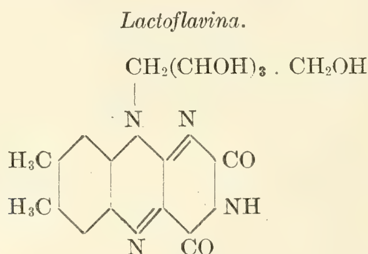
El suero de leche, cuya materia colorante había interesado a varios investigadores, constituyó la mejor materia prima para aislar tales pigmentos. Kuhn propuso el nombre de *flavinas* para esos colorantes.

Este mismo autor, trabajando con la vitamina B_2 descubierta en 1926 por Goldberger, había observado que cuanto más puros y activos eran los preparados de vitamina B_2, tanto más intensa era su coloración amarilla y su fluorescencia verde. Ello lo condujo a formular la hipótesis de que la vitamina B_2 era una flavina y que por unión con una proteína, esta vitamina se transforma en el organismo animal en una distasa.

En 1934 obtuvo Kuhn 1 gr. de lactoflavina pura, cristalizada, a partir de 10.000 litros de leche y comprobó que 10 γ del pigmento cristalizado bastan para restablecer el crecimiento normal de ratas alimentadas con una dieta carente de vitamina B_2.

La lactoflavina responde a la fórmula:

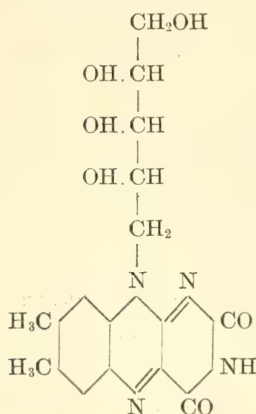
Lactoflavina.



Kuhn preparó por síntesis varios isómeros de lactoflavina. A partir de la d-ribosa obtuvo la 6-7 dimetil 9 d-riboflavina cuyos caracteres físicos, químicos y bioquímicos responden exactamente a los de la lactoflavina.

Kuhn había logrado, pues, la síntesis de la vitamina B_2 y prosiguió sus investigaciones para establecer qué nexos bioquímicos ofrece tal vitamina con el fermento amarillo.

Lactoflavina sintética.

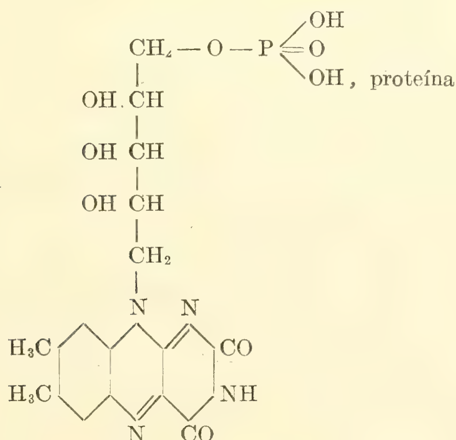


6.7 dimetil. 9. ributil-benzoisoaloxazina o vitamina B_2

Theorell ha obtenido por cataforesis, la diastasa amarilla de la levadura, bajo forma cristalizada. Ella contiene 0,45 % de flavina.

Se puede, dializando contra HCl muy diluído, separar de la diastasa un ácido flavina-fosfórico. Se puede también unir en seguida este ácido flavina-fosfórico con la proteína que no había dializado y se obtiene así de nuevo el fermento amarillo. La proteína incolora sola, puede ser considerada como diastasa, y el ácido flavina-fosfórico termoestable, como codiastasa. Se forma, pues, espontáneamente a partir de la codiastasa amarilla y de la diastasa incolora una nueva diastasa: el fermento amarillo cuya probable estructura sería:

Diastasa amarilla.



La diastasa amarilla y la codiastasa amarilla, presentan, según lo ha comprobado Kuhn, la misma acción sobre el crecimiento, que la lactoflavina.

La síntesis natural de la vitamina B_2 es privilegio de las plantas y las bacterias.

En las plantas verdes actúa probablemente como un diastasa. Está incluída en un complejo de peso molecular elevado.

El alimento vegetal por la cocción o por acción del jugo gástrico, deja en libertad por un lado el soporte coloidal y por el otro la vitamina, que así es reabsorbida.

En cada órgano (hígado, riñón, músculos, etc.) la vitamina libre pasa nuevamente al estado de un fermento amarillo previa unión con el ácido fosfórico y una proteína. La vitamina pasa de nuevo a la leche, al estado libre. Es así como el organismo infantil la recibe. La formación de una distasa amarilla de peso molecular elevado, se repite entonces.

No es necesario encarecer la trascendencia de los descubrimientos del sabio Kuhn. Un grupo antracénico con diversas funciones, constituye el pigmento que es un aceptante de H_2. Si a este pigmento se le adosa una cadena lateral análoga a un azúcar-alcohol, se llega a una vitamina. Por inclusión en el complejo de ácido fosfórico, el todo se transforma en codiastasa y si se liga todo ello a una proteína, se obtiene una diastasa.

Quién hubiera supuesto hace tres años que el inocente pigmento del suero de la leche que con éste era ingerido por los cerdos, iba a resultar una vitamina y probablemente una prediastasa. Era difícil vaticinar tal cambio de jerarquía bioquímica. Esta es una nueva prueba de que en la Naturaleza, todo responde a un plan en cuyo conocimiento apenas nos iniciamos.

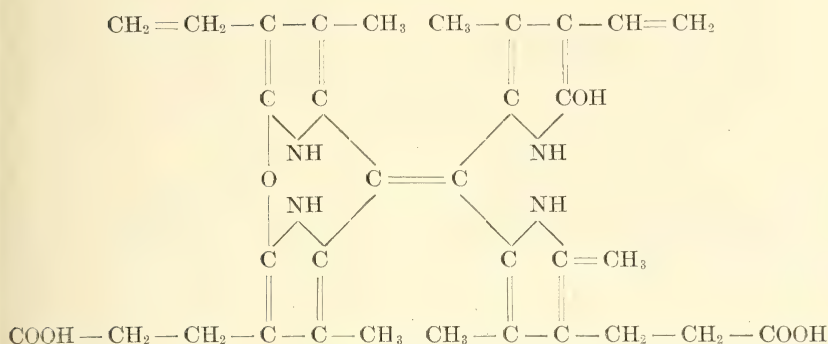
VII. — Pigmentos regresivos

La glándula hepática, entre las diferentes e importantes funciones a su carg,o tiene la biligénica. La bilis está fundamentalmente constituída por sales biliares y pigmentos.

El pigmento biliar más importante es la bilirubina.

Todos los otros colorantes biliares son derivados de la bilirubina: biliverdina (verde), colecianina (azul), bilipurpurina (rojo), coletelina (amarillo), biliprasina (verde), etc. La urobilina es también un derivado de la bilirubina.

Bilirubina (*Fischer y Röse*).



Los pigmentos biliares proceden, a su vez, de los pigmentos sanguíneos y constituyen el término final del metabolismo de la hemoglobina. De una manera muy esquemática podríamos decir que cuando los glóbulos rojos han cumplido el ciclo de su vida, son destruídos en el bazo y otros órganos. Su pigmento es transformado con amputación del átomo de hierro, en pigmentos biliares, algunos afirman que tal transformación se inicia en el mismo bazo, prosigue en el sistema retículoendotelial, donde se separa el hierro y termina en el hígado.

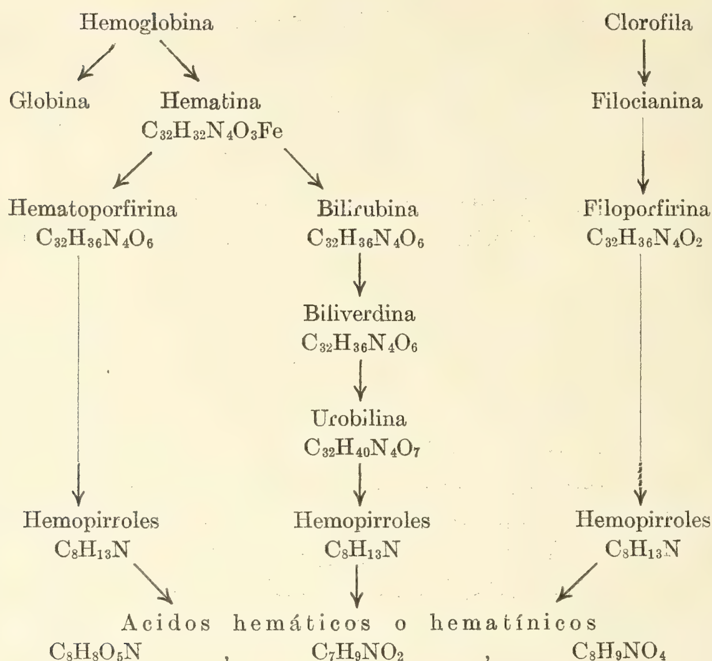
Lo que nos interesa destacar es que los pigmentos biliares están destinados a ser eliminados al exterior con las heces, es decir, que son productos de excreción originados por regresión de los pigmentos sanguíneos. El organismo derrocha pigmentos biliares que para él son ya productos tóxicos, pero economiza el hierro de la molécula de hemoglobina, el cual sigue cumpiendo sus funciones bioquímicas. Esto invita a preguntarse: ¿por qué el organismo realiza tan estricta economía de hierro al propio tiempo que derrocha moléculas tetrapirrólicas? La respuesta no puede hoy ser sino hipotética.

Otro dato interesante es el que concierne a las relaciones genéticas entre los pigmentos clorofílicos, hemáticos y biliares.

Los productos finales de sus respectivos metabolismos (hemopirroles y ácidos hematínicos) son iguales o parientes muy cercanos.

También debemos mencionar entre los pigmentos regresivos importantes, a las porfirinas, moléculas tetrapirrólicas originadas por regresión de los pigmentos sanguíneos después de haber perdido el hierro.

Pigmentos clorofílicos, hemáticos y biliares.



Se discute hoy si las porfirinas naturales son en realidad productos de regresión destinados a ser eliminados del organismo animal o si a la inversa constituyen moléculas de transición sobre cuya base se generaría luego la hemoglobina. Lo cierto es que cuando por exceso de producción o insuficiente eliminación, se acumulan en el organismo las porfirinas, se observan fenómenos de intoxicación denominados *porfirias.*

Las porfirinas son fotosensibilizadores, vale decir, que manifiestan su acción tóxica en presencia de la luz. Cuando se inyecta a un topo porfirinas de las heces o de la orina y se expone al animal a las radiaciones luminosas, experimenta intoxicación más o menos grave según la dosis. La misma cantidad no molesta a un topo mantenido en la oscuridad. Se trata, pues, de sensibilizadores fotodinámicos.

Tienen vinculación las porfirinas con el proceso de la calcificación. Los pigmentos oscuros que en ciertos casos se depositan en huesos y dientes son porfirinas. La patología describe casos diferen-

tes y muy interesantes de porfirias (congénitas, agudas, tóxicas, etc.). En todos ellos, la acción tóxica se registra únicamente en presencia de la luz.

No siendo posible insistir con más ejemplos, pasamos a considerar los pigmentos defensivos.

VIII. — Pigmentos defensivos

Los organismos vivientes, vegetales y animales, disponen de mecanismos diversos para luchar contra el medio externo. La transpiración, por ejemplo, constituye una defensa de plantas y animales contra el calor solar.

Como el organismo humano está expuesto a las agresiones actínicas, tiene organizadas defensas permanentes y puede preparar defensas de emergencia.

Las diferentes radiaciones de origen solar, penetran en forma distinta a través del cuerpo humano. Así, según Guillaume, las radiaciones infrarrojas atraviesan espesores de tejido humano que pueden alcanzar varias decenas de centímetro, las radiaciones de la luz visible espesores de varias decenas de milímetro y los R. U. V. de centésimas de milímetro.

Sabido es que las radiaciones de menor poder penetrante, las U. V., son las más peligrosas.

Contra la agresión de los rayos químicos o U. V. el organismo humano se defiende por una sucesión de filtros: uno mucoso, uno pigmentario y otro dérmico. De los tres, el que tiene realmente importancia es el filtro de pigmentos melánicos. La hipótesis de la defensa pigmentaria explicaría porqué la piel de los habitantes de zonas tórridas es oscura o negra y la de los habitantes de zonas frías es muy blanca.

La teoría de la pigmentación defensiva tuvo por origen el conocido experimento de Finsen quien trazó sobre su antebrazo una banda con tinta china y expuso esa región durante 3 horas a la luz del sol. Se produjo un eritema en la región expuesta al sol, exceptuando la zona cubierta con tinta china.

En un segundo experimento, varios días después del primero, Finsen expuso al sol la misma región y comprobó que se producía un eritema en la zona que antes estuvo protegida por la tinta china y que no estaba ya pigmentada, pero que no se producía en la región pigmentada por la primera agresión actínica.

El problema bioquímico referente a la formación de las melaninas es sumamente interesante y dista mucho de estar esclarecido.

Se designa genéricamente melaninas a diversos pigmentos oscuros o negros que al estado de gránulos se hallan en diferentes células y que generalmente son de origen ectodérmico. Melaninas son los pigmentos de cabellos, piel, de la tinta de la sepia y calamar, de los tumores de los caballos blancos, de la lana, crin y piel de los animales, siempre que la lana, crin y piel sean oscuras o negras.

Practicando un corte histológico en la piel de un negro o de un sujeto de raza blanca, pero de piel muy pigmentada, se observa al microscopio en las células de la capa profunda de los cuerpos mucosos de Malpighi, la presencia de gránulos de melanina. Se acepta que ese pigmento se origina y almacena en órganos especiales designados melanoblastos.

Extraídas por métodos especiales, las melaninas se presentan en forma de polvo pardo oscuro o negro, insoluble en los solventes comunes. Ofrecen gran resistencia a casi todos los reactivos. Se logra disolverlas en álcalis concentrados. El cloro, agua oxigenada y otros oxidantes, les hacen adquirir tonos claros y terminan por decolorarlas.

En punto a su constitución química, es muy poco lo que se sabe.

Contienen C. N. H. O. S. y P. en proporciones muy variables.

Por enérgica hidrólisis (36 horas al autoclave a 120° con 20 veces su peso de NaOH al 10 %) se descomponen las melaninas produciendo tres fragmentos de su molécula originaria: *a*) NH_3 y aminas; *b*) un producto negro brillante que representa el núcleo pigmentario primitivo, y *c*) diversos aminoácidos.

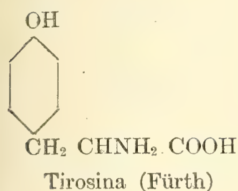
Su origen proteico que denuncia la presencia de esos aminoácidos, es unánimemente admitido. Algunos autores afirman que las melaninas se originan por oxidación y condensación de partes cíclicas de la molécula proteica. Diversas hipótesis se han emitido para explicar cuáles son las sustancias madres de las melaninas. Fürth afirmó hace tiempo que la molécula generadora era la tirosina, que oxidada por influencia de una diastasa, la tirosinasa, producía cuerpos oscuros o negros.

Neuberg, Jäger y otros, fundándose en el hecho de que los extractos de tumores melánicos oxidan y colorean rápidamente la adrenalina, suponen que ésta es la sustancia melanógena.

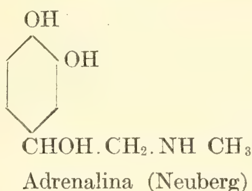
Bloch observó que los cortes de piel, en presencia de una solución de dioxifenilalanina (por abreviación « dopa ») presentan color ne-

gro en los gránulos de los melanoblastos. Opina que interviene una oxidasa, la dopaoxidasa. La dopa generaría las melaninas. Por su parte, Angeli, Rondoni y otros investigadores, han comprobado que se pueden obtener experimentalmente melaninas in vivo por inyección al conejo gris, por ej., de pirrol o de ácido α carbopirrólico en el tejido subcutáneo. En los conejos blancos no se logra la pigmentación.

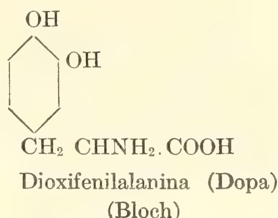
Presuntos cuerpos melanógenos.



Tirosina (Fürth)



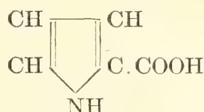
Adrenalina (Neuberg)



Dioxifenilalanina (Dopa) (Bloch)

Melanogénesis experimental « in vivo ».

Acido α carbopirrólico (Angeli)



No podemos detenernos en otros tipos de formación de pigmentos melánicos: melanosis arsenical, melanosis dérmica (enfermedad de Addison), melanosis malárica, pues no constituyen, como en el caso de la melanosis actínica, ejemplos clásicos de defensa pigmentaria. A quien se interese por este asunto, recomiendo el trabajo de Dejust (Capítulo I del libro *Química fisiológica de la piel.* París, 1928).

Tampoco podemos hacer otra cosa que mencionar esos pigmentos que aparecen en los casos de adaptación al medio y que hemos estudiado como ejemplos de mimetismo, de *isocromía.*

IX. — Pigmentos de flores, frutos y bacterias

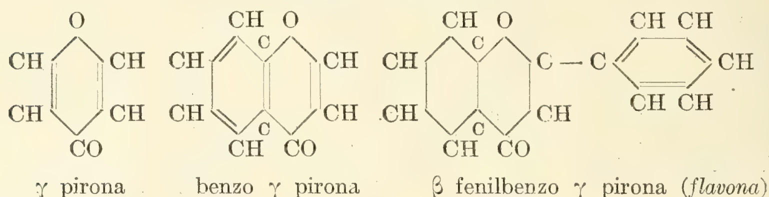
Las hermosas coloraciones de flores y frutos con que se adorna la naturaleza han sido objeto de estudios químicos para conocer su composición e imitarlos por síntesis y de estudios fisiológicos para establecer su función.

Pocas palabras, por razones de tiempo, podemos dedicar a la parte que calificaremos de más elegante de esta exposición. Nos vamos

a referir a los colorantes amarillos flavónicos y a las tonalidades azules y rojas de las flores que son debidas a las antocianinas y a los taninos protocatéquicos. Desde el punto de vista químico, los pigmentos de flores y frutos presentan estrecho parentesco.

Se generan por acoplamiento de la γ pirona con la benzo γ pirona, de donde resulta la β fenilbenzo γ pirona, o sea la flavona.

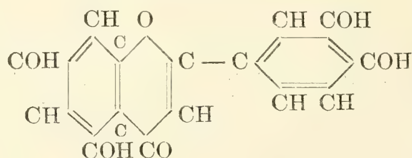
Pigmentos flavónicos.



γ pirona — benzo γ pirona — β fenilbenzo γ pirona (*flavona*)

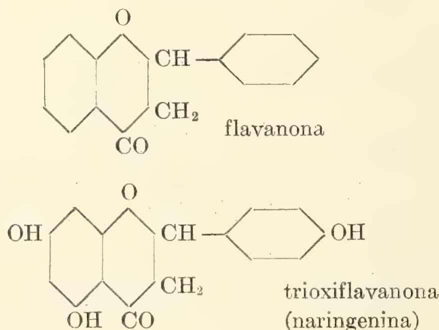
Las oxiflavonas resultan de la substitución en la flavona de átomos de hidrógeno por oxhidrilos fenólicos. Así, por ejemplo, el pigmento de la resedá es la luteolina o tetroxiflavona.

Tetroxiflavona o luteolina.



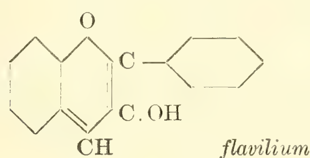
Por adición de dos átomos de hidrógeno a la flavona, se obtiene la *flavanona*. La materia colorante de la naranja llamada *naringenina*, es la trioxiflavanona.

Flavanona y pigmentos flavanónicos.



De las antocianinas nos limitaremos a recordar que son los colorantes rojizos y azulados de las flores y frutos y que como los pigmentos flavónicos se hallan en los vegetales al estado de glucósidos, unidos a la glucosa, ramnosa, galactosa y a ácidos orgánicos tales como el malónico, oxicinámico, etc. Estos complejos se denominan *antocianidinas.* Las antocianidinas derivan, según Willstätter, de un cromógeno, el *flavilium,* que posee caracteres básicos muy pronunciados.

Cromógeno antocianidínico.



Aquí es donde se comprueba el estrecho parentesco químico entre los pigmentos flavónicos y antociánicos a que habíamos aludido. Las investigaciones modernas de Combe, Nicolas, Everest, etc., explican que por procesos de óxido-reducción se generan en las plantas los pigmentos a que acabamos de hacer referencia.

El investigador japonés Kosaka ha comprobado que las plantas expuestas a la luz transpiran más cuanto mayor sea la cantidad de pigmentos antociánicos en sus hojas. Los pigmentos hacen que sea mayor la absorción de calor y por ende la transpiración. La opinión de Kosaka coincide con la de Stahl, Smith, etc.

En punto a los pigmentos bactéricos, glosaré lo que expresábamos con mi distinguido ex alumno, amigo y colega, Profesor Arturo Solari: « . . . el problema de la formación de los pigmentos en las bacterias cromógenas, es tan complejo y oscuro como interesante. Complejo y oscuro por la diversidad de factores que concurren a la aparición o desaparición de los colores que ofrecen determinadas especies microbianas e interesante desde el punto de vista fisiológico, bacteriológico y químico.

Interesa a los fisiólogos conocer el mecanismo de la pigmentogénesis y su función en la vida de los microbios. A los bacteriólogos,

los colores de determinadas bacterias sirven para su clasificación e identificación y a los químicos esas mismas sustancias pigmentadas ofrecen vasto campo de investigación en punto a su arquitectura molecular, como a las condiciones en que se originan.

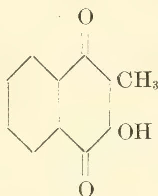
Varios pigmentos bactéricos han sido ya aislados al estado de relativa pureza (prodigiosina) y otros obtenidos en forma cristalizada (piocinina), con lo que se ha facilitado grandemente los estudios experimentales acerca de su función bioquímica.

Algunos investigadores asignan gran importancia a los pigmentos en el proceso de respiración de las bacterias. Friedheim va aún más lejos cuando afirma haber demostrado que el pigmento azul del bacilo piociánico posee la propiedad de catalizar la respiración de este germen. Sostiene que el b. piociánico cultivado en condiciones tales que no permitan la formación de pigmento, se comporta como un anaerobio, casi no consume oxígeno y acusa un cociente respiratorio muy bajo. La adición de piocianina cristalizada aumenta la respiración hasta 2400 % y eleva el cociente respiratorio hasta la unidad.

Destaca Friedheim la circunstancia de que esa acción catalítica del pigmento, sólo se manifiesta sobre los bacilos cuando éstos se ven privados de todo material nutritivo exógeno. Ha hecho extensivas este autor sus investigaciones al Bacillus Violaceus, pequeña bacteria móvil, saprofita del agua, que produce un hermoso color violeta. Siguiendo el método de Wrede para aislar la prodigiosina, obtuvo el pigmento del b. violaceus al estado libre. Consiguió cepas no coloreadas sobre las que en determinadas condiciones experimentales (sin alimento exógeno, pH 7,2 temperatura 24°, etc.) hizo actuar el pigmento violeta. También en el caso de esta bacteria registró marcado aumento del proceso respiratorio (hasta 234 %). Friedheim afirma que el pigmento del b. violaceus se conduce en cuanto a sus funciones fisiológicas como la piocianina. Acelera la oxidación de las sustancias del cuerpo bacilar que parecen ser los lipidos... ».

En las investigaciones efectuadas en mi cátedra en colaboración con el Dr. Solari, logramos hacer aparecer y desaparecer a voluntad el pigmento de una bacteria, el Rhodococus roseus. Establecimos que ciertos glucidos: glucosa, levulosa, maltosa, lactosa y sacarosa, estimulan marcadamente la cromogénesis, como lo hacen también ciertos cationes, en nuestro caso el hierro a cierta dosis.

El phtiocol, pigmento amarillo pálido, aislado por Anderson y Newman en 1933 del b. tuberculoso, es el oxidante de un sistema reversible. El phtiocol es la 2 metil, 3 hidroxil, 1.4 naftoquinona.



X. — Síntesis y conclusiones

Con esta rapidísima revista panorámica a vuelo de avión, me he propuesto hacer resaltar lo que sostenía al iniciarla, es decir, que los edificios moleculares construídos por los organismos vivientes, a los que se les ha reservado mayor jerarquía bioquímica, son los pigmentos.

Ofrecen los pigmentos campo de estudio e investigación del más alto interés bioquímico.

Se conoce la importancia fundamental de los pigmentos clorofílicos, que con dos moléculas tan sencillas como el CO_2 y el H_2O que encuentran en el medio exterior, elaboran diversos glucidos.

Sobre estos cimientos químicos la planta edifica luego los lipidos, entre los que incluimos a los esteroles y fosfatidos; los protidos, los glucósidos, alcaloides, perfumes, colores flavónicos, antociánicos, etc., vitaminas, hormonas, auxinas y diastasas.

Los pigmentos sanguíneos constituyen un maravilloso dispositivo para que una pequeña cantidad de sangre vehiculice el oxígeno indispensable para el metabolismo diario.

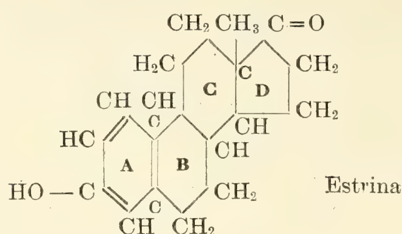
Las notables investigaciones de Kuhn nos presentan interesantísimas e insospechadas relaciones genéticas entre pigmentos, vitaminas y diastasas.

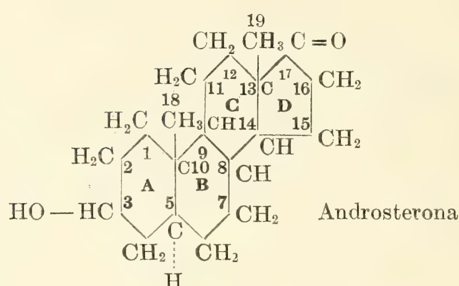
En punto a los pigmentos de flores, frutos y bacterias, la bioquímica tiene la palabra para explicarnos mejor su función natural.

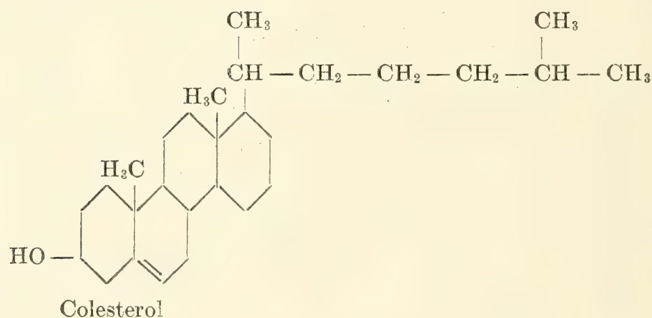
La ciclización molecular en los organismos representa, pues, uno de los procesos bioquímicos de mayor trascendencia.

Se originan así pigmentos, vitaminas, alcaloides, hormonas, etc., y en esa ciclización se comprueba una dirección arquitectónica en la que se pone de relieve la primacía de ciertos núcleos, como el esque-

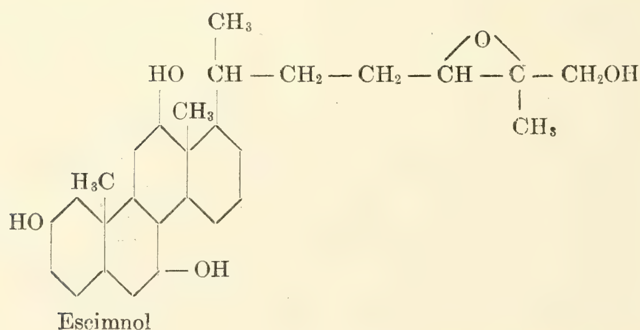
leto del ciclopentenefenantreno que se repite en la molécula de los esteroles, ácidos biliares, geninas, hormonas sexuales, etc.



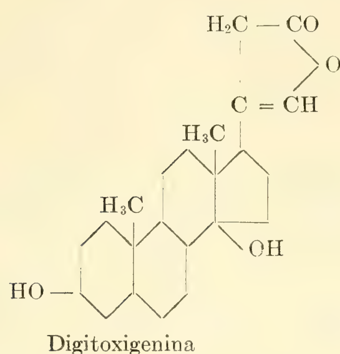




Colesterol



Escimnol



Digitoxigenina

Algunos investigadores sostienen que ciertos perfumes animales y vegetales podrían originarse a partir de las moléculas de esteroles por amputación de la cadena alifática, adquiriendo luego por oxidación en unos casos la función cetónica y en otros la función ácida. También a expensas de los esteroles se originarían algunas hormonas sexuales.

Buenos Aires, Setiembre de 1936.

SOBRE UN NUEVO RADICAL LIBRE Y COLOREADO DERIVADO DEL CIANÓGENO

POR

ENRIQUE V. ZAPPI Y RAFAEL LABRIOLA

Prosiguiendo nuestras anteriores investigaciones sobre la constitución de los halogenuros de cianógeno [1], al intentar reproducir con el yoduro de cianógeno las antiguas experiencias efectuadas por Cloez [2], con el cloruro de cianógeno para la obtención de la «cianetolina», nos hallamos frente a un fenómeno que parece haber pasado desapercibido a todos los investigadores, pues no lo hemos encontrado descripto en la extensa bibliografía consultada.

Cuando, en un tubo privado de aire mediante una corriente de nitrógeno, se vierte en una solución de alcoholato de sodio otra de yoduro de cianógeno en éter, se observa que al cabo de algunos instantes el líquido, primitivamente incoloro, comienza a colorearse y toma pronto un color amarillo obscuro.

Si en ese momento se deja entrar una pequeña cantidad de aire o unas burbujas de oxígeno, el líquido se decolora y comienza a aparecer un precipitado. Mas en cuanto todo el oxígeno ha sido consumido la coloración aparece nuevamente, pudiendo repetirse el fenómeno de la coloración-decoloración muchas veces hasta que todo el yoduro de cianógeno y el etilato de sodio hayan reaccionado.

Este fenómeno, completamente comparable al que producen las soluciones que contienen trifenilmetilo, u otros radicales libres ha de ser originado por las mismas causas, es decir por la liberación de un radical de valencia anormal.

Así como en el caso del trifenilmetilo la decoloración por acción del aire es acompañada por la formación de un peróxido insoluble,

(1) ZAPPI, *Anales Asoc. Quím. Argentina*, 1933, **21**, 37; 1931, **19**, 34; 1930, **18**, y 12.

ZAPPI, *Bull. Soc. Chim. France*, 1931, **49**, 397; 1930, **47**, 453, y 537.

(2) CLOEZ, *Lieb. Ann.* 1957, **102**, 355.

en nuestro caso se origina también un precipitado blanco que se halla formado por una mezcla de diversas sales.

En orden de importancia ellas son:

Yoduro, cianuro y carbonato de sodio y sales de amonio.

No hay yodatos ni cianatos.

Entre los compuestos orgánicos se identifican perfectamente el aldehído etílico, la urea, el yodoformo y la cianamida.

Abandonado a sí mismo el líquido, en ausencia de aire, se aclara al cabo de unas cuantas horas, quedando fijo en un tono amarillo.

También se forma un precipitado de un color algo más amarillento, pero cuya composición es idéntica a la del anterior, con la diferencia de contener mayores cantidades de yodoformo.

Unas proporciones convenientes para observar los hechos descriptos, son las siguientes:

Yoduro de cianógeno (0,01 mol.) gr. 1,5. - Eter, cm^3 15.

Sodio metálico (0,02 mol.) gr. 0,46. - Alcohol 96°, cm^3 10.

Las tentativas para fijar el radical no nos han dado por ahora ningún resultado positivo y en consecuencia para explicar lo que sucede es preciso tener en cuenta las condiciones en que la reacción se efectúa.

La presencia ed alcoholes primarios o secundarios es indispensable, pues la reacción no se realiza con los alcoholes terciarios, ni con metílico, bencílico o con fenol, es decir con alcoholes no oxidables.

El sodio, el potasio, el zinc o el mercurio al estado metálico y en medio etéreo, no producen la reacción observada.

Con el mercurio se comprueba la formación de yoduro y cianuro de mercurio.

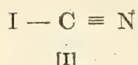
Tampoco depende exclusivamente de la función nitrílica, pues ni el benzo-nitrilo ni el aceto-nitrilo la provocan.

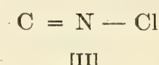
No es debido a la acción del yodo positivo, que pudiera formar algún hipoyodito inestable y coloreado, pues la adición de soluciones de ácido hipocloroso vertido sobre el alcoholato en alcohol adicionado con pequeñas cantidades de yoduro de sodio, no producen el fenómeno observado.

Tampoco lo originan, ni las soluciones de yodo, ni de cloruro de yodo o de yodoxicianógeno, compuestos todos ellos que contienen yodo positivo.

Como ni el cloruro ni el bromuro de cianógeno, tampoco producen el fenómeno observado, no queda más explicación que atribuirlo

a la estructura propia del yoduro de cianógeno al cual según nuestros estudios anteriores (1), le corresponde una constitución nítrica [I], en oposición a la del cloruro de cianógeno, que debe ser isonitrílica [II].

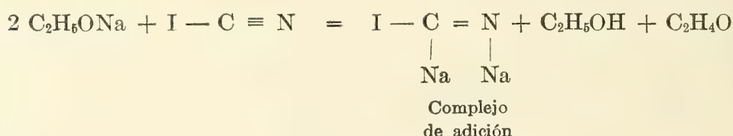




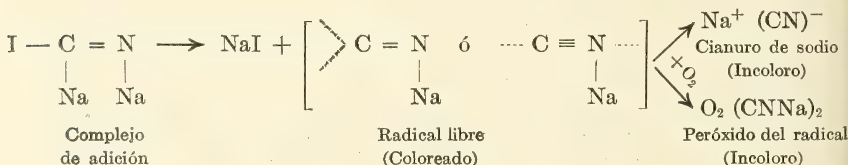
Para no complicar aún más la explicación de los hechos, introduciendo consideraciones basadas en las fórmulas electrónicas de los halogenuros citados, construiremos nuestra interpretación sobre las estructuras clásicas que hemos adoptado.

Teniendo en cuenta, además de los cuerpos cuya formación comprobamos, el hecho experimental de que la reacción de coloración, exige dos átomos de sodio por cada molécula de yoduro de cianógeno para producirse totalmente, explicamos la génesis del radical coloreado mediante una interpretación que comprende las siguientes fases:

1º — El alcoholato de sodio cede el metal, formándose un complejo de adición con el yoduro de cianógeno, al tiempo que los etoxilos se dismutan en alcohol y aldehído:

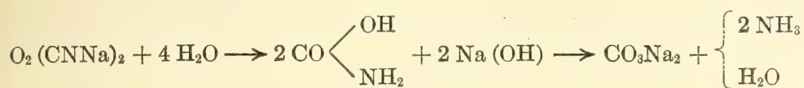


2º — El complejo de adición cede yoduro de sodio y se origina el radical de valencia anormal y coloreado, que después de unas horas se decolora por reordenarse en cianuro de sodio:



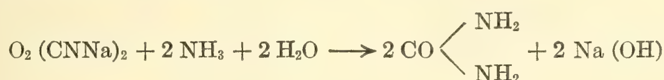
3º — El color desaparece por entrada de aire, cuyo oxígeno forma con el radical un peróxido inestable, que se hidroliza rápida-

mente, pasando por ácido carbámico, para dar carbonato de sodio y amoníaco:



$$O_2(CNNa)_2 + 4\,H_2O \longrightarrow 2\,CO\left\langle\begin{matrix}OH\\NH_2\end{matrix}\right. + 2\,Na(OH) \longrightarrow CO_3Na_2 + \left\{\begin{matrix}2\,NH_3\\H_2O\end{matrix}\right.$$

4º — Otra porción de peróxido del radical se combina con el amoníaco para dar urea:



$$O_2(CNNa)_2 + 2\,NH_3 + 2\,H_2O \longrightarrow 2\,CO\left\langle\begin{matrix}NH_2\\NH_2\end{matrix}\right. + 2\,Na(OH)$$

Nos permitimos reservar por ahora los razonamientos en que fundamos la estructura propuesta para el nuevo radical aislado, por considerar prematura una discusión más profundizada de la cuestión.

Pensamos que dentro de la sencillez de su composición química el nuevo radical, ya sea con carbono bivalente o con el carbono trivalente y el nitrógeno tetravalente, constituye un caso único y que la determinación de su fórmula de estructura ha de presentar todas las dificultades de un verdadero enigma.

Entretanto proseguimos nuestros trabajos con la esperanza de fijar el nuevo radical en una forma estable que permita estudiarlo con seguridad.

Contribución Nº 21
Departamento de Quimica Orgánica
Facultad de Quimica y Farmacia
La Plata (Argentina)

HESPERIOIDEA ARGENTINA VII

ESPECIES Y PROCEDENCIAS ADICIONALES PARA LA FAUNA ARGENTINA

Por KENNETH J. HAYWARD
F. R. E. S., F. R. G. S., F. Z. S.

Pyrrhopyge zenodorus Godm. y Salv.

1893 Godman et Salvin, « Biol. Centr. Amer Rhop. », 2: 274, Pl. 73, figs. 1-3.
1931. Bell, « Journ. N. Y. Ent. Soc. », 39: 428, Pl. 35, fig. 10 (genitalia).

Alas negro-azuladas, orlas blancas, oscuras hacia el ápice del ala anterior. Cabeza, palpos, parte anal, rojo-anaranjados; collar rojo; patagia, tégula y pectus negro-azulados.

Patria: Méjico, Guatemala, Costa Rica, Perú, Honduras Británica y Argentina. ♂ en Col. Hayward, ex col. Bosq (Misiones) y ♀ en la col. Museo Argentino de Ciencias Naturales de Posadas (Misiones).

Pyrrhopyge pelota Plötz.

Nueva procedencia: el Territorio del Chaco (Fontana, *Daguerre*, Nov. 1934, en col. Mus. Arg. de Ciencias Nat.).

Pyrrhopyge styx Mschlr.

1878. Moschler, « Verh. Zool. Gesel. Wien », 28: 113.
1879. *anina* Plotz, « Stett. Ent. Zeit », 40: 583 (como sinónimo de *styx*).
1931. Bell, « Journ. N. Y. Ent. Soc. », 39: 469, Pl. 39, fig. 47 (genitalia).

Alas negro-verdosas, las orlas blancas, oscuras hacia el ápice del ala anterior y rojas en el ángulo anal. La parte anal del ala posterior roja. Cabeza, palpos, collar y extremidad anal rojos; pectus, patagia y tegulae negro-azulados.

Patria: Colombia, Bolivia, Brasil y Argentina. ♂ en col. Hayward, ex col. Bosq, de Loreto en Misiones.

Mysoria pallens Mab. fa. **venezuelae** Scudd.

Nueva procedencia: Concordia, Entre Ríos (*Hayward*, II, 1938).

Goniurus proteus L.

Nueva procedencia: Pampa Central (Colonia Barón, *P. Benson*).

Goniurus dorantes Stoll.

Nueva procedencia: Chaco (*Daguerre*, x-xii, 1935, en col. Mus. Arg. Ciencias Nat.).

Goniurus eurycles Latr.

Nueva procedencia: Salta (Col. Mus. Arg. Ciencias Nat.).

Goniurus evenus Mén.

En algunos ejemplares se encuentra un punto del color de fondo sobre la faja blanca transversal del ala anterior en su faz superior sobre la nervadura M3. Hay un ejemplar de esta variación de procedencia Misiones en la colección del Museo Argentino de Ciencias Naturales.

Nascus ocellatus Hayw.

Nuevas procedencias: Tucumán (col. Breyer) y Salta (col. Rosheweigh en col. Mus. Arg. de Ciencias Nat.).

Oechydrus ochrilinea Schaus.

1902. Schaus, « Proc. U. S. Nat. Mus. », p. 429.

Difiere de *Oechydrus chersis* Herrich-Schaffer por tener la faja transversal del ala anterior de color amarillo en vez de blanco.

Patria: Perú y Argentina. Salta, col. Hayward.

Pythonides scybis Godm. et Salv.

1894. Godman & Salvin, « Biol. Centr. Amer. Rhop. », 2: 363 con fig.

Pardo oscuro con un matiz violeta. En el ala anterior hay tres puntos hialinos subapicales en línea oblicua distal y otro en el disco del ala. La base de ambas alas más oscura y el ala postbasal del ala anterior con unas manchas redondeadas de pardo muy oscuro. Además el área costal es de este color, terminándose en una manchita basad a los puntos hialinos subapicales y continuadac omo una línea en forma curva hasta el punto discal. En ambas alas hay una faja oscura ante-marginal. En el ala posterior hay una línea fina e irre-

gular postdiscal. En la faz inferior el color es más claro y la mitad anal del ala posterior se encuentra cubierta con escamas gris-azules. Hay áreas pardo claras en el ala anterior a $\frac{1}{2}$ costa, después de los puntos subapicales y en el ápice. En la mitad exterior de la mitad inferior de esta ala el color es también claro.

Patria: Méjico hasta Bolivia y en la Argentina de Puerto Bemberg en Misiones (Hayward).

Xenophanes tryxus Cr.

Nueva procedencia: Córdoba (col. Ruschew en col. Mus. Arg. de Ciencias Nat.).

Pholisora fungoides (Hayw.)

1933. *Systasea* (?) *fungoides* Hayward, « Rev. Soc. Ent. Arg. 5: 243, lám. 26, fig. 8, y lám. 20, fig. 12 (genitalia).

Esta especie debe ser colocada en el género *Pholisora* Scudder.

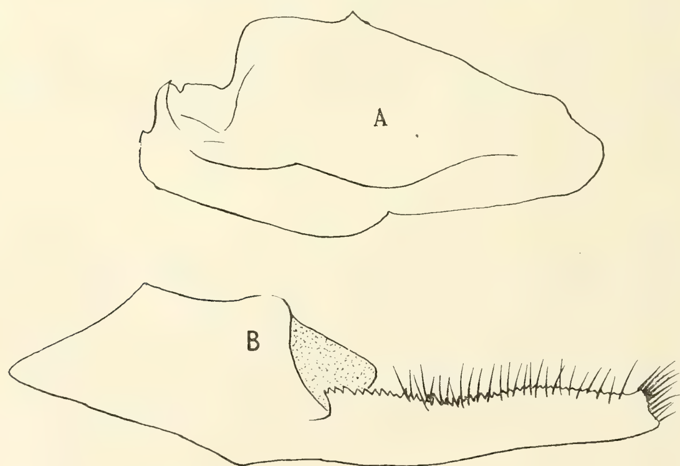
Pholisora dentivittata (Hayw.)

Nueva procedencia: Misiones (col. Mus. Arg. de Ciencias Nat.).

Pholisora vulgaris (Hayw.)

Nuevas procedencias: Tucumán y Chaco (Daguerre). (Col. Mus. Arg. de Ciencias Naturales).

Camptopleura thrasybulus F. Fig. 1.



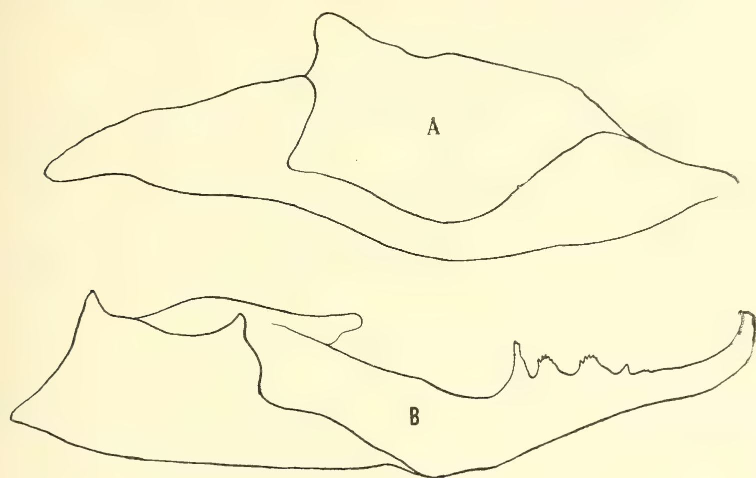
1. — *Camptopleura thrasybulus*; válvulas (a) derecha y (b) izquierda.

Nueva procedencia: Misiones (Hayward).

Camptopleura theramenes Mabille. Fig. 2.

1877. Mabille, « Petit Nouv. Ent. », p. 166.

Es muy parecida a *thrasybulus*, generalmente algo más grande y de un color de fondo pardo más claro, el diseño menos azul (más grisáceo), menos resaltante, y el borde externo del ala anterior



2. — *Camptopleura theramenes*; válvulas (a) derecha y (b) izquierda.

o sin diseño o con el diseño muy reducido. No tiene los puntos y manchitas del color de fondo anillados con líneas azules (y por lo tanto muy resaltantes) que se encuentran en *thrasybulus*.

Difiere principalmente en su faz inferior, que es casi color pardo café y sin el diseño de puntos y manchas oscuras y gris-violetas que se encuentran en *thrasybulus*.

Se puede separar las dos especies con facilidad comparando los genitales de sus machos. Hay un dibujo de los genitales de *theramenes* en *Biologia Centrali Americana* Rhopalocera 2.

Patria: Méjico hasta el sur de Brasil y de Misiones en la Argentina.

Gorgythion pyralina Mschlr.

Nueva procedencia: Tucumán (Tafí Viejo, col. Mus. Arg. de Ciencias Naturales).

Chiomara asychis Cr.

Nueva procedencia: Pampa Central (Colonia Barón, P. Benson).

Erynnis funeralis Scudd.

Nueva procedencia: Tucumán (Tafí Viejo, Col. Mus. Arg. de Ciencias Naturales).

Erynnis gesta H-S.

Nueva procedencia: Salta (Daguerre, Metán, 1935, en col. Mus. Arg. Ciencias Nat.).

Heliopetes pastor Fldr.

Nueva procedencia: Salta (col. Mus. Arg. de Ciencias Nat.).

Pyrgus orcus Cr.

Nueva procedencia: Territorio del Chaco (col. Mus. Arg. de Ciencias Naturales).

Pyrgus notata Blanch.

Nueva procedencia: Santiago del Estero (col. Mus. Arg. de Ciencias Naturales).

Atrytone mella Godm. et Salv.

Nueva procedencia: Corrientes (col. Rosheweig en col. Mus. Arg. de Ciencias Naturales).

Lerodea dysaules Godm. et Salv.

En *Rev. Soc. Ent. Arg.* 6: 125 (1934) anoté esta especie como dudosa para la fauna argentina, basando mi anotación sobre Giacomelli, *Enum. Sist. y Anot. sobre los Lep. de Villa Cabrera, Córdoba, Rev. Univ. Córd.* 10, 1923.

Durante los últimos meses han pasado por mis manos varios ejemplares de *Lerodea* clasificados por el Prof. Giacomelli como *dysaules* Godm. y Salv., pero todos resultan ser de la especie *tesera* Schaus. Por lo cual es probable que *dysaules* (habitat Méjico y Arizona) no vuele en la Argentina. (El nombre correcto de *dysaules* (Godm. & Salv. 1900) es *arabus* (Edwards, Pap. 2: 26, 1882).

Lerodea eufala Edw.

Nueva procedencia: Pampa Central (Colonia Barón, P. Benson).

Calpodes ethlius Cr.

Nueva procedencia: Pampa Central (Colonia Barón, P. Benson).

" Prenes " nero F., fa. **fufidia** Hew.

Nuevas procedencias: Tucumán (Tafí Viejo) y Salta (Mus. Arg. de Ciencias Naturales).

" Prenes " nyctelius Latr.

Nueva procedencia: Tucumán (Tafí Viejo, col. Mus. Arg. de Ciencias Naturales).

Thespieus argentina Draudt.

Nueva procedencia: Tucumán (Tafí Viejo y Tucumán, col. Mus. Arg. de Ciencias Naturales).

Thespieus xarippe Btlr.

Esta especie fué mencionada como de la Argentina en *Hesperioidea* III, que aparecerá durante el transcurso de este año. Nueva procedencia. Buenos Aires (Zárate, col. Mus. Arg. de Ciencias Naturales).

Thespieus ethemides Burm.

1878. *Thracides ethemides* Burmeister, « Descr. Phys. Rép. Arg. », 5: 279.
1923. *Thespieus dissultus* Draudt, en « Seitz Macrolep. », 5: 954, Pl. 185 a.

Durante la revisión de la colección de *Hesperiidae* del Museo Argentino de Ciencias Naturales de Buenos Aires, encontré el tipo de la *Thracides ethemides* Burmeister. Es un macho de Misiones.

Con este descubrimiento es ahora posible colocar esta especie del Dr. Burmeister en el género al cual corresponde, o sea *Thespieus* y de comprobar que se trata del mismo insecto descripto posteriormente por Draudt como *dissultus*.

Cobalus mubevensis Bell.

1931. Bell, « Journ. N. Y. Ent. Soc. », 39: 523, Pl. 30, fig. 1 (genitalia).

♀ Color de fondo pardo. En el ala anterior hay tres puntitos subapicales en hilera oblicua (a veces falta uno o todos), y en el fin de la célula dos puntos blancos hialinos algo lineales. En el disco

del ala se encuentra una manchita cuadrada generalmente cóncava en su lado distal y otro chico y redondeado más distad en la segunda célula mediana. Debajo de la mancha cuadrada hay una cuña de color más claro, algo amarillento en algunos ejemplares. En el ala posterior hay rastros de una hilera postdiscal de puntitos claros.

El diseño de la faz inferior es igual al de la faz superior, pero sobre un fondo algo más claro, las manchas y puntos más grandes, especialmente en el ala posterior, donde la hilera postdiscal está bien marcada, el punto anal lo más grande, y donde también se encuentra en la célula discoidal un punto pequeño claro. Expansión alar ♀♀ 32-34 mm.

Habitat. Brasil, Paraguay y Argentina. Mis ejemplares argentinos son de Misiones.

Euroto compta Btlr.

Nueva procedencia: Salta (col. Mus. Arg. de Ciencias Naturales).

Género **Mnasilus** Godm. et Salv.

1900. Godman & Salvin, « Biol. Centr. Amer. Rhop. », 2: 569.

Sin estigma; tibias medianas, con espinas.

Se puede distinguir este género nuevo para nuestra fauna, fácilmente de los demás géneros vecinos por tener un pincel de pelos en la faz superior del ala anterior, arriba de la nervadura analis.

Mnasilus pencillatus Godm. et Salv. Fig. 3.

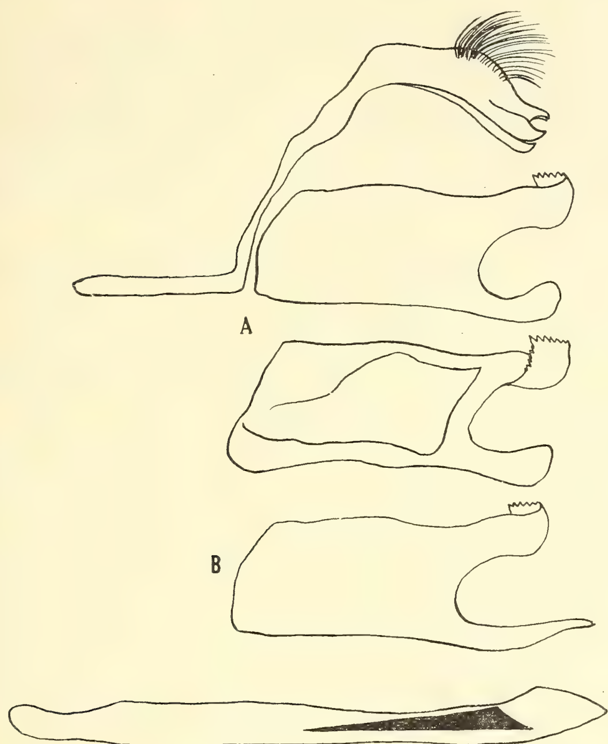
1900. Godman & Salvin, « Biol. Centr. Amer. Rhop. », 2: 570. Pl. 100, figs. 39-42.

Color de fondo pardo negruzco, en algunos ejemplares más bien pardo. Pelos de la cabeza, base de las antenas, tórax, abdomen y base de las alas de pardo amarillo-ocre. Ala anterior con una hilera oblicua de manchas amarillentas entre el ápice y medio del margen interior, siempre muy indistintas, y por lo general se ven bien solamente las dos manchas en los ápices de la célula mediana inferior y la cubital superior. Las orlas más claras que el fondo.

La faz inferior similar, color de fondo algo más claro, la costa del ala anterior hasta su mitad algo amarillento, el disco de esta ala negruzco.

El ala posterior con una hilera mediana de pequeños e indistintos puntos claros paralelos al margen próximo. Expansión alar 27 mm.

Se puede distinguir este insecto de los demás parecidos por el pincel de pelos que se encuentra sobre la nervadura analis del ala anterior en su faz superior.



3. — *Mnasilus pencillatus*; (a) Argentina y Paraguay y (b) válvulas de ejemplares de la Guayana Británica.

Habitat. — Méjico hasta Brasil y Argentina. Tengo ejemplares de la Guayana Británica, Paraguay y Misiones en la Argentina.

Megistias monestes Schaus.

Nueva procedencia: Corrientes (Hayward).

Megistias tripunctata Latr.

Nueva procedencia: La Rioja (col. Mus. Arg. de Ciencias Naturales).

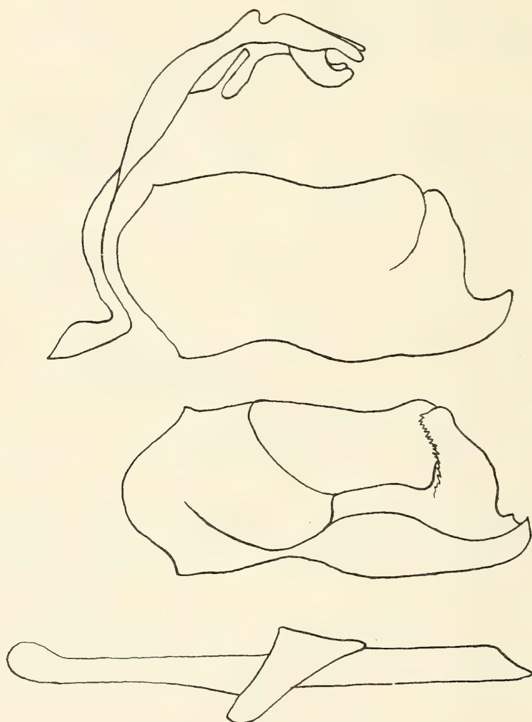
Megistias erythosticta PLÖTZ.

1883. Plötz, «Exot. Schmett.», 20, Hesp. Tab. 483.
1924. «*Dalla cyclosticta*» Hayward, Rev. Ent. Soc. Arg». 6: 106, Lám. 5, fig. 1.

Al recibir un macho de esta especie he encontrado que se trata de *Megistias erythosticta* Plötz, y no *Dalla cyclosticta* Dyar como yo había clasificado (*loc. cit.*) sobre una hembra en mal estado. Por lo cual se debe eliminar la especie *cyclosticta* de la lista argentina. (Hay una observación sobre este insecto en mi *Hesperioidea Argentina* III, inédita).

Megistias noctis PLÖTZ. Fig. 4.

1883. Plötz, « Exot. Schmett. », 20 Hesp.



4. — *Megistias noctis* (Argentina).

Color de fondo pardo oscuro, el ala anterior con rastros de tres puntos subapicales y tres pequeñas manchas discales en hilera oblicua, todos formados de colecciones de escamas amarillentas.

La mitad basal de la costa también salpicada con estas escamas amarillentas.

La faz inferior pardo negruzca, la mitad costal del ala anterior bien amarilla, y toda el ala, con excepción del disco y margen interior y toda el ala posterior, casi completamente cubierta de escamas de color amarillo hasta ocre en forma que tiene un tono algo dorado. Expansión alar 28-29 mm.

Patria: Tengo o he visto ejemplares de las Guayanas Británicas, Perú, Panamá, Paraguay y Argentina (Posadas, Misiones).

Vorates pseudecorus Hayw.

Nueva procedencia: Catamarca (col. Rosheweigh en col. Mus. Arg. de Ciencias Naturales).

Concordia, 27 de febrero de 1938.

CONTRIBUCIÓN AL ESTUDIO DE LA CIRCULACIÓN ATMOSFÉRICA

Por EMILIO L. DÍAZ

SUMARY

This work was made in three parts, first, is relating to conections between solar radiation with the atmospheric circulation; relations between upper winds and preassure evolution on Southern South America and Oceans, finding a correlation with solar radiation and upper winds in tropical zone, deducing from these facts the following conclutions:

1) Increasing solar radiation, increases upper wind velocity on tropical zone and some specially situated station in temperate zone simultaneously; to the others in a lag of one, two or three days.

2) A maximum wind velocity in upper levels on C. Redentor and Noronha is closely followed by a disminuition of preasure in central Mediterranean region of Argentina, and four days after the territory is ocupied by a action zone, augmentating the preassure (isocoeficient curves are drawed).

Second, is about the influence in Argentine barometric field, exerced by spots born in the center of solar disks.

Third, is refering, to facts preceding the intense winter anticiclones crossing Argentina that provocs rain and snow fall in its front ahead.

El presente trabajo resume algunas investigaciones practicadas por el autor en las relaciones que ligan la evolución de la presión, en la zona sur de Sud América, con la circulación atmosférica; fenómenos que preceden a los intensos anticiclones invernales argentinos; así como las variaciones de presión que suceden al nacimiento de una mancha o grupo de manchas en la zona central del disco solar.

Para el estudio de las relaciones entre la circulación atmosférica, y la presión en el sur de Sud América, se emplearon dos estaciones aerológicas, una Fernando de Noronha (Brasil), situada muy próxima al Ecuador, en latitud 4° Sur y longitud 32° W, y otra, Cristo Redentor (Argentina), en la zona templada (latitud 33° Sur y longitud 70° W). Se consideró como factor representativo de la in-

tensidad de la circulación atmosférica, la velocidad del viento a 3000 m. en Noronha, y a 6000 m. de altura en Cristo Redentor, observaciones hechas a las 8,00 horas; el nivel de 3000 metros fué elegido para Noronha, por ser el más alto para el cual los datos son suficientemente numerosos como para relacionarlos con las otras variables consideradas; a niveles superiores, la cantidad de valores disponibles es mucho menor, y su utilidad, por tanto, más reducida. Hacemos notar que hubiéramos deseado disponer de observaciones a mayor altura en esa estación, y, si ello hubiera sido posible, la velocidad del viento en la base de la estratosfera.

En lo que respecta a la estación argentina de Cristo Redentor, las velocidades del viento son las registradas a 6000 metros de altura, habiéndose efectuado el cálculo de correlación entre la velocidad del viento a esa altura y la presión en nueve estaciones sudamericanas, cuyos resultados están consignados en el cuadro I; los coeficientes de correlación fueron determinados para los días 0, 1, 2, 3 y 4, siguientes a los valores del viento; se dibujaron luego las curvas de isocoeficientes que se muestran en las figuras 1, 2, 3, 4 y 5; los coeficientes están basados en las observaciones realizadas desde el 1° de Junio de 1936 al 31 de Mayo de 1937, con un total de 216 valores relacionados por estación.

Para el intervalo comprendido entre el 1° de Junio de 1936 y el 30 de Noviembre de 1936 se calculó el coeficiente de correlación entre la radiación solar (valores diarios encontrados por la Smithsonian Institution) y la velocidad del viento a 6000 m. en Cristo Redentor, con el siguiente resultado:

Defasajes	Coeficientes	$\frac{r}{e}$
0 día	+ 0.37	6.3
1 día	— 0.12	1.7
2 días.	— 0.31	4.9

con un total de 95 valores empleados.

Un cálculo de correlación efectuado durante el mismo lapso de tiempo entre la radiación del sol y la velocidad del viento a 3000 m. de altura en Fernando de Noronha arrojó los siguientes resultados:

Defasajes	Coeficientes
0 día	+ 0.16
1 »	— 0.15
2 días.	— 0.22
3 »	+ 0.05
4 »	+ 0.06

Estos resultados nos conducen a análoga conclusión que la obtenida en otros trabajos anteriores, sobre el incremento que se produce en la velocidad de la circulación atmosférica como consecuencia del máximo de radiación solar (incremento que se nota con defasajes de 0,1 y 2 días con respecto al solar).

La correlación de las velocidades del viento superior, entre la estación tropical y la templada, da:

Defasajes	Coeficientes	$\frac{r}{e}$
0 día	+ 0.24	3.8
1 »	— 0.03	
2 días.	— 0.11	
3 »	+ 0.10	

Número de valores relacionados = 114.

hecho que muestra que el activamiento de la circulación es simultáneo en ambas estaciones, siendo la distancia geográfica entre ellas de 2700 millas marinas.

La situación de Cristo Redentor es una situación especial, que puede suministrar datos de interés; está al este del anticiclón permanente del Pacífico Sur, sobre una alta cordillera de montañas que prácticamente separa el océano Pacífico de la masa continental del sur de Sud América, la que se extiende hacia el lado oriental.

Veamos ahora cómo se propaga la variación de la velocidad del viento a 6000 metros sobre la zona central-este argentina; las correlaciones efectuadas entre la velocidad del aire en Cristo Redentor a 6000 metros de altura, y los datos análogos hallados en Buenos Aires, Paraná y Junín (estaciones situadas entre los 32° y 35° sud, y con una longitud más o menos igual), dieron.

Defasajes	Coeficientes	$\frac{r}{e}$
0 día	— 0.18	
1 »	— 0.07	
2 días	+ 0.25	4
3 »	+ 0.16	

Número de valores relacionados = 111.

Es decir que las variaciones mencionadas se propagan desde el oeste hacia el este y con una velocidad tal que dos días después alcanza la zona norte de Buenos Aires.

Analizaremos a continuación variaciones en la presión en la región sud de Sud América; siguen a los de la velocidad del viento en altura en Cristo Redentor y en Noronha.

Se ha efectuado el cálculo de correlación entre el viento superior y la presión en nueve estaciones, durante el año que va desde el 1° de Junio de 1936 al 31 de Mayo de 1937, y los resultados finales están consignados en el siguiente cuadro.

CUADRO I

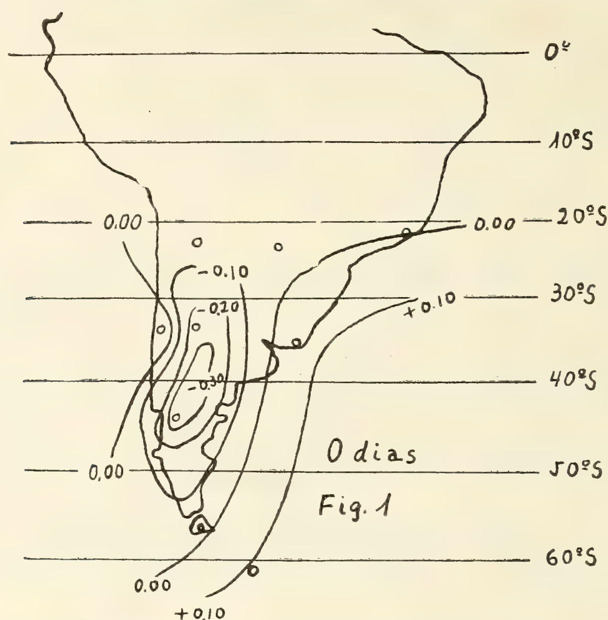
Cuadro resumen de los coeficientes de correlación determinados entre la velocidad del viento a 6000 metros de altura en Cristo Redentor (lat. 33° S y long. 70° W) y las siguientes estaciones. (Todas las latitudes son Sud y las longitudes Oeste).

Defasajes	Orcadas $\varphi = 61°$ $\omega = 45°$	Ushuaia $\varphi = 55°$ $\omega = 68°$	Bariloche $\varphi = 41°$ $\omega = 72°$	V. Mercedes $\varphi = 34°$ $\omega = 65°$	S. de Chile $\varphi = 33°$ $\omega = 71°$
0 día.	+ 0.11	— 0.02	— 0.34	— 0.25	+ 0.07
1 »	+ 0.06	— 0.11	— 0.27	— 0.22	+ 0.02
2 días	— 0.09	0.00	+ 0.18	+ 0.16	— 0.02
3 »	— 0.05	+ 0.03	+ 0.35	+ 0.27	+ 0.12
4 »	+ 0.01	+ 0.05	+ 0.18	+ 0.08	— 0.05

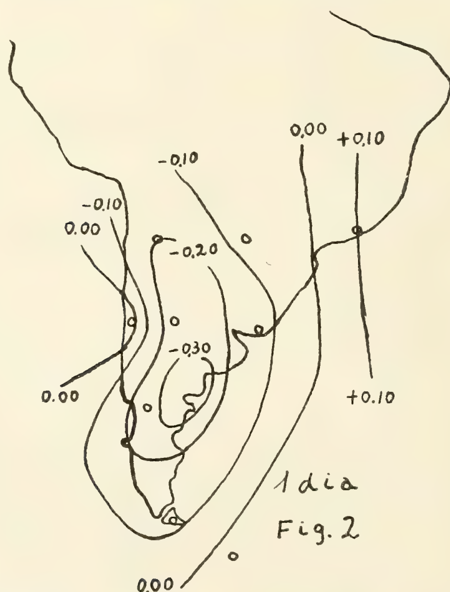
Defasajes	Montevideo $\varphi = 35°$ $\omega = 56°$	Jujuy $\varphi = 24°$ $\omega = 65°$	Formosa $\varphi = 26°$ $\omega = 58°$	Río Janeiro $\varphi = 23°$ $\omega = 43°$
0 día.	+ 0.05	— 0.04	— 0.03	0.00
1 »	— 0.16	— 0.20	— 0.08	+ 0.10
2 días	— 0.16	— 0.16	— 0.14	+ 0.09
3 »	+ 0.14	+ 0.16	+ 0.06	— 0.06
4 »	+ 0.23	+ 0.29	+ 0.20	— 0.08

Habiéndose empleado, para el cálculo, 216 valores por estación.

En las figuras 1, 2, 3, 4, 5 hemos dibujado las curvas de isocoeficientes para los distintos defasajes, pudiéndose notar que el núcleo

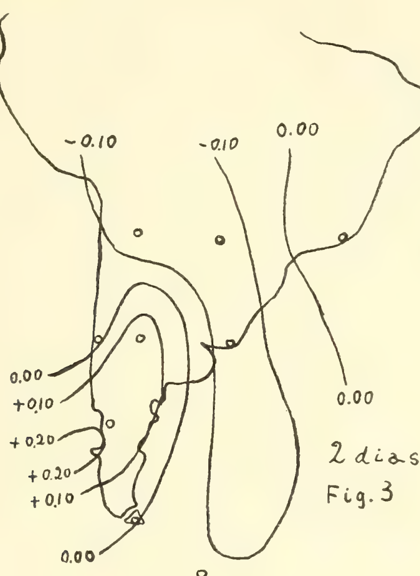


positivo sigue la misma trayectoria que la media de los anticiclones.



Podemos ensayar la siguiente interpretación física de los fenómenos: por ejemplo, un máximo de velocidad de viento en Cristo

Redentor, irá acompañado de una acción depresionaria bastante intensa sobre la presión en la región central argentina, entre los paralelos 35° S y 45° S, mientras que en los océanos se observará una débil tendencia a subir en el barómetro, en el día que sigue (día 1); esa zona de mayor acción disminuyente sobre la presión,



se trasladará hacia el este, comenzando a entrar el día 2 un área de acción incrementante, consecuencia del máximo de circulación atmosférica, área que en los días 3 y 4 se desplazará hacia el NE, teniendo su centro el día 4, en latitud 25° S y longitud 60° W.

El cálculo de correlación entre la velocidad del viento a 3000 m. en Noronha y la presión en Ushuaia y en Bariloche da:

Defasaje	Ushuaia $\varphi = 55° S$ $\omega = 68° w$	Bariloche $\varphi = 41° S$ $\omega = 72° w$
0 días	— 0.04	+ 0.07
1 día	— 0.04	— 0.02
2 días	+ 0.04	— 0.08
3 »	+ 0.13	— 0.05
4 »	+ 0.08	+ 0.13

Número de valores = 100.

resultado análogo al obtenido con respecto al viento superior en Cristo Redentor, pero con valores de coeficientes mucho más bajos.

Si hacemos ahora el estudio de la correlación entre la radiación solar y la presión en las estaciones del cuadro I, tendremos:

CUADRO II

Coeficientes de correlación entre la radiación solar y la presión en la región sur de Sud América (valores hallados para la primavera del año 1936).

Defasajes	Orcadas	Ushuaia	Bariloche	V. Mercedes	S. de Chile
0 día	+ 0.23	+ 0.12	— 0.15	— 0.06	0.00
1 »	+ 0.09	+ 0.12	— 0.23	— 0.35	— 0.08
2 días	— 0.14	— 0.01	+ 0.11	+ 0.04	— 0.02
3 »	— 0.12	+ 0.14	+ 0.37	+ 0.58	— 0.19

Defasajes	Montevideo	Jujuy	Formosa	Río Janeiro
0 día.	+ 0.05	+ 0.09	+ 0.16	+ 0.03
1 ».	— 0.20	— 0.37	— 0.21	+ 0.15
2 días	— 0.35	— 0.38	— 0.50	+ 0.06
3 »	+ 0.01	+ 0.27	+ 0.06	— 0.06

Comparado este cuadro con el I se podrá comprobar la similitud de ambos y los resultados análogos que arrojan.

Las comprobaciones que anteceden se pueden sintetizar en la siguiente forma:

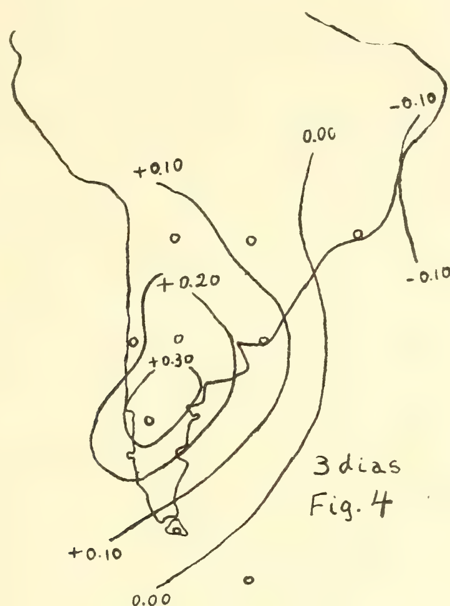
Las variaciones de la intensidad de la circulación atmosférica están en conexión con las variaciones del calor emitido por el sol y en fase, por lo menos, en la región tropical de Sud América; existiendo además algunas estaciones que, a pesar de hallarse en la zona templada, quizás por su situación geográfica especial, también acusan oscilaciones en la velocidad de circulación del aire que están en fase con la radiación solar.

La presión en las llanuras de la región central mediterránea de la Argentina, oscila en forma opuesta a la radiación del sol y con un intervalo de 1 día del máximo solar al mínimo barométrico y de 3 días al máximo de presión.

El análisis entre la velocidad del viento a 6000 m. de altura en Cristo Redentor y la presión, muestra análogo resultado, sólo que

en este caso el intervalo entre el máximo de viento y el mínimo de presión oscila entre 0 y 1 día y es de 3 días para el máximo del barómetro.

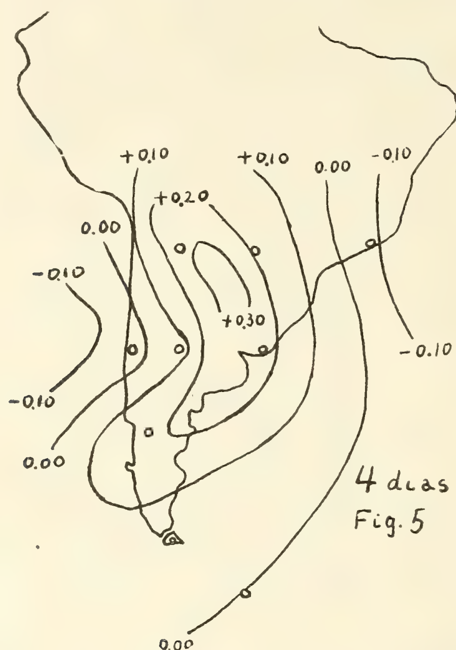
En ambas correlaciones se puede notar que la disminución de presión sobre la zona sur del continente, va acompañada de un alza de la presión sobre los océanos Pacífico y Atlántico.



Teniéndose, por otro lado, que un aumento en la circulación atmosférica en la zona tropical, va seguido por un aumento de la presión en la zona templada, con un intervalo de 3 ó 4 días, podemos deducir que el mecanismo por medio del cual el calor del sol actúa sobre el tiempo en Sud América, es tal, que mientras, por un lado, un aumento de calor emitido activa la circulación atmosférica [1] y aumenta la velocidad de derrame del aire tropical en las altas capas de la atmósfera, hace bajar la presión en ciertas regiones de la parte templada, que por su calidad de suelo o por su situación geográfica, son propicias a sentir los efectos, ocasionándose un desequilibrio en la presión, pues aumenta la altura barométrica sobre los océanos y baja en el continente; estos efectos se manifiestan unidos, en va-

[1] Ver mi trabajo « Sobre efectos de la radiación solar en la estratosfera », en estos *Anales*, Octubre de 1937.

lores de la velocidad del viento, en Cristo Redentor, que se ve influída por ambos procesos; la mayor afluencia de aire sobre los océanos actúa sobre los centros de acción permanentes (en nuestro caso anticiclón permanente del Pacífico sur), ocasionándose el des-



prendimiento de masas de aire frío que en forma de anticiclones recorren el territorio argentino de SW a NE, en los días posteriores al máximo de radiación solar.

Efectos sobre la presión en la región sur de Sud América, ocasionados por el nacimiento de manchas o grupos de manchas en el centro del disco del sol

El nacimiento de una mancha o grupos de manchas en el disco solar debe, indudablemente, producir alteraciones en la radiación emitida por el astro, alteraciones que se reflejarán, en diversas formas, sobre nuestro planeta; veremos aquí qué efectos producen sobre la presión en la región sur del continente.

Los valores hallados corresponden a un promedio de 33 casos observados durante el año 1936 y parte de 1937; las manchas cuyos

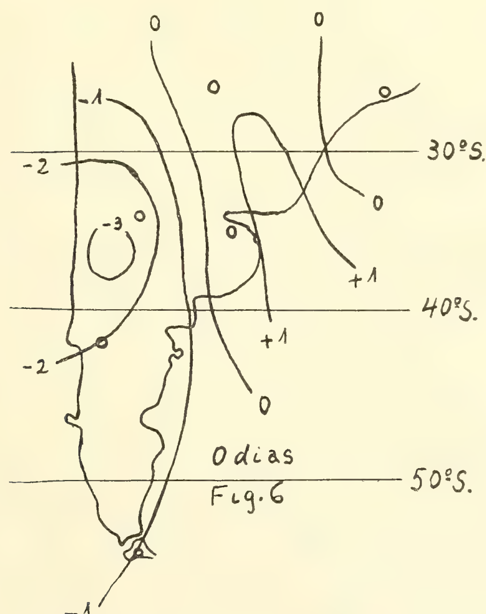
efectos se estudiaron, fueron aquellas que al nacer tenían su eje central dirigido hacia la tierra, es decir, aquellas que se observó que nacían en la zona central del disco solar; el cuadro III, que sigue, muestra los efectos sobre la presión en distintas estaciones.

CUADRO III

Variación en milímetros en la presión producida por el movimiento de manchas en la zona central del disco solar.

Superficie media de la mancha nacida 144 millonésimos de hemisferio

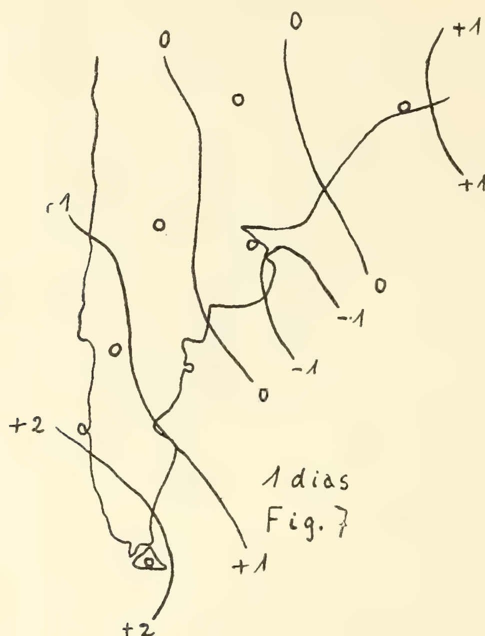
días	Ushuaia	Bariloche	V. Mercedes	Buenos Aires	Formosa	Río Janeiro
0	— 1.0	— 2.2	— 2.5	+ 0.9	+ 0.8	— 0.6
1	+ 2.4	+ 1.1	+ 0.6	— 0.8	— 0.3	+ 0.8
2	+ 1.0	+ 2.2	+ 1.7	— 0.2	0.0	0.0
3	— 1.3	+ 0.5	0.0	+ 1.8	+ 0.4	— 0.3
4	+ 0.5	— 2.3	— 1.2	— 1.2	0.0	+ 1.1



Las figuras 6, 7, 8 y 9 muestran la marcha de los núcleos de variación; en ellas se puede notar la similitud que tienen con las curvas

de isocoeficientes de correlación, entre el viento de altura en Cristo Redentor y la presión.

El nacimiento de la mancha provoca, sobre la zona mediterránea argentina, un descenso en la presión y probablemente a la altura del paralelo 35° S en los océanos un aumento, en núcleo negativo



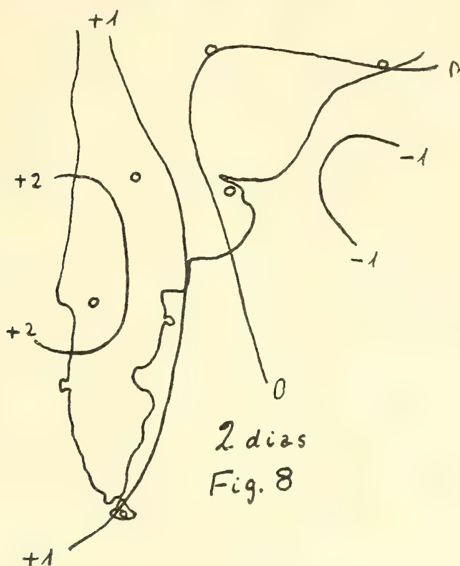
de variación, se desplaza hacia el este y le sigue un núcleo positivo que penetra por el sudoeste desde el Pacífico, y que el día 3 ocupa el centro del país.

Fenómenos que preceden a los intensos anticiclones invernales argentinos

Durante el invierno, el territorio de la República es recorrido por intensos anticiclones, que provocan en su frente delantero lluvias y nevadas intensas, y fuertes fríos, durante su paso; estudiaremos aquí la evolución de algunas variables meteorológicas en los días que preceden a la entrada al país de la gran masa de aire frío.

Denominaremos día 0 al día en que el anticiclón aparece penetrando a territorio argentino, dando signo negativo a los días que preceden al 0 y positivo a los que siguen.

El análisis de las variaciones de la velocidad del viento muestra que 48 horas antes a la entrada del núcleo positivo de variación de la presión, se produce en Cristo Redentor, a 6000 metros de altura,



2 días
Fig. 8

un incremento grande de la velocidad del viento, aumentando 30 kilómetros por hora, en promedio, su velocidad del día — 3 al — 2; en Comodoro Rivadavia, en los 46° S, el viento cae 30 kilómetros por hora, del día — 4 al — 3, y la variación alcanza su máximo positivo del día — 1 al día 0 (+ 18 km/hora).

La radiación solar crece del día — 3 al — 2 en + 5.2 milésimos de caloría gramo por centímetro cuadrado, mientras que la superficie manchada aumenta continuamente desde el día — 4 hasta el día 0.

Los números relativos también presentan un máximo de variación positiva del día — 3 al — 2; y la temperatura en la zona de Buenos Aires crece hasta el día — 2 a partir del cual empieza a descender.

Los sondajes aerológicos en Noronha en latitud 45° S, muestran un máximo positivo de variación en la velocidad del viento a 3000 m. de altura, del día — 5 al — 4 (+ 3.5 m/s.), luego un descenso del día — 4 al — 3 (— 4.7 m/s), y por último un segundo máximo positivo del día — 2 al — 1 (+ 2,2 m/s).

En el cuadro IV se muestra el detalle de la variación de los distintos elementos:

CUADRO IV

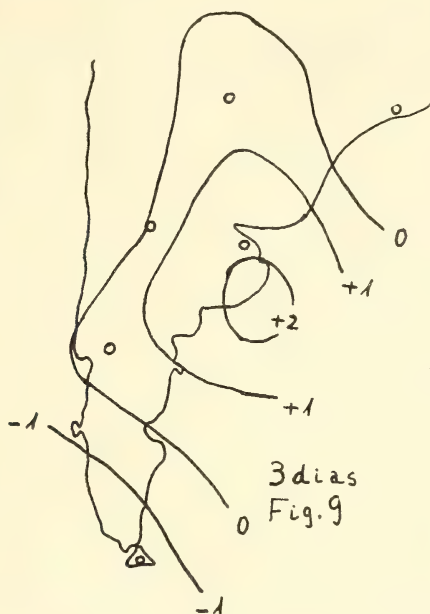
Variación de las distintas variables meteorológicas, que preceden a la entrada de un anticiclón invernal de más de 770 milímetros.

	Δ^{-5}_{-4}	Δ^{-4}_{-3}	Δ^{-3}_{-2}	Δ^{-2}_{-1}	Δ^{-1}_{0}	Δ^{0}_{+1}
Variación de la presión (milímetros)						
Mendoza		+ 1.8	+ 0.1	— 1.0	+ 7.0	+ 2.0
Cipolletti		+ 2.4	— 1.1	+ 1.0	+ 7.6	+ 0.6
Esquel		+ 2.6	— 2.5	+ 4.1	+ 8.0	— 1.2
Cor. Sarmiento. . . .		+ 3.7	— 1.3	+ 1.7	+ 9.8	— 1.9
Río Gallegos		+ 7.9	— 1.8	+ 2.5	+ 5.7	— 1.3
Mar del Plata		+ 2.8	+ 1.6	— 0.6	+ 3.0	+ 1.1
Variación de la velocidad del viento de altura (Km/h)						
C. Redentor (6000 m.)		— 15	+ 30	— 14	— 21	+ 12
Junín (4000 m.) . . .		— 20	0	— 11	+ 1	+ 2
Trelew (4000 m.). . .		— 24	— 13	0	+ 8	— 16
C. Rivadavia (4000 m.)		— 30	— 7	+ 4	+ 18	— 13
F. de Noronha (1) (3000 metros)	+ 3.5	— 4.7	— 1.0	+ 2.2	+ 0.6	+ 0.7
Variables diversas						
Radiación solar (milésimos).		— 2.5	+ 5.2	— 0.6	+ 1.0	+ 0.7
Sup. manchada del sol (millonésimos) . . .		+ 81	+ 48	+ 81	+ 23	— 127
Nros. relativos		0	+ 8.7	— 0.7	+ 4.4	+ 1.0
Temperatura B. Aires (0° C)		+ 2.5	+ 1.3	— 1.2	— 1.5	— 1.8

De donde se puede deducir que los grandes anticiclones argentinos son precedidos por un notable aumento en la actividad del sol, que se manifiesta: en la superficie manchada, que del día — 4 hasta

(1) El número de datos es pequeño — variaciones en m/s.

el 0 aumenta en 233 millonésimos de hemisferio; en la radiación, que en el mismo intervalo crece en 3.1 milésimos, y en los números relativos, que aumentan en 12.4.



En lo que respecta a la circulación atmosférica, muestra un aumento de intensidad 5 y 1 días antes en Noronha, y 2 días antes en Cristo Redentor, con variaciones positivas en la temperatura en la zona de Buenos Aires 3 y 4 días antes.

Río Santiago, Marzo 17 de 1938.

CONGRESO INTERNACIONAL DE GEOGRAFÍA

Entre los días 18 y 28 del próximo mes de Julio, va a celebrarse en Amsterdam un Congreso Internacional de Geografía, en el cual serán tratados, en primer lugar, las cuestiones siguientes, según decisión de la Asamblea General de la Unión Geográfica Internacional celebrada en Varsovia en 1934:

Estudio de las poblaciones y de las viviendas rurales.
Estudio de las terrazas pliocenas y pleistocenas.
Estudio de las variaciones climáticas.
Publicación de mapas antiguos.
La fotogrametría aérea.
La cartografía de las superficies de erosión terciaria.

Por su parte, el Comité Ejecutivo del Congreso ha redactado la siguiente lista de cuestiones especiales para ser discutidas en las sesiones:

Cartografía: Adaptación de las representaciones topográficas y cartográficas a la práctica de la fotogrametría, y más particularmente en lo que concierne a la construcción de las líneas hipométricas.

—Empleo de la fotograía aérea para obtener una cartografía rápida de regiones poco conocidas.

—Cuestiones diversas en el dominio de las proyecciones cartográficas.

Geografía Física: La evolución glacial. La cuestión de la «escalera de Piedmont». La cuestión de las morenas terminales.

Oceanografía: La circulación general en los océanos. Oscilaciones internas en los océanos.

—El relieve del fondo del mar, particularmente en el hemisferio meridional.

Geografía humana: Movimientos migratorios actuales y factores que influyen en su carácter. Relaciones funcionales entre las aglomeraciones urbanas y la campiña. Ventajas y desventajas sociales de la industria a domicilio (o eventualmente de la industria en parte a domicilio y en parte en la usina) para una población agraria en circunstancias geográficas determinadas.

Geografía económica: El desenvolvimiento industrial de los puertos marítimos. Relaciones cuantitativas y cualitativas de los diversos modos de transporte en general y en cada país en particular. ¿Sería posible expresar de una manera más exacta, por índices numéricos, el valor productivo de los factores suelo y clima, a fin de obtener una medida que permita la comparación económica de los diversos países?

Geografía Colonial: Posibilidades de colonización por la raza blanca, de las regiones comprendidas en la zona tropical. Relaciones entre la densidad de la población y el modo de utilización o explotación del suelo en las regiones coloniales. La industrialización, como condición indispensable para el mantenimiento de la prosperidad en las regiones tropicales de población muy densa.

Historia de la geografía: La historia de la geometría de la tierra y de la localización geográfica. Influencia del Renacimiento sobre la geografía y la reanudación de los estudios sobre Ptolomeo. Puntos seguros y puntos inciertos en la interpretación de los mapas y cartas geográficas, en especial sobre las relativas a la época de los grandes descubrimientos.

Paisaje geográfico: El concepto de «paisaje», en la geografía humana. Estudio analítico de la estructura del paisaje como base de la utilización del suelo por las poblaciones, la agricultura y la industria. Determinación de cuales son y cuáles deben ser en la civilización moderna, los principios sobre los cuales hay que basar la conservación de las bellezas del paisaje.

Metodología y didáctica: Valor de la enseñanza de la geografía para llegar a relaciones de cordialidad y entendimiento entre las naciones. Determinación de los asuntos que deben ser tratados en la enseñanza de la geografía y del grado de intensidad con que deben ser tratados. Ventajas y desventajas del método Dalton en la enseñanza de la Geografía.

* * *

El Comité Ejecutivo, inspirándose en el ejemplo de precedentes Congresos, sólo admitirá la discusión de las cuestiones explícitamente mencionadas en la lista anterior, así como también se reserva el derecho de no dar curso a las comunicaciones que puedan dar lugar a discusiones susceptibles de tener derivaciones extrañas a los asuntos prefijados o de comprometer el orden de las sesiones.

Complementando los trabajos del Congreso se efectuarán diversas excursiones: una de ellas al antiguo «Zuiderzée», comprendo un trayecto desde Amsterdam hasta Wiesingermeer, a través de los polders, desecados en 1930, para mostrar la manera como se pueden desecar las tierras y transformar los pantanos en fértiles regiones agrícolas con florecientes ciudades. El mismo fondo del mar, ha sido convxertido en tierras cultivables, que ya han sido subdivididas y colonizadas.

Otra de las excursiones comprende el viaje desde Amsterdam a las Indias Holandesas orientales, islas de Java, Balí y Sumatra, etc. Aparte de lo pintoresco de la región a visitar y del interés geográfico que ofrece la naturaleza volcánica de estas islas, están los aspectos sociales que presenta una comarca en plena región tropical, muy densamente poblada (más que Bélgica, en término medio), con ciudades que sobrepasan el medio millón de habitantes.

La Secretaría del Congreso, a la cual se pueden solicitar mayores informaciones, funciona en el Koloniaal Instituut, Mausitskade 63, Amsterdam.

CONGRESO INTERNACIONAL DE ANTROPOLOGÍA Y ETNOGRAFÍA

En el próximo mes de agosto tendrá lugar en Copenhague un Congreso Internacional de Ciencias Antropológicas y Etnográficas, bajo la presidencia de Mr. Thomas Thomsen. En las diferentes sesiones serán tratados diversos trabajos sobre los siguientes temas:

Antropoligía anatómica y biotipológica: Relaciones mutuas y afinidades entre los hombres fósiles. Metodología antropológica. Examen crítico del concepto de «raza» en antropología.

Antropología fisiológica y hereditaria: Propagación geográfica de los linajes humanos típicos.

Psicología: Influencia de los factores de la civilización en el carácter. Cambios habidos en las diferentes culturas.

Demografía: Movimiento de la población, considerados especialmente desde el punto de vista de la natalidad y la mortalidad.

Etnología: Origen y desenvolvimiento de la Agricultura y de la cría del ganado. Origen de las plantas cultivadas y de los animales domésticos.

Etnografía: Los pueblos nómades y pastoriles de Asia y Africa. Las relaciones entre la civilización de Centro América y las de Norte y Sud América. Las relaciones culturales entre Oceanía y el sudeste de Asia. Corrientes prehistóricas e históricas de la civilización en las regiones de los círculos polares. Creencias y costumbres vinculadas con el año Agrícola en Europa.

Sociología: En qué medida pueden la Arqueología y la Prehistoria servir como base para el estudio de la cultura intelectual de los pueblos.

Filología: Sistematización y «standardización» de las lenguas indígenas. Formación de los idiomas comunes. Lenguas autóctonas y civilizadas, habladas en los pueblos indígenas.

El secretario general del Congreso es el Dr. Kaj Birket-Smith, Universidad de Copenhague, a quien pueden solicitarse mayores informaciones.

SOCIOS ACTIVOS

Aguilar, Félix
Albizzati, Carlos M.
Alvarez, Raúl J.
Alvarez de Toledo, Belisario
Allende Lezama, Luciano P.
Anastasi, Camilo
Anchorena, Juan E.
André, Enrique de
Andrioletti, Juan Luis
Añón Suárez, Vicente
Aparicio, Francisco de
Aráoz Alfaro, Gregorio
Arbecchi, Armando C.
Arce, Manuel J.
Arditi Thompson, H.
Armani, Aquiles
Arnaudo, Silvio J.
Avila Méndez, Delfín
Aztiria, Ignacio
Bado, Atilio A.
Bachmann, Enesto
Baglietto, Eduardo E.
Balbiani, Atilio
Bancalari, Agustín
Barabino Amadeo, S.
Barbieri, Antonio
Bargna, Juan L.
Barilari, Mariano J.
Barral Souto, José
Barrancos, Leónidas A.
Becke, Alejandro von der
Berrino, Juan B.
Bertino, José Carlos
Besio Moreno, Nicolás
Bianchi Lischetti, A.
Biggeri, Carlos
Blaquier, Juan
Boaglio, Santiago
Bolognini, Héctor
Bonanni, Cayetano A.
Bontempi, Luis
Bordenave, Pablo E.
Borruat, Luis
Borzi, Ana María
Bosch, Gonzalo
Bosisio, Anecto J.
Bottaro, Juan C.
Bozzini, Luis (h.)
Briano, Juan A.
Bunge, Juan C.
Buontempo, Guillermo
Butty, Enrique
Buzzo, Alfredo
Buzzo, Eduardo B.
Caillet Bois, Teodoro
Calandra, Raúl E.
Camus, Nicolás
Canale, Humberto
Carabelli, Juan José
Carbia, Rómulo D.
Carbone, Esteban
Carbonell, José J.
Cárcova, Enrique de la
Carelli, Antonio
Carelli, Humberto H.
Caride Massini, Pedro
Carman, Ernesto
Carrea, Juan Ubaldo
Casacuberta, Antonio
Castellanos, Alberto
Castello, Manuel F.
Castiñeiras, Julio R.
Celasco, Juan L.
Cock, Guillermo E.
Coni Bazán, F. A.
Curti, Orlando P.
Curutchet, Luis
Chanourdie, Enrique
Chizzini Melo, Aníbal F.
D'Ascoli, Lucio
Dassen, Claro C.
Dasso, Héctor
Dasso, Ricardo L.
De Cesare, Elías A.
De Fina, Armando L.
De la Iní, Juan E.
Dellepiane, Luis J.
Deulofeu, Venancio
Díaz, Emilio C.
Dieulefait, Carlos E.
Doello-Jurado, Martín
Dobranich, Jorge W.
Domínguez, Juan A.
Dubecq, Raúl E.
Dueñas, José
Duhau, Luis
Dupont, Enrique
Durañona y Vedia, A.
Durrieu, Mauricio
Edelberg, Benjamín
Escudero, Antonio
Escudero, Pedro
Faré, Santo S.
Fernández, Alberto J.
Fernández Díaz, A.
Fernández Long, S.
Figini, Angel
Figuerero, Hernando W.
Fischer, Gustavo Juan
Flores, Emilio M.
Floriani, Luis
Florit, Carlos J.
Forn, Carlos J.
Fossa Mancini, E.
Franceschi, Alfredo
Fürnkorn, Divico A.
Gadda, Carlos Manuel
Galmarini, Alfredo G.
Gando, Alfredo R.
Gandolfi Herrero, Augusto
Gandolfo, José S.
Gascón, Alberto
Gaspar, Fernando L.
Géneau, Carlos E.
Gerardi, Donato
Ghigliazza, Sebastián
Giagnoni, Bartolomé E.
Giannone, José
Gradín, Carlos
Grieben, Arturo
Gutiérrez, Ricardo J.
Haussler, Emilio
Herbin, Luis A.
Hermitte, Enrique
Herrera Vegas, M.
Herzer, Bernardo
Hickethier, Carlos F.
Hofmann, Herbert
Hortal, José Angel
Houssay, Bernardo A.
Hoyo, Arturo
Igartúa, Luis María
Irigoyen, Luis H.
Isetta, José
Ivanissevich, Ludovico
Jorge, José M.
Jakob, Cristofredo
King, Diarmid O.
Kinkelin Pelletán, J. C. de
Knoche, Walter
Kraglievich, Nicolás T.
Krapf, Eduardo
Labarthe, Julio
Lagunas, Simón
La Menza, Francisco
Laporte, Luis B.
Larco, Esteban
Lasso, Alfredo L.
Latzina, Eduardo
Lignières, Roberto
Lizer y Trelles, C. A.
Lombardi, Alberto
Loyarte, Ramón G.
Lugones, Arturo M.
Llauró, José
Mac Donagh, E. J.
Magnin, Félix J.
Magnin, Jorge
Mainini, Carlos
Malliol, Emilio
Mamberto, Benito
Marcó del Pont, E.
Marchionatto, Juan B.
Maresca, Antonio J.
Marini, Tomás L.
Martignone, Eduardo
Marotta, F. Pedro
Marotta, R. Armando
Mata, Leopoldo
Méndez, Julio
Meoli, Gabriel
Meoli, Humberto
Mercau, Agustín
Mermoz, Francisco A.
Molfino, José F.
Molina Carranza, L.
Molle, Clotilde C.
Montes, Vicente E.
Moreno, Evaristo V.
Nágera, Juan José
Natale, Alfredo
Natale, Ernesto
Negrete, Lucía
Negri, Mario L.
Nelson, Ernesto
Nielsen, Juan
Oliveri, Alfredo E.
Ortega Belgrano, Raúl
Ortiz, Aníbal A.
Ortiz de Rosas, Jorge
Otamendi, Gustavo
Ottonello, Héctor
Páez, José María
Page, Franklin Nelson
Paitoví y Oliveras, A.
Paquet, Carlos
Parodi, Edmundo
Parodi, Lorenzo R.
Pasman, Raúl G.
Pasman, Rodolfo E.
Pastore, Franco
Paz Anchorena, José M.
Pérez Hernández, A.
Perrone, Cayetano
Pestalardo, Agustín
Pini, Aldo S.
Platz, Hubert
Podestá, Juan Carlos
Polti, Modesto
Posadas, Carlos
Quinos, José Luis
Quinterno, Bruno F.
Quiroga, Pedro R.
Raimondi, Alejandro
Raffo, Bartolomé M.
Ramaccioni, Danilo
Ramallo, Carlos M.
Ratto, Héctor R.
Rebuelto, Antonio
Rebuelto, Emilio
Reece, William Asher
Repetto, Blas Angel
Repossini, José
Ringuelet, Emilio J.
Rissotto, Atilio A.
Rivarola, Rodolfo
Robles, Angel A.
Rodríguez Aravena, S.
Rodríguez, Germinal
Roffo, Angel H.
Roffo, Juan
Roldán, Raimundo
Romero Brest, Enrique
Rokotnitz, Otto
Rospide, Juan
Rossell Soler, Pedro
Ruata, Luis E.

Ruiz Moreno, Isidoro
Ruiz Moreno, Adrián
Rumi, Tomás J.
Sabaria, Enrique
Sagastume Berra, A. E.
Salomón, Hugo
Sánchez, José Ricardo
Sánchez, Gregorio L.
Sánchez Díaz, Abel
Sánchez Sorondo, M. G.
Sanromán, Iberio
Santángelo, Rodolfo
Sarhy, Juan F.
Sarrabayrouse, Eugenio
Savon, Marcos A.
Schnack, Benno J.
Schmidt, Max
Schulz, Guillermo
Selva, Domingo
Sesma, Angel
Sheahan, Juan F.
Silva, Leónidas L.
Simons, Hellmut
Siri, Luis
Sobral, Arturo
Solari, Emilio F.
Solari, Miguel A.
Soler, Frank L.
Sordelli, Alfredo
Spinetto, David J.
Spota, Víctor J.
Storni, Segundo R.
Suárez, Angel
Taiana, Alberto F.
Taiana, Jorge
Tarragona, José
Tedeschi, Virgilio
Tello, Eugenio
Torre Bertucci, Pedro
Torello, Pablo
Tossini, Luis
Trelles, Rogelio A.
Trucco, Sixto E.
Valeiras, Antonio
Valentini, Argentino
Valentinuzzi, Máximo
Vallebella, Colón B.
Vanossi, Reinaldo
Varela, Rufino
Vecchi. Arístides de
Vela Huergo, Julio
Veyga, Francisco de
Vidal, Eduardo
Villalobos D., C.
Vignaux, Juan C.
Vinardell, Alberto
Volpatti, Eduardo
Wainer, Jacobo
White, Guillermo J.
Wauters, Carlos
Wysztelewski, W. de
Zamboni, Agustín
Zappi, Enrique V.
Zavalla, Carlos M.
Zuloaga, Angel M.

SOCIOS ADHERENTES

Bazzanella, José
Devoto, Carlos Alberto
Ferramola, Raúl
Folcini, Martín L. G.
García, Eduardo D.
Glücksmann, Carlos E.
Goyena, Ricardo J.
Laclau, Juan Pedro
Magne de la Croix, P. A.
Milesi, Emilio Angel
Quevedo Capdevila, Eduardo A.
Recoder, Roberto F.
Repetto, Cayetano
Rusconi, Carlos
Somonte, Eduardo
Wechsler, Wolf

CASAS ADHERENTES

Angel Estrada y Cía.
Benvenuto y Cía.
Lutz, Ferrando y Cía.
Hijos de Atilio Massone
Otto Hess, S. A.
T. Gr. "Tomás Palumbo"
Jacobo Peuser, S. A. Ltda.

SOCIO VITALICIO

Huergo, Eduardo María

MIEMBROS PROTECTORES DE LA ORGANIZACION DIDACTICA DE BUENOS AIRES

Anchorena, Juan E.
Besio Moreno, Nicolás
Tornquist, E. y Cía. (Lda.)

SECCION CORDOBA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Ing. Pedro N. Gordillo; Vice-presidente, Dr. Miguel Fernández; Vice-presidente, Ing. Daniel A. García; Secretarios, Dr. Guillermo V. Stuckert; Prof. Tulio Mácola; Tesoreros, Dr. Juan Olsacher; Dr. Carlos C. Hosseus; Vocales, Ing. Clodoveo Pascualini; Dr. Agustín E. Larrauri; Dra. J. Gambastiani de Peláez; Arq. Salvador Godoy; Ing. Jorge E. Bobone; Dr. Federico Padula; Ing. Luis Chechi; Dr. Edwin Rothlin.

SOCIOS ACTIVOS

Achával, Luis
Aguiar, Henoch D.
Amaya, Arturo A.
Arrambide, Miguel
Bobone, Jorge E.
Bodenbender, G.
Bonet, Rafael
Borzacow, Wladimir
Brandan, Ramón A.
Broglia, Alberto A.
Buteler, Jesús E.
Camilloni, Carlos
Carlomagno, José
Chaudet, Enrique
Checchi, Luis
Deheza, Eduardo
Del Viso, Jacinto
De Tezanos Pinto, J.
Devoto, Heraclio A.
Espinosa, Manual
Esteban, Fernando
Fernández, Miguel
Fitz Simon, Sgo. E.
Fontana, Lorenzo P.
Fuchs, Guillermo J.
García, Daniel
Gavier, Daniel E.
Giménez de Azúa, F.
Godoy, Salvador A.
Gómez, Calixto A.
Gordillo, Pedro N.
Granillo Barros, M.
Hosseus, Carlos Curt
Jagsich, Juan
Kronfus, Juan
Lofayette Zimmer, M.
Larrauri, Agustín C.
Lutzow Holm, Olaf.
Mácola, Berardo A.
Mácola, Tulio

Mirizzi, Pablo Luis
Ninci, Carlos A.
Ninci, Raúl T.
Novillo Corvalán, S.
Olsacher, Juan
Padula, Federico
Pasqualini, Clodoveo
Peláez, J. Gambastiani de
Pilotto, Bernardo
Ponce Laforgue, C.
Roggeri, Domingo
Rothlin, Edwin
Sayago, Gumersindo
Schmiedecke, Augusto
Sigal, Moisés
Sparn, Enrique
Stuckert, Guillermo V.
Taravella, Ambrosio L.
Tarragó, Emeterio
Torres, Valeriano
Trebino, Natalio
Vercello, Carlos
Yadarola, Mauricio L.

SECCION SANTA FE

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Gustavo A. Fester; Vice-presidente, Dr. José Piazza; Secretario de correspondencia, Ing. Quím. Francisco A. Bertuzzi; Secretario de actas, Ing. Quím. José Cruellas; Tesorero, Ing. Quím. Enrique Virasoro; Vocal 1º, Ing. José Babini; Vocal 2º, Prof. Rolando Hereñú; Vocal suplente 1º, Prof. Julio Salaber; Vocal suplente 2º, Ing. Quím. Guillermo Berraz; Encargado de Biblioteca y Canje, Ing. Quím. Rodolfo Rouzaut; Encargado de Publicaciones, Ing. José Babini.

SOCIOS ACTIVOS

Anadón, Leónidas
Ariotti, Juan Carlos
Babini, José
Benet, Pedro José
Berraz, Guillermo
Bertuzzi, Francisco A.
Bonazzola, César J.
Borruat, Luis (hijo)
Borzone, Rodolfo
Bossi, Celestino
Caballero, Martín A.
Camo, José María
Cerana, Miguel
Claus, Guillermo
Courault, Pablo
Crouzeilles, A. L. de
Cruellas, José
Christen, Carlos
Christen, Rodolfo G.
Damianovich, Horacio
Falco, Federico
Fester, Gustavo A.
Frenguelli, Joaquín
Gollán, Josué (h.).
Gschwind, Eduardo P.
Guinle, Hugo José
Hereñú, Rolando
Hotschewer, Curto
Juliá Tolrá, Antonio
Kleer, Gregorio
Mai, Carlos
Mántaras, Fernando
Marelli, Hipólito
Martino, Antonio E.
Montpellier, Luis Marcos
Mounier, Celestino
Muzzio, Enrique
Nigro, Angel
Niklison, Carlos A.
Oliva, José
Peresutti, Luis
Piazza, José
Piñero, Rodolfo
Pozzo, Hiram J.
Ragonese, Arturo E.
Reinares, Sergio
Rouzaut, Rodolfo
Salaber, Julio
Salgado, José
Santini, Bruno L. P.
Schivazappa, Mario
Simonutti, Atilio A.
Tissembaum, Mariano
Urondo, Francisco E.
Virasoro, Enrique

SECCION MENDOZA

COMISION DIRECTIVA

Presidente honorario, Ing. José S. Corti; Presidente, Dr. Juan B. Lara; Vice-presidente, Ing. Agr. José Raúl Ponce; Secretario, Ing. Agr. Julio Tolosa (h); Tesorero, Ing. Cayetano C. Piccione; Bibliotecario, Sr. Adrián Ruiz Leal; Vocales: Dr. Eduardo Carette; Dr. Mario Bidone; Ing. Alfredo Rosenthal; Sr. Manuel Tellechea; Ing. Agr. Rafael E. Pontis.

SOCIOS ACTIVOS

Alurralde, Juan Carlos
Anzorena, Jacinto
Ayala Castagnino, G.
Basso, Germinal
Benegas, Raúl
Bidone, Mario
Borsani, Carlos Pablo
Burgoa, Pedro A.
Carette, Eduardo
Croce, Francisco M.
Espinosa, Norberto A.
Flor Alvarado, José M.
Gabrielli, Francisco J.
Galeano, Edgardo
García, José Federico
Godoy Vergelin, G.
Gomensoro, José N.
Granzella, Sinibaldo
Guiard, Ricardo
Jofré, Alberto L.
Lara, Juan B.
Lucero, Braulio G.
Lugones, Manuel G.
Magistretti, Guillermo
Maneschi, Ernesto
Maroso, José Angel
Maveroff, Aquiles
Mayorga, Santiago C.
Miyara, Salomón
Paganotto, Juan P.
Pelaia, Dante
Piccione, Cayetano C.
Ponce, José Raúl
Pontis, Rafael E.
Rosales, Ranulfo S.
Rosenthal, Alfredo
Ruiz, Aníbal
Ruiz Leal, Adrián
Silvestre, Tomás
Stura, Angel C.
Tellechea, Manuel
Tolosa, Julio (h)
Toso, Juan P.
Villanueva, Miguel Angel

SECCION LA PLATA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Carlos A. Sagastume; Secretario, Ing. Adolfo P. Grissi; Tesorero, Dr. Carlos Teobaldo; Vocales: Dr. Hilario Magliano. Dra. Juana Cortelezzi; Ing. Juan Sabato; Dr. Federico E. Christmann.

SOCIOS ACTIVOS

Alsina Fuertes, Fidel
Angli, Jerónimo
Arroyo Basaldúa, Víctor M.
Bonet, Luis A.
Cortelezzi, Juana
Crespi Gherzi, Rodolfo A.
Christmann. Federico E.
Daló, Héctor R.
Ferrari, Obdulio J. F.
Gascón, Jorge
Gershánik, Simón
Giovambattista, Humberto
Grisi, Adolfo P.
Magliano, Hilario
Méndez, José D.
Micheletti, Luis A
Nico, Raúl
Oliva, Virgilio
Paternosto, Pedro G.
Platzceck, Ricardo P.
Sabato, Ernesto R.
Sabato, Juan
Sáez, Francisco A.
Sagastume, Carlos A
Teobaldo, Carlos
Toranzos, Fausto I
Trejo, César A.
Vucetich, Danilo C
Wilkens, Alejandr

SOCIOS CORRESPONDIENTES

Aguilar y Santillán, R.......	México
Amaral, Afranio de.........	San Pablo (Br.)
Avendaño, Leónidas.........	Lima
Alvarez, Antenor...........	Sgo. del Estero
Bonarelli, Guido...........	Gubbio (It.)
Borel, Emile................	París
Bachmann, Carlos J.........	Lima
Bragg, William Henry......	Londres
Bolívar, Ignacio............	Madrid
Bruch, Carlos...............	Olivos (B. A.)
Cabrera, Blás...............	Madrid
Campos Porto, Pablo........	Río de Janeiro
Carabajal, Melitón M.......	Lima
Corti, José S...............	Mendoza
Darmois Georges............	París
Dávila, Rubén..............	Santiago (Ch.)
Dabbene, Roberto...........	La Plata
Escomel, Edmundo..........	Arequipa (P.)
Fiebrig, Carlos.............	Munich (Al.)
Fontecilla Larrain, Arturo...	Santiago (Ch.)
Fort, Michel................	Lima
González del Riego, Felipe..	Lima
Greve, Germán..............	Santiago (Ch.)
Guinier, Philibert...........	Nancy (Fr.)
Hadamard, Jacques.........	París
Hauman, Luciano...........	Bruselas
Hernández, Juvenal.........	Santiago (Ch.)
Hijar y Haro, Luis.........	México
Janet, Pierre................	París
Jiménez de Asúa, Luis......	Madrid
Kinart, Fernando...........	Amberes
Lahille, Fernando...........	Tarn (Fr.)
Langevin, Paul.............	París
Levi Civita, Tulio...........	Roma
Lobo, Bruno................	Río de Janeir
Mardones, Francisco........	Santiago (Ch.)
Molina, Enrique............	Concepc. (Ch.)
Monjarás, Jesús E..........	México
Moretti, Gaetano............	Milán
Oliver Schneider, Carlos....	Santiago (Ch.)
Pereira d'Andrade, Lencastre.	Nova Goa (I. I
Perrin, Tomás G............	México
Porter, Carlos E............	Santiago (Ch.)
Pi y Suñer, Augusto........	Barcelona
Reyes Cox, Eduardo........	Santiago (Ch.)
Rospigliosi y Vigil, Carlos..	Lima
Rowe, Leo S................	New York
Shepperd, William R........	Wáshington
Tello, Julio C...............	Lima
Villarán, Manuel V.........	Lima
Vélez, Daniel M............	México
Valle, Rafael H............	México
Vitoria, Eduardo............	Barcelona
Volterra, Vito..............	Roma

ANALES
DE LA
SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

ADOPTADOS PARA SUS PUBLICACIONES POR LA

ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

DIRECTOR: EMILIO REBUELTO

JUNIO 1938. — ENTREGA VI. — TOMO CXXV

SUMARIO

BUENOS AIRES
CALLE SANTA FÉ 1145

1938

Impreso en los Talleres Gráficos "TOMAS PALUMBO" - La Madrid 321-325 - Buenos Aires

SECCIÓN OFICIAL

DE LA

SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA

SECCIÓN "SANTA FÉ"

Asamblea Ordinaria del 14 de Mayo de 1938

Visita a la fábrica de la Cía. Argentina de Cemento Portland (Paraná)

El 14 de Mayo de 1938, bajo la presidencia del Dr. Gustavo A. Fester, se realizó la Asamblea anual ordinaria de la Sociedad Científica Argentina (Sección «Santa Fe») en la que se leyó y aprobó la Memoria de la presidencia y balances de tesorería correspondientes al período 1937-1938, procediéndose luego a la elección de las autoridades de la Sección para el período 1938-1939.

Ese mismo día se efectuó una visita a la nueva fábrica de cemento de Paraná (Bajada Grande) en la que participó un grupo de socios y de estudiantes de la Facultad de Química especialmente invitados.

La planta industrial de esta fábrica, de una capacidad fabril de 100 a 150 mil toneladas anuales, es una de las más modernas del país y su horno giratorio, de 120 m. de largo, es en la actualidad, el más grande del mundo. La materia prima, constituída por caliza, limo y loess de la barranca, después de pasar por un sistema de desmenuzamiento (quebrantadora, molino Hércules, molino a bolas) se somete a un tratamiento nuevo en esta industria: una clasificación húmeda en decantadores continuos de Dorr y en aparatos de flotación, separándose una espuma de materia calcárea, arcillosa, oleína, solvente orgánico y aire; de un resíduo de arena. El barro, algo deshidratado por decantación, entra en el gran horno

en contracorriente a la llama del fuel-oil, transformándose en «clinkers» de cemento.

Las operaciones subsiguientes son las usuales: trituración con adición de yeso en molinos a bolas y envasado en bolsas de papel o arpillera de 50 kg.

Los visitantes disfrutaron de atenciones especiales y explicaciones detalladas por parte del superintendente Sr. J. O'Callaghan y demás empleados de la fábrica.

Informe de la Presidencia leído en la Asamblea Ordinaria del 14 de Mayo de 1938

Estimados consocios:

En nombre de la C. Directiva de la Sociedad Argentina, Sección Santa Fé, cuyo período termina en la fecha, elevo a vuestra consideración, un resumen de la labor realizada:

COMUNICACIONES

En la sesión del día 25 de junio de 1937, se presentaron los siguientes trabajos:

José Babini. — Sobre un problema de Descartes.

Guillermo Berraz. — Microanálisis orgánico por gasometría.

Carlos Christen - Guillermo Berraz. — Representación gráfica de aparatos de laboratorio.

Fester Gustavo - José Cruellas - Ferrucio Gargatagli. — La «Magallanita», un nuevo mineral bituminoso.

En la sesión del 13 de agosto del mismo año, se presentaron los siguientes trabajos:

Dámaso Lachaga. — Las grietas en el suelo de Santiago del Estero.

Horacio Damianovich. — Ley de producción del Helio por el Radio. Resultados obtenidos hasta el presente y nuevas experiencias.

Horacio Damianovich - José Piazza. — Descomposición térmica de los compuestos Helio-Platino a altas presiones en atmósfera de Helio.

Horacio Damianovich - Francisco Urondo. — Helio y radioactividad en los minerales de Uranio: Aunita.

José Piazza. — Nuevo motor térmico.

En la sesión de comunicaciones del 10 de diciembre de 1937, se presentaron los siguientes trabajos:

Gregorio Kleer. — Sobre algunas rocas igneas y metamórficas con su interpretación.
José Babini. — Sobre algunas propiedades de las derivadas y primitivas de los polinomios de Legendre.
Francisco Urondo. — Radioactividad de sales, de salinas argentinas.
Gustavo A .Fester. — Geo-química del vanadio.

Aparte de estas actividades, las que se desarrollaron en el Museo Tecnológico de la Facultad de Química Industrial y Agrícola, la C. D. organizó conferencias que estuvieron a cargo de los señores Duncan Wagner, Dres. Christofredo y German Jakob y del que habla.

La primer conferencia estuvo a cargo del señor *Duncan Wagner,* Vice-Presidente del Museo Arqueológico de Santiago del Estero, la que versó sobre «Qué debe pensarse, de las hipótesis que afirman que la América es la cuna de todas las civilizaciones prehistóricas». Tuvo lugar el día 4 de mayo de 1937.

La segunda, realizada el día 1 de octubre del mismo año, estuvo a cargo del *Dr. Christofredo Jakob,* con la colaboración de su hijo *Dr. German Jakob;* el tema desarrollado versó sobre «La necesidad de fiscalizar las reservas acuáticas andinas en la República Argentina».

La última conferencia, a cargo del *Dr. Gutavo A. Fester,* y que tuvo lugar el día 2 de octubre del mismo año, trató sobre «Viaje de estudio a la zona magallánica y Tierra del Fuego».

Estas conferencias fueron ilustradas por proyecciones cinematográficas tomadas por los mismos disertantes, habiendo servido como marco el Salón de Actos de la Facultad de Química Industrial y Agrícola.

El apoyo que la Sociedad Científica Argentina, Sección Santa Fé, encontró en la Sección «Extensión Universitaria» del Instituto Social de la Universidad Nacional del Litoral, bajo la dirección de nuestro consocio Ingeniero José Babini, que en todo momento apoyó y cooperó en la realización de las citadas conferencias, merece ser destacado, dejando aquí expresa constancia de nuestro agradecimiento; así como a las autoridades de la Facultad de Química, que han puesto a nuestra disposición los locales.

Con el acto de hoy, consistente en una visita de estudio a la *Fábrica Argentina de Cemento Portland, de Paraná,* en Baja Grande, la Sociedad cierra el período de sus actividades.

Movimiento de socios

Durante este período hubo el siguiente movimiento de socios activos: Ingresaron 3; uno solicitó pase para incorporarse a la Central y 5 renunciaron. En definitiva el número actual de socios activos alcanza a 53 y el de honorarios a uno.

Informe de Tesorería

Del informe presentado por Tesorería se desprende como entrada bruta $ 1282,73 y una salida de $ 998,95. Lo que arroja un saldo favorable de $ 283, 78, importe que se encuentra depositado en la caja de la Sociedad. Como en los ejercicios anteriores, nuestra institución mantiene sus relaciones financieras con la Central, aportando la suma de $ 1,50 por asociado y por mes, de acuerdo a lo convenido oportunamente.

Sección Publicaciones

Los resúmenes de los trabajos presentados en las diversas sesiones, así como las conferencias han sido publicados en los Anales de la Sociedad, de los cuales se hicieron tirajes aparte, necesarios para mantener el canje.

Señores consocios: lo expuesto es en síntesis, la labor desarrollada por nuestra Sociedad en este período y que someto a vuestra consideración, tarea que ha sido facilitada por el entusiasmo y colaboración de los miembros de la C. D. y de las autoridades de la C. Directiva Central.

José Cruellas
Secretario

Gustavo A. Fester
Presidente

COMISIÓN DIRECTIVA

Período 1938-1939

Presidente	Dr. GUSTAVO A. FESTER
Vice-Presidente	Dr. JOSÉ PIAZZA
Secretario de actas	Ing. Quím. JOSÉ CRUELLAS
Secretario de correspondencia	Ing. Quím. FRANCISCO A. BERTUZZI
Tesorero	Ing. Quím. ENRIQUE VIRASORO
Vocal titular I	Ing. JOSÉ BABINI
Vocal titular II	Prof. ROLANDO HEREÑU
Vocal suplente I	Prof. JULIO SALABER
Vocal suplente II	Ing. Quím. GUILLERMO BERRAZ
Encargado de Publicaciones	Ing. JOSÉ BABINI
Encargado de Biblioteca y Canje	Ing. Quím. RODOLFO ROUZAUT

SOCIOS ACTIVOS

Anadón, Leonidas
Ariotti, Carlos
Babini, José
Bertuzzi, Francisco A.
Berraz, Guillermo
Bonazzola, César
Borzone, Rodolfo
Bossi, Celestino
Benet, José
Caballero, Martín A.
Claus, Guillermo
Crouzeilles, A. L. de
Cruellas, José
Christen, Carlos
Christen, Rodolfo
Courault, Pablo
Cerana, Miguel
Cohan, Marcos
Damianovich, Horacio
Falco, Federico
Fester, Gustavo
Gollán, Josué
Guinle, Hugo
Gschwind, Eduardo
Hereñú, Rolando
Hochewer, Curto
Juliá Tolrá, A.
Kleer, Gregorio
Lachaga, Dámaso
Mai, Carlos A.
Mántaras, Fernando
Marelli, Hipólito
Mounier, Celestino
Muzzio, Enrique
Marino, Antonio
Montpellier, Luis
Nigro, Angel
Niklison, Carlos
Oliva, José
Piazza, José
Piñero, Rodolfo
Pozzo, Hiram J.
Peresutti, Luis
Reinares, Sergio
Rouzaut, Rodolfo
Ragonese, Arturo
Salaber, Julio
Salgado, José
Schivazappa, Mario
Santini, Bruno
Simonutti, Atilio
Tissembaum, Mariano
Urondo, Francisco
Virasoro, Enrique

BALANCE DE TESORERIA

EJERCICIO 14 - IV - 37 — 30 - IV - 38

DEBE		HABER	
Saldo del ejercicio anterior .... $	42.73	— Depositado en cuenta corriente del Banco de la Nación Argentina a la orden de la Sociedad Científica Argentina .... $	718.50
Importe de 620 recibos de la Sociedad Científica Argentina (Sección Santa Fé) .... $	1240.00	— Por comisión cobranza de 611 recibos de la Sociedad Científica Argentina (Sección Santa Fé) .... $	183.30
		— Impresiones varias .... $	20.00
		— Artículos de librería .... $	8.40
		— Suscripción por 1 año a «Comptes Rendus de l'Academie des Sciences», Francia ..... $	58.75
		— Por servicios prestados en Conferencias, etc. $	10.00
		— Efectivo en Tesorería .... $	283.78
	1282.73		1282.73

E. Virasoro
Tesorero

G. Fester
Presidente

Santa Fe, 30 de Abril de 1938.

SOBRE LAS SERIES DOBLES ASINTÓTICAS

POR J. C. VIGNAUX

INTRODUCCIÓN. — La teoría de las series asintóticas (simples) de H. Poincaré (1) ha dado lugar en estos últimos tiempos a varios trabajos fundamentales y a numerosas aplicaciones tanto al Análisis Superior (ecuaciones diferenciales, funciones determinantes, funciones cuasi-analíticas), como a la Mecánica Celeste y a la Física Matemática.

En dos comunicaciones, una a la *Sociedad Científica Argentina* y la segunda a la *R. Accademia Nac. dei Lincei* (2), al ocuparnos de la teoría de las funciones determinantes de varias variables, definida por la integral doble de Laplace

$$f(z, w) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-xz-wy} \varphi(x, y)\, dx\, dy$$

proponíamos una representación de estas funciones mediante un desarrollo en serie doble asintótica

$$f(z, w) \sim \sum_0^\infty \sum_0^\infty \frac{a_{mn}}{z^m w^n}$$

(1) H. POINCARÉ. *Acta Math*, V. 8 (1886), p. 296; *Nouvelle Methode de la Mecanique Celeste*.

Véase también: E. BOREL, *Lecons sur les séries divergentes*, Gauttier-Villars, París (1928, 2ª ed.), y *su Tesis* (*Ann. Ec. Norm.* sup., t. XII, 1895); T. CARLEMAN, *Sur les fonctions quasi-analytiques*, París (1926); F. RIESZ, *Les systemes linéaires a une infinité d'inconnues*, p. 19, París (1920); W. B. FORD, *Studies on divergent series and Summability*, Michigan, Sc. Series, V. II, p. 1-17 (1916); T. FORT, *Infinite series*, Oxford (1930).

(2) J. C. VIGNAUX, *Sobre la teoría de las funciones determinantes de dos variables*, t. CXII, p. 357 (1931); *Sulla trasformazione di Laplace di due variabili* (Pervenuta all'Accademia il 17 Agost 1933 dal socio S. Pincherle). La memoria con los desarrollos de los resultados expuestos en estas Notas, está en curso de publicación en este mismo lugar.

y en series dobles de factoriales

$$f(x, y) = \sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} \frac{m!\, n!\, a_{mn}}{x(x+1)\ldots(x+m)\, y(y+1)\ldots(y+n)}$$

Las *series dobles de factoriales*, así como las *series dobles de Dirischlet*, han sido estudiadas ampliamente por Kogima, Adam Leja, Biggieri...; pero nada se ha hecho aún — a mi conocimiento — sobre las *series dobles asintóticas*.

En la presente Nota me propongo desarrollar la parte algebraica de esta teoría limitándome al campo real, reservado el estudio de las series dobles asintóticas y su aplicación a las *funciones cuasi-analíticas de dos variables* para una memoria en curso de publicación, (1).

2. Definición. — Consideremos la serie doble de potencia de la forma

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{mn}}{x^m\, y^n} \qquad [1]$$

convergente o divergente, donde $\{a_{m,n}\}$ son constantes reales.

Dada la función $f(x, y)$ de dos variables reales x e y, diremos que el desarrollo [1] *representa asintóticamente* la $f(x, y)$ si poniendo

$$\varepsilon_{m,n}(x, y) = x^m\, y^n \left[f(x, y) - \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \frac{a_{ij}}{x^i\, y^j} \right] \qquad [2]$$

se tiene

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \varepsilon_{m,n}(x, y) = 0$$

cualquiera sea m y n.

(1) *Las funciones cuasi-analíticas de varias variables*. Contribución al Estudio V. 8, E. 4 (1936). (Departamento de Matemática).

Sobre la teoría de las *funciones cuasi-analíticas de una variable* de Borel-Denjoy, además de las lecciones clásicas de C. de la Valle-Poussin y de la obra de Carleman ya citada, acaba de aparecer publicadas las sabias lecciones del Prof. M. Mandelbrojt, en el Instituto H. Poincaré, de París, con el título: *Series de Fourier et clases quasi-analytiques de fonctions*, París (1935). Sobre estas importantes cuestiones me he ocupado en algunas lecciones del Colegio Libre de Estudios Superiores durante el año 1934.

Esta relación se expresará con la notación

$$f(x, y) \sim \sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} \frac{a_{m,n}}{x^m y^n}$$

La relación [2] nos da

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \frac{a_{ij}}{x^i y^j} + \frac{\varepsilon_{m,n}(x, y)}{x^m y^n}$$

con

$$\lim_{(x,y)\to 0} \varepsilon_{m,n}(x, y) = 0 .$$

Si una función admite un desarrollo asintótico, éste es único en virtud del

Teorema I. — Si

$$f(x, y) \sim \sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} \frac{a_{m,n}}{x^m y^n}$$

y

$$f(x, y) \sim \sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} \frac{b_{m,n}}{x^m y^n}$$

se tiene

$$a_{ij} = b_{ij} \qquad (i, j = 0, 1, 2, \ldots)$$

En efecto; por hipótesis

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \frac{a_{ij}}{x^i y^j} + \frac{\varepsilon_{m,n}}{x^m y^n} \quad , \lim_{x,y\to\infty} \varepsilon_{m,n}(x, y) = 0$$

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \frac{b_{ij}}{x^i y^j} + \frac{\delta_{m,n}}{x^m y^n} \quad , \lim_{x,y\to\infty} \delta_{m,n}(x, y) = 0$$

de donde

$$0 = c_{00} + \frac{c_{01}}{y} + \frac{c_{02}}{y^2} + \ldots + \frac{c_{0n}}{y^n} \qquad [3]$$

$$+ \frac{c_{10}}{x} + \frac{c_{11}}{x\,y} + \frac{c_{12}}{x\,y^2} + \ldots + \frac{c_{1n}}{x\,y^n}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{c_{m,0}}{x^m} + \frac{c_{m-1,0}}{x^m\,y} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{c_{m,n}}{x^m\,y^n} + \frac{\varepsilon_{m,n} - \delta_{m,n}}{x^m\,y^n}$$

habiendo puesto

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}\,.$$

Si en esta igualdad se hace $(x, y) \longrightarrow \infty$, resulta entonces

$$c_{00} = 0 \quad \text{es decir} \quad a_{00} = b_{00}\,,$$

Razonando del mismo modo sobre la [3] habiendo previamente sustituído el valor $c_{00} = 0$ y multiplicado ambos miembros por y, resulta

$$c_{01} = 0 \quad \text{es decir} \quad a_{01} = b_{01}\,,$$

y así sucesivamente

$$a_{10} = b_{10}, \quad a_{11} = b_{11}, \ \ldots$$

Este desarrollo es por lo tanto *único*. La recíproca no es cierta, como luego veremos.

3. Desarrollo en serie doble asintótica. — El algoritmo de Stieljes se puede extender, en la forma siguiente: Sea $f\,(x, y)$ una función de dos variables x e y positivas y tal que

$$\lim_{x,\,y \to \infty} f\,(x, y) = a_{00} \qquad (a_{00} \text{ finito})\,.$$

El número a_{00} da una aproximación de $f\,(x, y)$ para valores muy grandes de x e y.

Supongamos además que se verifiquen las relaciones siguientes:

$$\lim_{(x,y)\to\infty} x\left[f(x,y) - a_{00}\right] = a_{10} \qquad \text{o sea} \qquad x\left[f(x,y) - a_{00} - \frac{a_{10}}{x}\right] \to 0$$

$$\lim_{(x,y)\to\infty} y\left[f(x,y) - a_{00} - \frac{a_{10}}{x}\right] = a_{01} \qquad » \qquad y\left[f(x,y) - a_{00} - \frac{a_{01}}{y} - \frac{a_{10}}{x}\right] \to 0$$

$$\lim_{(x,y)\to\infty} xy\left[f(x,y) - a_{00} - \frac{a_{01}}{y} - \frac{a_{10}}{x} - 0\right] = a_{11} \qquad » \qquad xy\left[f(x,y) - a_{00} - \frac{a_{01}}{y} - \frac{a_{10}}{x} - \frac{a_{11}}{xy}\right] \to 0$$

$$\lim_{(x,y)\to\infty} y^2\left[f(x,y) - a_{00} - \frac{a_{01}}{y} - \frac{a_{10}}{x} - \frac{a_{11}}{xy}\right] = a_{02} \qquad » \qquad y^2\left[f(x,y) - a_{00} - \frac{a_{01}}{y} - \frac{a_{02}}{y^2} - \frac{a_{10}}{x} - \frac{a_{11}}{xy}\right] \to 0$$

$$\lim_{(x,y)\to\infty} xy^2\left[f(x,y) - a_{00} - \frac{a_{01}}{y} - \frac{a_{02}}{y^2} - \frac{a_{10}}{x} - \frac{a_{11}}{xy}\right] = a_{12} \qquad » \qquad xy^2\left[f(x,y) - a_{00} - \frac{a_{01}}{y} - \frac{a_{02}}{y^2} - \frac{a_{10}}{x} - \frac{a_{11}}{xy} - \frac{a_{12}}{xy^2}\right] \to 0$$

. . . .

y así sucesivamente.

Esto nos conduce a escribir

$$\begin{aligned} f(x,y) = {} & a_{00} + \frac{a_{01}}{y} + \dots + \frac{a_{0n}}{y^n} + \dots \\ & + \frac{a_{10}}{x} + \frac{a_{11}}{xy} + \dots + \frac{a_{1n}}{xy} + \dots \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + \frac{a_{n0}}{x^n} + \frac{a_{n1}}{x^{n-1}y} + \dots + \frac{a_{n1n}}{x^{n-1}y} + \dots \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Puede suceder que el desarrollo encontrado de este modo no sea *conervgente;* pero, de acuerdo a la definición de la representación asintótica, no se estudia en realidad una serie divergente, sino una cierta función $\varepsilon_{m,n}(x, y)$.

Así, por ejemplo, la función

$$f(x, y) = e^{-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$$

tiene por desarrollo asintótico, la serie

$$e^{-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}} \sim \sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} \frac{0}{x^m y^n}$$

que se deduce fácilmente aplicando el proceso anterior.

También se obtiene el desarrollo de dicha función en la forma siguiente:

Sabemos que

$$e^{-\frac{1}{x}} = 0 + \frac{0}{x} + \frac{0}{x^2} + \ldots = f_m + \frac{\varepsilon_m(x)}{x^m} \quad , \quad \lim_{x \to \infty} \varepsilon_m(x) = 0$$

y

$$e^{-\frac{1}{y}} = 0 + \frac{0}{y} + \frac{0}{y^2} + \ldots = g_n + \frac{\delta_n(x)}{y^n} \quad , \quad \lim_{x \to \infty} \delta_n(x) = 0$$

Multiplicando miembro a miembro estas relaciones, resulta

$$e^{-\frac{1}{x}} . e^{-\frac{1}{y}} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \frac{0}{x^i y^j} + f_m \delta_n \frac{1}{y^n} + g_n \varepsilon_m \frac{1}{x^m} + \frac{\varepsilon_m \delta_n}{x^m y^n}$$

la cual podemos escribir

$$e^{-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \frac{0}{x^i y^j} + \frac{\eta_{m,n}(x, y)}{x^m y^n} \quad , \quad \lim_{(x,y) \to \infty} \eta_{m,n}(x, y) = 0$$

4. Operaciones fundamentales. — Una vez definida la correspondencia entre una función de dos variables y una serie doble asintótica, vamos a probar que esta correspondencia se conserva en las operaciones fundamentales.

Teorema II. — *Si se tiene*

$$f(x, y) \sim \sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} \frac{a_{mn}}{x^m y^n}$$

$$g(x, y) \sim \sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} \frac{b_{m,n}}{x^m y^n}$$

resulta entonces

$$f(x, y) + g(x, y) \sim \sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} \frac{a_{mn} + b_{m,n}}{x^m y^n}.$$

Por hipótesis,

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \frac{a_{ij}}{x^i y^j} + \frac{\varepsilon_{mn}(x, y)}{x^m y^n} \quad , \lim_{(x,y) \to \infty} \varepsilon_{mn}(x, y) = 0$$

y

$$g(x, y) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \frac{b_{ij}}{x^i y^j} + \frac{\delta_{m,n}(x, y)}{x^m y^n} \quad , \lim_{(x,y) \to \infty} \delta_{m,n}(x, y) = 0.$$

Sumando miembro a miembro estas dos igualdades, se tiene

$$f(x, y) + g(x, y) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} (a_{ij} + b_{ij}) \frac{1}{x^i y^j} + \frac{\eta_{m,n}(x, y)}{x^m y^n}$$

donde

$$\eta_{m,n}(x, y) = \varepsilon_{m,n}(x, y) + \delta_{m,n}(x, y)$$

y como

$$\eta_{m,n}(x, y) \longrightarrow 0 , \quad (x, y) \longrightarrow \infty$$

el teorema queda demostrado.

De aquí resulta inmediatamente que si

$$f(x, y) \sim \sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} \frac{a_{m,n}}{x^m y^n}$$

la función

$$g(x, y) = f(x, y) + e^{-\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}$$

tiene el mismo desarrollo asintótico.

Teorema III. — Si

$$f(x, y) \sim \sum_0^\infty \sum_0^\infty \frac{a_{m,n}}{x^m y^n}$$

$$g(x, y) \sim \sum_0^\infty \sum_0^\infty \frac{b_{m,n}}{x^m y^n}$$

resulta entonces

$$f(x, y) \cdot g(x, y) \sim \sum_0^\infty \sum_0^\infty \frac{c_{m,n}}{x^m y^n}$$

donde

$$c_{m,n} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{ij}\, b_{m-i,n-j}\,.$$

Por hipótesis, es

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \frac{a_{ij}}{x^i y^j} + \frac{\varepsilon_{m,n}(x, y)}{x^m y^n} = f_{m,n} + \frac{\varepsilon_{m,n}}{x^m y^n}$$

$$g(x, y) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \frac{b_{ij}}{x^i y^j} + \frac{\delta_{m,n}(x, y)}{x^m y^n} = g_{m,n} + \frac{\delta_{m,n}}{x^m y^n}$$

con

$$\lim_{(x,y)\to 0} \varepsilon_{m,n} = \lim \delta_{m,n} = 0\,.$$

Multiplicando miembro a miembro resulta:

$$f(x, y) \cdot g(x, y) = f_{m,n} \cdot g_{m,n} + f_{m,n} \frac{\delta_{m,n}}{x^m y^n} + g_{m,n} \frac{\varepsilon_{m,n}}{x^m y^n} + \frac{\varepsilon_{m,n} \cdot \delta_{m,n}}{x^{2m} y^{2n}}\,;$$

y como

$$f_{m,n}\, g_{m,n} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \frac{c_{ij}}{x^m y^n}$$

se tiene entonces

$$x^m y^n \left[f(x, y) \cdot g(x, y) - \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \frac{c_{ij}}{x^m y^n} \right] =$$

$$= \frac{\eta_{m,n}(x, y)}{x^m y^n} + f_{m,n}\, \delta_{m,n} + g_{m,n}\, \varepsilon_{m,n}$$

y puesto que:

$$\lim f_{m,n} = a_{00} \quad , \quad \lim g_{m,n} = b_{00}\,,$$

$$\eta_{m,n}(x, y) \longrightarrow 0 \quad (x, y) \longrightarrow \infty\,;$$

la relación anterior prueba el teorema.

De aquí resulta, como caso particular, la potencia de exponente entero y positivo.

Por tanto, combinando estas operaciones se puede calcular un polinomio de la forma

$$F(f) = A_0 + A_1 f + A_2 f^2 + \ldots + A_p f^p .$$

Teorema IV. — *Si es*

$$f(x, y) \sim \sum_0^\infty \sum_0^\infty \frac{a_{m,n}}{x^m y^n}$$

$$g(x, y) \sim \sum_0^\infty \sum_0^\infty \frac{b_{m,n}}{x^m y^n}$$

se tiene

$$\frac{f(x, y)}{g(x, y)} \sim \sum_0^\infty \sum_0^\infty \frac{d_{m,n}}{x^m y^n} ,$$

los coeficientes d_{ij} $(i_j j = 0, 1 \ldots)$ *se determinan de la relación*

$$a_{m,n} = \sum_0^m \sum_0^n b_{ij} \, d_{m-i\, n-j} \qquad (\alpha)$$

siempre que $b_{00} \neq 0$.

Por hipótesis

$$\left.\begin{array}{l} f(x, y) = f_{m,n} + \dfrac{\varepsilon_{m,n}}{x^m y^n} \;, \quad \varepsilon_{m,n} \longrightarrow 0 \\ \\ g(x, y) = g_{m,n} + \dfrac{\delta_{m,n}}{x^m y^n} \;, \quad \delta_{m,n} \longrightarrow 0 \end{array}\right\} (x, y) \longrightarrow \infty$$

De aquí

$$\frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{f_{m,n}}{g_{m,n}} + \frac{\eta}{x^m y^n} ;$$

donde

$$\eta = \frac{\dfrac{\varepsilon_{m,n}}{x^m y^n} - \dfrac{f_{m,n}}{g_{m,n}} \dfrac{\delta_{m,n}}{x^m y^n}}{x^m y^n g_{m,n} + \delta_{m,n}}$$

pero como es

$$\lim_{x, y \to \infty} f_{m,n}(x, y) = a_{00} \quad , \quad \lim_{(x, y) \to \infty} g_{m,n}(x, y) = b_{00} \neq 0$$

resulta entonces

$$\eta \longrightarrow 0 \, , \quad (x, y) \longrightarrow \infty \, .$$

Además

$$\frac{f_{m,n}}{g_{m,n}} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} d_{ij} \frac{1}{x^i \, y^j}$$

donde los coeficientes d_{ij} del cociente se determinan por recurrencia teniendo presente la relación (α). Se tiene, en efecto,

$$\alpha_{00} = b_{00} \, d_{00} \qquad \therefore \quad d_{00} = \frac{a_{00}}{b_{00}}$$

$$a_{01} = b_{00} \, d_{01} + b_{01} \, d_{00} \quad \therefore \quad d_{01} = \frac{a_{01} - b_{01} \, d_{00}}{b_{00}} \, ,$$

$$a_{02} = b_{00} \, d_{02} + h_{01} \, d_{01} + \ldots + b_{02} \, d_{00} \quad \therefore \quad d_{02} = \frac{a_{02} - b_{01} \, d_{01} - d_{02} \, d_{00}}{b_{00}} \, ,$$

. . . .

$$a_{10} = b_{00} \, d_{10} + b_{10} \, d_{00} \qquad \therefore \quad d_{10} = \frac{a_{10} - b_{10} \, d_{00}}{b_{00}}$$

$$a_{11} = b_{00} \, d_{11} + b_{01} \, d_{01} \qquad \therefore \quad d_{11} = \frac{a_{11} - b_{01} \, d_{10}}{b_{00}}$$

. . . .

Por tanto

$$\frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \frac{d_{ij}}{x^i \, y^j} + \frac{\eta \cdot (x, y)}{x^m \, y^n} \, , \quad \eta(x, y) \longrightarrow 0 \quad (x, y) \longrightarrow \infty$$

lo cual prueba el teorema.

5. Vamos ahora a tratar el caso de la *integración* y de la *derivación* de un desarrollo asintótico.

Teorema V. — *Si*

$$f(x, y) \sim \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_{m,n}}{x^m y^n}$$

se tiene

$$\int_x^{\infty}\int_y^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy \sim \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{m+1,n+1}}{m.n} \frac{1}{x^m y^n}.$$

Por hipótesis

$$f(x, y) = \sum_{i=2}^{m} \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{ij}}{x^i y^j} + \frac{\varepsilon_{m,n}(x, y)}{x^m y^n} \quad , \quad \lim_{(x,y) \to \infty} \varepsilon_{m,n} = 0$$

de donde resulta

$$\int_y^{\infty}\int_y^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = \sum_{i=2}^{m} \sum_{j=2}^{n} \int_x^{\infty}\int_y^{\infty} \frac{dx\, dy}{x^m y^n} + \int_x^{\infty}\int_y^{\infty} \frac{\varepsilon_{m,n}\, dx\, dy}{x^m y^n}$$

$$= \sum_{i=2}^{m} \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{ij}}{(i-1)(j-1)\, x^{i-1} y^{j-1}} + \frac{\eta_{m,n}(x, y)}{x^{m-1} y^{n-1}}$$

$$\eta_{m,n}(x, y) = x^{m-1} y^{n-1} \int_x^{\infty}\int_y^{\infty} \frac{\varepsilon_{m,n}(x, y)}{x^m y^n}\, dx\, dy$$

Como lím $\varepsilon_{mn}(x, y) = 0$, fijado un número arbitrario $\delta > 0$ existe un par de números $x(\delta)$, $y(\delta)$, tal que

$$|\varepsilon_{m,n}(x, y)| < \delta \quad , \quad \begin{cases} x > x(\delta) \\ y > y(\delta) \end{cases}$$

Entonces

$$|\eta_{m,n}(x)| \leq x^{m-1}.\, y^{n-1}.\, \delta \int_x^{\infty}\int_y^{\infty} \frac{dx\, dy}{x^m y^n} = \frac{\delta}{(n-1)(m-1)}, \begin{cases} x > x(\delta) \\ y > y(\delta) \end{cases}$$

luego

$$\eta_{m,n}(x, y) \longrightarrow 0 \quad (x, y) \longrightarrow \infty$$

y el teorema queda demostrado.

Dado un desarrollo asintótico doble

$$\sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} a_{m,n} \frac{1}{x^m y^n}$$

la derivación parcial respecto a x (e y), si bien conducen a desarrollos de la misma forma

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{m+1,n} \frac{1}{n\, x^{n-1}\, y^{m}} \quad , \quad -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n+1} \frac{1}{m\, x^{n}\, y^{m-1}}$$

esta operación no siempre es posible.

Así

$$f(x, y) = e^{-x-y} \operatorname{sen}(e^{x+y}) \sim \sum_{0}^{\infty}\sum_{0}^{\infty} \frac{0}{x^m\, y^n}$$

mientras que las funciones

$$f_x'(x, y) = -e^{-x-y} \operatorname{sen}(e^{x+y}) + \cos(e^{x+y}) = f_y'(x, y)$$

no tiene como desarrollo asintótico las series derivadas correspondientes a $f(x, y)$, puesto que

$$\lim_{(x,y)\to 0} \cos(e^{x+y})$$

no existe.

El teorema siguiente nos da una condición suficiente.

Teorema VI. — *Si*

$$f(x, y) \sim \sum_{m=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_{m,n}}{x^m\, y^n} \qquad [1]$$

$$f_x'(x, y) \sim \sum_{m=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_{m,n}}{x^m\, y^n} \qquad [2]$$

$$f_y'(x, y) \sim \sum_{m=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_{m,n}}{x^m\, y^n} \qquad [3]$$

entonces las series [2] *y* [3] *son las series derivadas de la* [1].

En efecto, aplicando el teorema de la integración a las series [2] y [3] resulta

$$\int_x^{\infty} f_x'(x, y)\, dx = -f(x, y) \sim \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_{m+1,n}}{m} \frac{1}{x^m\, y^n}$$

$$\int_y^{\infty} f_y'(x, y)\, dy = -f(x, y) \sim \sum_{m=2}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{m,n+1}}{n} \frac{1}{x^m\, y^n}$$

y teniendo presente el teorema I y la condición [1] queda demostrado el teorema.

COTEJOS ECONÓMICOS Y SELECCIÓN ECONÓMICA

POR EL ING. MAURICIO DURRIEU

(Continuación)

67. — INGRESOS, ENTRADAS O PRODUCTOS. — La explotación de cualquier industria para sus fines, a la vez que origina los costos o cargas, estudiados en lo precedente, engendra asimismo *ingresos*, o *entradas*, o *productos*, que son los montos de dinero o apreciados en dinero percibidos por la venta de los objetos o la compensación de los servicios de que la industria haga transferencia a la clientela.

Como los costos de servicio, pueden referirse las entradas a un plazo de ejercicio, generalmente anual, es decir, al *año de explotación*, y como regularmente son diversas de uno a otro año, habrá menester de reducirlas a un valor medio, como lo practicamos antes para los costos de servicio.

Si, pues, el caso más sencillo de fijación de estos ingresos, a que denominamos e, podrá ser

$$\text{entradas anuales, medias} = e_1, \qquad [68]$$

también podrán aplicarse por analogía las expresiones [49] a [60] o [61] a [65], según las circunstancias.

68. — DETERMINACIÓN DEL COSTO INTEGRAL O INVERSIÓN. — En el número 9 hemos definido el capital integral o inversión.

La inversión, dijimos, reune los capitales que para un plazo (espacio de tiempo) y en determinada época, hacen frente a todos los costos, de orden bien permanente o transitorio, a que da lugar una empresa económica.

Evidente es que la formación del capital integral es variable con el tipo de la empresa, así como con las condiciones de plazo en que la gestión económica de dicha empresa es considerada, y atenta la variedad de los tipos de empresa y de las condiciones en que para

cada tipo puede ocurrir su desenvolvimiento económico, las fórmulas generales resultan difíciles de plantear.

De las dos maneras posibles de formar con los costos el capital integral, a saber: *a*) por la suma de todos los capitales presentes; *b*) por capitalización de todas las cargas anuales — la primera ha de usarse en ciertos casos, en los cuales su empleo, a la vez que sencillo, resulte adecuado, por ser primario el conocimiento del capital integral.— La segunda manera, suele ser, no obstante, la más cómoda, tanto porque es más fácil de ordinario su análisis, como porque conocido el importe total medio de las cargas anuales, es sencillo el paso a la fijación de la inversión, como se verá en seguida.

Por de contado, cuando los estudios se hicieren propiamente de ambas maneras, sus resultados deberán corresponderse con estrictez matemática (Nº 46).

69. — Para evitar una pesada exposición de casos y desarrollos matemáticos que ningún interés añadirían a nuestro estudio, vamos a presentar ahora la teoría de la formación del capital integral por capitalización de todas las cargas medias anuales, esto es, de la suma, y, de todas las expensas originadas, bien sean fijas o temporales. Cinco posibilidades son las que ocurre contemplar, a saber:

Plazo $n = a$. — Anualidad media total: y_a.
Esta anualidad constituye, en a años, un capital final (Nº 28).

$$y_a \frac{[(1+r)^a - 1]\,(1+r)}{r}$$

que trasladado al comienzo del plazo, es

$$C_{j_a} = y_a \frac{[(1+r)^a - 1]\,(1+r)}{r\,(1+r)^a} = \frac{T_a}{T_1} y_a \qquad [69]$$

Plazo $n = l$. — Anualidad media total: y_l.
En forma análoga al caso precedente:

$$C_{fl} = y_l \frac{[(1+r)^l - 1]\,(1+r)}{r\,(1+r)^l} = \frac{T_l}{T_1} y_l \qquad [70]$$

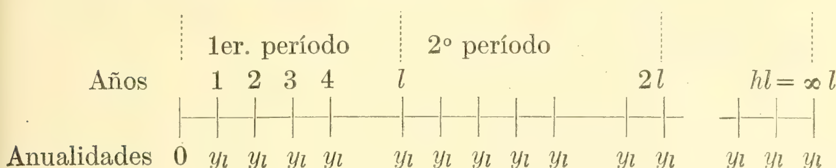
Plazo $n = hl$. — Anualidad media total: y_{hl}.

De idéntico modo

$$C_{f_{hl}} = y_{hl} \frac{[(1+r)^{hl} - 1]\,(1+r)}{r\,(1+r)^{hl}} = \frac{T_{hl}}{T_1} y_{hl} \qquad [71]$$

Plazo $n = \infty$. — Puede originarse por dos circunstancias:

a) $h = \infty$. — Anualidad media total: y_l.



La suma de todas las y_l es

$$y_l \frac{[(1+r)^{hl} - 1]\,(1+r)}{r\,(1+r)^{hl}}$$

y cuando $hl = \infty$

$$C_{f_{hl=\infty}} = y_l \cdot \frac{1+r}{r} \qquad [72]$$

b) $l = \infty$. — Anualidad media total: y_∞.

Como $h_\infty = \infty$

$$C_{f_\infty} = y_\infty \frac{1+r}{r} \qquad [73]$$

es el valor buscado.

En y_∞, no hay amortización, ni $\frac{C_l}{(1+r)^l}$, por ser $\frac{C_l}{(1+r)^\infty} = 0$.

Plazo $n = hl + a$. — Anualidad media total: y_{hl+a}.

$$C_{f_{hl+a}} = y_{hl+a} = \frac{[(1+r)^{hl+a} - 1]\,(1+r)}{r\,(1+r)^{hl+a}} = \frac{T_{hl+a}}{T_1} y_{hl+a} \qquad [74]$$

70. — Formación de las anualidades medias totales según sea la categoría del cotejo. — Con las anualidades parciales estudiadas en este capítulo, ocurre formar, por simple suma, escogiendo las expresiones literales que se avengan al caso, el monto anual total de las cargas de servicio de cualquier entidad económica o empresa.

Detalles minuciosos sobre este punto, nos llevarían a una tarea tan larga como falta de objeto, porque resulta sencillísima la formación de que se trata, una vez bien establecidas sus partes.

Nos limitaremos, pues, al planteo de las expresiones fundamentales de los cuatro géneros o categorías de empresas establecidas en el número 2, y a señalar los conceptos más útiles de su utilización.

Sea, en primer lugar, el caso general de una empresa destinada a crear una manufactura o fábrica, cuya explotación se realice o deba tenerse presente.

Para el caso de que existan inversiones fijas constituídas por un estudio anterior para todos los conceptos discriminados en la [1] (N° 11), será aplicable al cálculo de la amortización de los costos totales por edificios (B), maquinaria y herramental (H) y modelos (F), el sumando dado por la [16], como criterio general (N° 32). Habrá de verse si en este sumando ocurre desdoblar a C, y de qué manera.

Los costos accesorios que simboliza C_u, se incluirán mediante la expresión [17], y los que representan C_v, por una de las fórmulas [18] a [21]. En atención a la variedad de las expresiones así aplicables, estableceremos aquí para su suma el símbolo ΣM_e (suma de menguas).

Los intereses del capital de instalación y otras cargas fijas, serán considerados mediante alguna de las expresiones [22] a [25] (Nos. 37 a 41), y [26], [27], etc. (N° 42), según corresponda. También aquí la variedad de las fórmulas utilizables nos obliga a simbolizar la suma de todas las que deban emplearse en cada caso por el valor literal ΣCr (suma de intereses y otras cargas fijas en la inactividad).

Sin entrar en detalles análogos para las cargas de servicio o explotación, llamaremos simbólicamente P_n, S_n, D_n, $r_1 U$, I, los valores pertinentes de las cargas de producción, conservación y renovación, despacho, intereses del capital circulante y riesgos.

Una expresión simbólica general del costo anual total de explotación, será

$$y_n = \Sigma M_e + \Sigma C_r + P_n + S_n + D_n + r_1 U + I \qquad [75]$$

71. — El segundo género de empresas, es el que propónese explotar una instalación o construcción para realizar un servicio; no para producir objetos.

Es el caso de los ferrocarriles, canales de navegación y otras empresas o vías de transporte; de las empresas de alumbrado y fuerza motriz, etc. Hay terreno, edificios u obras de arte, maquinarias y herramienta de empleo permanente, costos accidentales y accesorios iniciales, y todas estas inversiones de capital reflejan sobre el costo anual de servicio costos por amortización e intereses con arreglo a las deducciones generales ya conocidas, y que hemos resumido de una manera general y simbólica por las cantidades ΣM_e y ΣCr.

Los costos anuales de servicio, asimismo, son los de funcionamiento, P_n, y de conservación, S_n. No ha menester de un capital circulante, porque los costos por materias auxiliares, repuestos, etc., se cubren a medida de su producción con los ingresos de la empresa, y no hay costos de despacho o venta. La expresión general simbólica de los costos totales de explotación, se escribirá, por lo tanto:

$$y_n = \Sigma' M_e + \Sigma Cr + P_n + S_n + I \qquad [76]$$

72. — Para el tercer género do empresas, que refiérese a explotaciones sin instalaciones ni consumo de materias, o sea a empresas de servicios manuales (equipos de personal, con herramientas únicamente), el valor y_n de la [76] no comprende ya los términos ΣM_e y ΣCr, quedando reducido a

$$y_n = P_n + S_n + I \qquad [77]$$

S_n, en este caso, se refiere a la conservación del herramental. Si hubiese terreno ocupado por la empresa en su labor, intervendría el interés de T.

73. — Por último, cuando no hay marcha, y sí solamente utilización de construcciones o instalaciones que representan un capital perecedero por desgaste paulatino, pese a los reparos continuados a que sean sometidos los bienes, la expresión de y_n será

$$y_n = \Sigma M_e + \Sigma Cr + S_n + I \qquad [78]$$

74. — Con esto quedan determinadas las fórmulas relativas a las cuatro categorías de empresas mencionadas en el número 2, para su sometimiento a los cotejos económicos generales.

Nada tienen que hacer los cotejos de relación con los precedentes. Nos ocuparemos de ellos en el capítulo cuarto.

CAPITULO TERCERO

SELECCION ECONOMICA

75. — UTILIZACIÓN DE LOS MONTOS DE LOS CAPITALES INTEGRALES Y DE LOS COSTOS ANUALES DE SERVICIO PARA LA SELECCIÓN ECONÓMICA DE INVERSIONES. — La selección económica es la operación que persigue el fin de escoger entre dos o más oportunidades de colocación de caudales, en atención a la *importancia*, la *seguridad*, la *producción* y la *movilidad* del capital que en cada una de esas oportunidades *esté* o *deba ser* invertido. La selección es consecutiva de un cotejo, y tanto puede realizarse entre inversiones ya efectuadas como entre otras previstas, o, finalmente, entre algunas hechas y otras por hacerse.

Elementos de juicio o datos aquilatados en los cotejos necesarios para la selección, suelen ser, en términos generales, tanto los que se miden por un monto pecuniario, como otros no susceptibles de esa expresión, ni tampoco de una apreciación cuantitativa precisa. Los primeros elementos reciben la calificación de *reducibles*, y se prestan a la consideración matemática para asentar — aunque no siempre con predilección — una decisión del asunto. Los elementos del segundo género, a que se dice *irreducibles*, no se prestan a cálculos ciertos; mas, pueden ser con todo decisivos.

De los elementos reducibles del problema de los cotejos económicos, nos hemos ocupado hasta aquí. Si supusiéramos que los irreducibles permanecen invariables de un caso de inversión a otro, o no ofrecen significación en todos los contemplados, cabría establecer que entre dos (o varias) oportunidades de invertir capital — estudiados que fuesen para cada una, conforme a la naturaleza de la inversión propuesta, los elementos reducibles de los empleos de fondos requeridos, — se escogerá, atenta:

a) — la *importancia del caudal o compromiso pecuniario requerido*, la inversión que no rebasare la capacidad económica del capitalista;

b) — la *producción*, la empresa o el empleo de fondos más remunerador.

La elección, entonces, asentará en dos estudios: el del *capital integral* demandado en cada oportunidad, si existiere una limitación en la disponibilidad de los fondos; o en el del *provecho mayor* de una de esas oportunidades, en otra circunstancia.

76. — La comparación de capitales integrales, constituye una elemental cuestión aritmética. La de los *provechos netos*, o *utilidades*, exige una nueva consideración.

Los productos netos de toda operación económica, resultan de deducir las expensas efectivas de servicio de los ingresos brutos. Todo lo que sea gastado en la obtención del servicio, habrá de deducirse. La diferencia formará el *rédito* del capital empeñado en la operación, y tanto podrá expresarse por una suma de dinero como por un porcentaje del capital.

Así, cuando se desee conocer el rédito de una inversión, serán determinadas las cargas anuales efectivas a que conduzca, sin comprender en su monto el interés del capital (1), y restando ese monto así determinado del producto bruto medio, e, obtendremos bien el rédito total, R, o igualmente el porcentual, r_1, por división del primero por el capital inicial.

Cuando fuese distribuído (o pagado) al capital un interés anual, r, el beneficio porcentual, b, alcanzado sobre el capital con la inversión considerada, será:

$$b = r_1 - r. \qquad [79]$$

77. — Aplicando los criterios expresados, obtendremos mediante los resultados de las investigaciones sobre elementos reducibles, y teniendo presente que las anualidades de servicio, y', para el caso no cumulan los intereses del capital:

Plazo $n = a$:

$$R_a = e_{a_m} - y'_a \qquad [80]$$

$$r_{1a} = \frac{e_{a_m} - y'_a}{C - \dfrac{C_a}{(1+r)^a}} \qquad [81]$$

(1) Mas, se dejarán las cargas fijas invariables.

Plazo $n = l$:

$$R_l = e_{l_m} - y'_l \qquad [82]$$

$$r_{1l} = \frac{e_{l_m} - y'_l}{C - \dfrac{C_l}{(1+r)^l}} \qquad [83]$$

Plazo $n = l = \infty$:

$$R_{l=\infty} = e_{l=\infty_m} - y'_{l=\infty} \qquad [84]$$

$$r_{1l=\infty} = \frac{e_\infty - y'_\infty}{C} \qquad [85]$$

Plazo $n = hl$:

$$R_{hl} = e_{hl_m} - y'_{hl} \qquad [86]$$

$$r_{1hl} = \frac{e_{hl_m} - y'_{hl}}{\left(C - \dfrac{C_l}{(1+r)^l}\right)\dfrac{T_{hl}}{T_l}} \qquad [87]$$

Plazo $n = hl = \infty$, por ser $h = \infty$:

$$R_{hl=\infty} = e_{hl=\infty_m} - y'_{hl=\infty} \qquad [88]$$

$$r_{1hl=\infty} = \frac{e_{hl=\infty_m} - y'_{hl=\infty}}{C - \dfrac{C_l}{(1+r)^l}} \qquad [89]$$

Plazo $n = hl + a$:

$$R_{hl+a} = e_{hl+a_m} - y'_{hl+a} \qquad [90]$$

$$r_{1hl+a} = \frac{e_{hl+a_m} - y'_{hl+a}}{(C - C_l)\dfrac{T_{(h+1)l}}{T_l} + C_l - C_a\,(1 - T_{hl+a})} \qquad [91]$$

78. — Para apreciar la mayor conveniencia de una u otra de dos oportunidades de inversión o de inversiones ya realizadas, que brinden las siguientes perspectivas o resultados:

Inversión	*Capital exigido*	*Rédito*
I	C	R
II	$C + C'$	$R + R'$

Señala el ingeniero John Charles Lounbury Fish en su obra « Engineering Economics » (Mc Graw-Hill Book Comp. Inc., New York, 1923, 2ª ed., pág. 111) como regla que si

a) el rédito porcentual $\frac{R'}{C'}$ es satisfactorio, los datos reducibles favorecen la inversión II;

b) $\frac{R'}{C'}$ no resulta satisfactorio, los datos reducibles son favorables a la inversión I.

Añadamos como criterio de suma importancia, cuando se trate de instalaciones, obras, etc., de entidad, que si fuesen empleados capitales ajenos obtenidos a un interés de tasa r, determinada, la mejor inversión se desprenderá del mayor valor que para ella resulte de b (fórmula [79]).

79. — Indudablemente, cuando los elementos reducibles sean conocidos, su aplicación al cálculo del rédito constituirá un simple problema aritmético.

Si, en vez, no se les tuviera a mano, y debiese buscárseles, a la labor aritmética precederá una acción de discernimiento en la que influirá el criterio más o menos agudo y avezado del investigador en materia industrial, o sea la aptitud financiera de aquél.

80. — Datos irreducibles. — Mas, en la materia hasta aquí tratada, nos desprendimos voluntariamente de un aspecto que, no obstante, merece singular atención en numerosos casos: es la influencia, en los estudios de empleo de fondos, de los factores que llamamos irreducibles.

Mientras los reducibles eran factores que conducían a precisar la importancia del capital o su producción (Nº 75), son muy numerosas las circunstancias que, afectando la seguridad o la movilidad de aquel capital, determinan una modificación de la faz económica por aquellos solos factores definida.

La seguridad exige que pueda descontarse la conservación del capital; la percepción regular de las utilidades; una gestión sin responsabilidades ni tropiezos mayores; una satisfactoria tranquilidad mientras el capitalista persevera en la operación.

La movilidad encara: la posible y pronta transferencia, sin quebranto, de la operación, o la cesación de ésta en las mismas condi-

ciones; la obtención de préstamos durante la operación, afianzados en el éxito de ésta; cierta elasticidad de la explotación; la facultad de graduar, asimismo, el empleo de los fondos totales requeridos.

La mayoría de los requisitos pre-enunciados, guarda más o menos amplia dependencia de varias condiciones relativas a la calidad y organización de la operación; a las personas, sociedades, administraciones que en esa gestión intervienen; a la naturaleza de la operación (normal o regular; de especulación); a la futura marcha de los negocios; a las perspectivas económicas.

Para apreciar con éxito estas múltiples circunstancias, no basta el conocimiento de las operaciones industriales; ha menester, aún, de estar al tanto de la organización, del contralor, de la financiación de las empresas; de las relaciones entre gestores y público; de poseer imaginación y penetración capaces de descubrir los variados elementos que afectan el éxito financiero.

En materia de este último, asimismo hacen falta aptitud para interpretar la influencia relativa de cada factor, y discernimiento financiero.

81. — Aplicación de los estudios precedentes a la selección económica. — Para llevar a término un cálculo comparativo, debe procederse como sigue:

1° Recoger datos numéricos precisos;
2° » » fidedignos relativos a eventualidades;
3° escoger el método de equiparación;
4° realizar las aplicaciones numéricas con las fórmulas respectivas;
5° decidir.

82. — Colección de datos numéricos. — La tarea no es cómoda en su comienzo, porque faltando la base de la comparación, es imposible precisar el fin de la recolección.

Uno de los datos, es el relativo al plazo razonable de servicio; otro, el rendimiento o la producción.

Más datos necesarios, fluyen de las cantidades que aparecen en las fórmulas.

Escogido ya el método de cotejo, puede y aún suele ser indispensable una investigación complementaria de la primera.

83. — Colección de datos de eventualidades. — Tiene el objeto de evidenciar, en lo posible, ventajas y desventajas de cada tipo de instalación industrial, obra, estructura, cabalmente inapreciables en su monto pecuniario.

Los datos más importantes de esta especie son:

1 - Costo extraordinario de servicio o funcionamiento de la manufactura, obra, etc., durante el período de construcción, o los de reconstrucción;
2 - pérdidas de utilidades en la explotación de la manufactura, obra, etc., por las interrupciones del servicio, durante la construcción o la renovación;
3 - riesgos de todo género, durante la construcción y después de ella. Estos riesgos pueden emerger de accidentes de servicio o de daños a propiedades o a personas ajenas a la que ordena la obra, etc., y no conviene omitir su consideración, pues montan a menudo a sumas elevadas.
4 - riesgos de accidentes para propiedades o personas, originados por el funcionamiento de la manufactura, obra, etc.;
5 - peligro de accidentes de construcción capaces de prolongar el plazo de ejecución y asimismo de requerir mayores cantidades de materiales y de trabajo para reconstruir las partes perjudicadas o repararlas;
6 - peligros de accidentes para la instalación, obra, etc., después de establecida o construída, que traigan la consecuencia de mayores expensas de conservación o de servicio o funcionamiento, o de unas y otras, o una disminución de rendimiento o de producción;
7 - facilidad o dificultades para obtener el capital a invertirse en la instalación, etc.
8 - Imprevisión en lo relativo al conseguimiento de materiales, personal, etc., tanto para construir como para conservar y hacer servir o funcionar la manufactura, obra, etc.

84. — Elección de un criterio de comparación. — Cuando se trata de crear o estudiar una empresa, instalación u obra de determinado fin, el campo de la investigación económica pertinente redúcese al estudio de tipos, disposiciones y organizaciones viables y equiparables, y ora se formula la comparación entre costos integrales o inversiones de capital, ora entre costos anuales de servicio,

directamente, o referidos en uno y otro caso a la producción o rendición.

La oportunidad de referir las inversiones o los costos anuales de servicio calculados a la unidad de producción o de rendición, preséntase lógica y necesariamente cuando las instalaciones, obras, etc., equiparadas no tienen la misma aptitud de producción o de rendición.

La elección, por otra parte, entre la equiparación de las inversiones y la de cargas anuales, depende esencialmente de que se prefiera o necesite conocer las expensas globales que originará la instalación, obra, etc., en todo el plazo de su aplicación, o bien se quiera saber a cuánto montarán los gastos anuales de explotación.

En algún caso, cuando la preferencia por uno u otro sistema de cotejo no se presente con indiscutible definición, podrá el técnico escoger el que le resulte más cómodo o familiar.

No ha de olvidarse, empero, que el parangón de los costos anuales de servicio permite asimismo hacerse cargo de la sucesión de los costos anuales que deberán atenderse, y señalará con alguna precisión los momentos difíciles o pesados de las explotaciones, enfrentados con las utilidades a percibirse en las épocas correspondientes.

Si las producciones o los aprovechamientos de las instalaciones, obras, etc., difiriesen, los cotejos serán referidos a la producción, calculándose las inversiones por unidad, mediante la fórmula:

$$\frac{C_f}{U}, \qquad [92]$$

donde V es la producción total determinada para la empresa, instalación, obra, etc.; o bien los costos anuales de servicio por unidad de producción, con la fórmula

$$\frac{y}{U}, \qquad [93]$$

de similar origen.

85. — Determinado el método preferible para la equiparación, aún faltará escoger la fórmula pertinente, en atención a los casos estudiados, por la consideración de la vida o duración de la empresa, obra, etc., y del plazo de aplicación que se ofrezca en la circunstancia. Esta elección resulta muy fácil, de ordinario, porque la naturaleza de las instalaciones, obras, etc., y las circunstancias de su empleo, suministran al efecto elementos de juicio precisos.

86. — Decisión. — Practicada que sea la sustitución de valores numéricos obtenidos o estimados en la fórmula elegida para la comparación, cada instalación, obra, etc., comparada suministra un resultado.

El valor mínimo de estos resultados, designará como preferible a la empresa, instalación, obra, etc., a que corresponda, salvo las correcciones que a esta solución puramente aritmética trajesen los datos de eventualidades peculiares de las instalaciones, obras, etc., cotejadas, y que hemos aprendido a considerar con anterioridad (Nº 83).

CAPITULO CUARTO

COTEJOS ECONOMICOS DE RELACION

87. — Concepto general. — Los cotejos económicos de relación, surgen de las comparaciones posibles entre las constancias de la contabilidad de las empresas, dispuestas, vinculadas y razonadas con tino y propiedad (nº 2).

La práctica de escrutar esas constancias con el fin de desprender de ellas algunos criterios económicos, es, sin duda, muy antigua. Modernísima es la que introduce en su estudio relaciones que puntualizan y aún caracterizan ciertos procesos y resultados, y permiten asimismo el parangón de unos y otros en la cíclica sucesión de las operaciones de una sola empresa o de varias similares (1).

Sumamente vasta es la escala de aplicación de estas equiparaciones. Pueden referirse a procesos económicos de conjunto o particularizados, realizarse con cifras corrientes o con *valores índices* (2) quintaesenciados durante la marcha de las elaboraciones o explota-

(1) Propiciada y desarrollada por los alemanes, esta práctica es originaria de los especialistas e investigadores norteamericanos, tales como Alford, Roe, Bliss, Patterson, Wall, Radford, y muchos otros. (Puede verse el *Management Engineering*, Set. 1921; *Management and Administration*, Oct. 1924; *Informes de la sesión de la Chattanoog Regional Meeting of the American Society of Mechanical Engineers*, Oct. 1923; numerosas actas aisladas de la Management Division of the American Society of Mechanical Engineers; etc. Ver igualmente el *Management's Handbook*, pág. 4, 24 y 25).

(2) Son los valores « standard » de los ingleses, o los « Richtzahlen » de los alemanes.

ciones, como términos medios o grados prevalecientes y aún óptimos alcanzados en los procesos respectivos, ora de una sola empresa o de todas las que sean equiparables.

Sometidas a un fino análisis, las *cifras o coeficientes de relación* [1] desde luego aquilatan la condición, el ritmo y en el caso también las vicisitudes, los contratiempos de dichos procesos, y por este solo concepto favorecen la investigación de las causas a que responden esos aspectos o factores de las mismas, al par que sugieren los medios de regirlos con provecho. Mas, al ser igualmente posible la equiparación entre coeficientes internos y exteriores, se ensancha y valoriza aún considerablemente su aplicación.

Los cotejos económicos realizados con cifras de relación, permiten hacer un juicio de la utilidad y conveniencia de las fabricaciones y explotaciones; de la bondad, amplitud y eficiencia de las instalaciones; de los métodos de trabajo; de la dirección y de la conducción de las operaciones; de las proporciones relativas entre factores económicos o materiales en juego; de la influencia misma de los factores externos en la marcha de las empresas.

Ningún elemento de la actividad económica escapa a esta posible y provechosa aplicación: capitales, existencias de toda suerte, de enseres y maquinarias; utilidades y pérdidas computadas, brutas o netas; descomposiciones de costos; estadísticas e informaciones; todo ello se presta a razonar y extraer resultados de gran provecho para encauzar aquella actividad y remediarla cuando tal necesidad se compruebe. Aun puede llegarse, por este camino, a sentar la preferencia de una utilización periódica o de una transformación total de la actividad considerada.

Recordemos que en este sistema de investigación económica, rigen con igual imperio los preceptos fundamentales que ya conocemos, a saber, que los cotejos dependen de la paridad económica de los valores empleados y de la propiedad y conformidad de alcance con que sean ellos deducidos. Mucha razón tiene el ingeniero Dr. F. Zeidler (« Der Kosteningenieur », Berlín, V. D. I. Verlag, G. M. B. H., 1929, pág. 166) al expresar que los procedimientos de contabilidad que permiten esa deducción, han de uniformarse tanto como de delimitarse los hechos y los conceptos a que correspondan los valores

[1] Llámaselos en alemán « Verhältniszahlen ». En su traducción de la obra de K. Mellerowicz *Teoría económica de las explotaciones*, el ingeniero español D. Eladio Sanz Aguado les da el nombre de *coeficientes de explotación.*

utilizados, todo lo cual importa una sujeción a normas (« Normung ») de aquellos procedimientos y de los de preparación estadística.

Trataremos, ahora, de indicar los valores más característicos y propios para los cotejos de relación, y de ofrecer una idea suficiente de las reglas a que deben responder esos cotejos.

88. — La hacienda o caudal y el capital de las empresas. — Se llama *hacienda* o también *caudal* de una empresa industrial a la suma o reunión de todos los valores pecuniarios de que dispone, formados por bienes materiales (muebles e inmuebles), derechos positivos y negativos, créditos y deudas.

Este cúmulo de valores clasifícase según los principios de la Contabilidad por partida doble, en dos grupos, a saber:

El *Activo* (caudal activo o parte poseída), A, formado por los bienes materiales y los créditos y derechos positivos, o, en otros términos, los medios reales destinados en concreto a la actividad industrial.

El *Pasivo* (caudal pasivo; parte debida), P, que reune los derechos negativos (Capital ajeno; gravámenes y deudas). Son los mismos medios destinados a la explotación; pero considerados en *cifras abstractas*.

La diferencia

$$A - P = C \qquad [94]$$

concreta el monto neto de los valores de la hacienda de que dispone la empresa en un momento dado [1]. Podría llamársela *hacienda neta o caudal neto*; mas, tiene igualmente un nombre usual: *Capital propio* o *de participación* de la empresa. El valor P, considerado en la [94], representa, pues, el *capital ajeno*, como se dijo más arriba, con mayor propiedad llamado « *de crédito* ».

La figura 1 suministra una especificación de los valores clasificados en el activo y en el pasivo, y denota con claridad el monto del capital propio correspondiente.

[1] Se escribe igualmente

$$A = P = \text{Deudas} + \text{Capital}.$$

Organización de la Hacienda de las Empresas Industriales

HACIENDA, HABER o CAUDAL

ACTIVO (INVERSIONES)
Parte poseída
(Bienes concretos)

- **Caudal de Explotación**
  - **Caudal fijo (de instalaciones)** (Invierte capital propio o una pequeña cantidad de capital ajeno a largo plazo: obligaciones créditos hipotecarios)
    - Bienes Inmutables: Terrenos que sirven a los fines de la Empresa
    - Materiales
      - Desgastables: Edificios útiles a los fines de la Empresa
      - Instalaciones: Oficinas, Talleres, Obradores
      - Máquinas
      - Herramental
      - Modelos
    - Inmateriales: Patentes; Licencias y derechos similares
  - **Caudal circulante**
    - Almacenables
      - Consumibles: Materias primas; Materias auxiliares (carbón; aceite; estopa; cuerdas, etc.).
      - Productos elaborados en la fábrica o adquiridos fuera de ella, en depósito transitorio.
      - Productos en curso de elaboración.
    - No almacenables: Bienes transitorios
    - Inmutables: Existencia de Caja; Efectos a cobrar; Haber en Bancos; Créditos: garantidos, no garantidos, dudosos
  - Parte temporariamente inactiva del caudal de explotación
- **Caudal de Administración**
  - Terrenos no explotables
  - Títulos
  - Participaciones
  - Créditos hipotecarios
  - Créditos similares

PASIVO (INGRESOS)
Parte debida
Capital ajeno o de crédito
(Cedido a la empresa por los acreedores con la obligación de pagarles un interés)

- **Deudas Exigibles**
  - A largo plazo: Obligaciones; Deudas hipotecarias; Otros gravámenes
  - A corto plazo: Deudas en Bancos; Efectos a pagar; Deudas por mercaderías; Expensas en mora; Fianzas impagas; Deudas por prestaciones; Beneficios aun no repartidos; Ingresos transitorios.

Caudal neto o capital propio o de participación

- **Capital-acciones (nominal)** (fundacional)
- **Reservas** (abiertas o francas)

Fig. 1.

Destácase en ella que el caudal activo es susceptible de una importante división en dos rúbricas generales:

el *caudal de explotación,* que presta servicio para los fines propios de la industria; y

el *caudal de administración,* constituído por valores innecesarios para esos fines.

El caudal de explotación, a su vez, subdivídese en *fijo o de instalaciones* y *circulante.*

Al primero corresponden los bienes raíces destinados a la explotación, incluídos los que ocupan oficinas en las obras, los locales de sanidad para operarios, etc.; las instalaciones relativas a cada destino: moblajes, herramientas y maquinarias de elaboración, de prestación de energía, de movimiento del personal, etc., y asimismo los modelos, las patentes, las licencias, etc. En una palabra, todos los bienes destinados a una utilización durable.

Al segundo pertenecen las existencias de materias primas y auxiliares; los productos elaborados adquiridos, los terminados en la propia industria y los que se hallan en curso de ejecución y sean adecuados, bien estén en los talleres, en depósitos transitorios o en consignación; y por otra parte los fondos disponibles en dinero, cuentas bancarias y créditos por mercaderías, tanto en la sede de la empresa como en sus oficinas destacadas en otros lugares. En otros términos, los bienes destinados a cumplir las obligaciones diarias.

Además de esta clasificación de los elementos del caudal de explotación, puede volverse necesaria en algún caso la distinción entre los *activos* y los temporariamente *inactivos.* Tal puede ofrecerse en parte de los locales o de las maquinarias comprendidas en el caudal fijo, o también en algunos almacenes de materias primas o de productos, así como en ciertos créditos (cristalizados) incluídos en el capital circulante.

Igualmente habrá de considerarse la posibilidad de negociar y aun de liquidar las partes de la hacienda. Esas partes, entonces, son clasificadas en atención a la facilidad o a la dificultad, contrariamente, con que se prestan a esa *realización* de su valor. A este concepto se dará el nombre de *fluidez* o *liquidabilidad.*

La equiparación de las partidas entre el activo y el pasivo, se denomina *balance.*

(Continuará)

CÁLCULO DEL EMPUJE HIDROSTÁTICO EN LAS COMPUERTAS DE SECTOR CIRCULAR

(COMPUERTAS TAINTOR, DE SEGMENTO Y DE SECTOR)

DIAGRAMA DE EMPUJES ESPECÍFICOS

POR EL

ING. JOSÉ S. GANDOLFO

Se han estudiado diversas soluciones para el simple problema que aquí se plantea una vez más: algunas, exactas y laboriosas, exceptuado el procedimiento gráfico de las curvas transformadas; otras, aproximadas y expeditivas, pero que no resuelven todos los casos que puede exigir la técnica.

En esta contribución se estudian series de expresiones que, en definitiva, permiten diseñar un diagrama de empujes específicos, lo suficientemente aproximado como para poder ser considerado exacto en la práctica profesional y por medio del cual se obtiene inmediatamente la curva de empuje específico que le corresponde a cada compuerta de sector circular bajo la carga de agua a que está sometida. Una vez conocida dicha curva de empuje específico no ofrece dificultades el proyecto y cálculo de los elementos resistentes.

Distintas disposiciones del sector. — La altura relativa del centro de rotación C con respecto al umbral y dintel de la compuerta de sector circular da lugar a tres casos distintos:

1er Caso: El centro de rotación se encuentra por encima del dintel de la compuerta [1];

2° Caso: El centro de rotación se encuentra entre el dintel y el umbral de la compuerta [1];

3er Caso: El centro de rotación se encuentra debajo del umbral de la compuerta [2].

(1) Denominadas compuertas Taintor, cuando el eje de giro o apoyo basculante queda por encima del nivel de agua abajo. También se las llama compuertas de segmento.

(2) Se reserva exclusivamente a estas compuertas la denominación de sector.

Notación.

b : ancho de la compuerta;
C : centro de rotación de la compuerta;
h_c : altura máxima del pelo de agua desde la horizontal C;
h_d : altura máxima del pelo de agua desde el dintel de la compuerta;
h_u : altura máxima del pelo de agua desde el umbral de la compuerta;
M : dintel de la compuerta;
N : umbral de la compuerta;
P : empuje que actúa sobre la compuerta de sector circular de ángulo al centro variable;
P_h : componente horizontal del empuje;
P_v : componente vertical del empuje;
R : radio del sector circular;
$\alpha_0{}^\circ$: ángulo del radio del dintel del sector con respecto a la horizontal de C;
$\alpha_1{}^\circ$: ángulo del radio del umbral del sector con respecto a la horizontal de C;
α°, $\alpha_d{}^\circ$, $\alpha_u{}^\circ$: ángulos variables a contar de la horizontal de C;
γ : peso específico del agua;
$\varepsilon = \dfrac{P}{\gamma\, b\, R^2}$: empuje específico;
π : 3,1416.

Determinación del empuje P.

1er *Caso* (Fig. N° 1). — Se considera una zona de compuerta $M\,N'$ siendo N' variable con el ángulo α; h_c es positiva si está por encima de la horizontal de C y negativa en caso contrario.

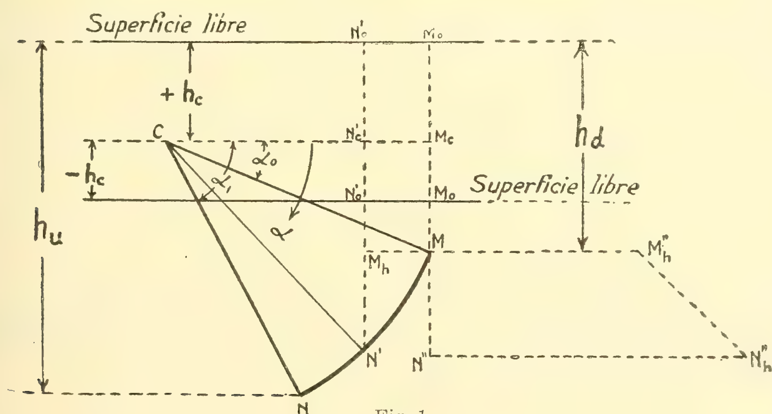


Fig. 1.

Empuje vertical. — Es siempre negativo o sea dirigido hacia arriba. El diagrama de presiones (1) vertical está representado por:

$$\text{área } M N' N_0' M_0 = \text{ sector } C M N' + C \overset{\triangle}{M_c} M - C \overset{\triangle}{N_c'} N' \pm$$

$$\pm \text{ rect. } M_0 M_c N_c' N_0'$$

$$- P_v = \gamma b \text{ . área } M N' N_0' M_0$$

$$- P_v = \gamma b \left[\frac{R^2}{2} \left(\pi \frac{\alpha^\circ - \alpha_0^\circ}{180^\circ} + \operatorname{sen} \alpha_0 \cos \alpha_0 - \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \right) \pm \right.$$

$$\left. \pm h_c R (\cos \alpha_0 - \cos \alpha) \right]$$

$$- P_v = \gamma b R \left[\frac{R}{4} \left(2 \pi \frac{\alpha^\circ - \alpha_0^\circ}{180^\circ} + \operatorname{sen} 2 \alpha_0 - \operatorname{sen} 2 \alpha \right) \pm \right.$$

$$\left. \pm h_c (\cos \alpha_0 - \cos \alpha) \right]$$

$$- P_v = \gamma b R (R C_1 \pm h_c C_2)$$

Empuje horizontal. — El diagrama de presiones horizontal está representado por el área $M M_h'' N_h'' N''$, y:

$$P_h = \gamma b \text{ . área } M M_h'' N_h'' N''$$

$$P_h = \gamma b R (\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \alpha_0) \left[\frac{\pm h_c + R \operatorname{sen} \alpha_0 \pm h_c + R \operatorname{sen} \alpha}{2} \right]$$

$$P_h = \gamma b R \left[\frac{R}{4} (\cos 2 \alpha_0 - \cos 2 \alpha) \pm h_c (\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \alpha_0) \right]$$

$$P_h = \gamma b R (R C_3 \pm h_c C_4)$$

(1) La presión que actúa sobre un punto material, es proporcional a la altura de agua hasta la superficie libre, con dirección normal al plano que lo contiene cualquiera sea su orientación.

Empuje. — El empuje P es evidentemente:

$$P = \sqrt{P_v^2 + P_h^2}$$

2° *Caso* (Fig. N° 2). — Este caso se estudia en dos partes: la primera trata el cálculo de las componentes vertical y horizontal de los empujes que actúan sobre zonas del sector circular de ángulos al centro variables, comprendidos entre el dintel M y la horizontal

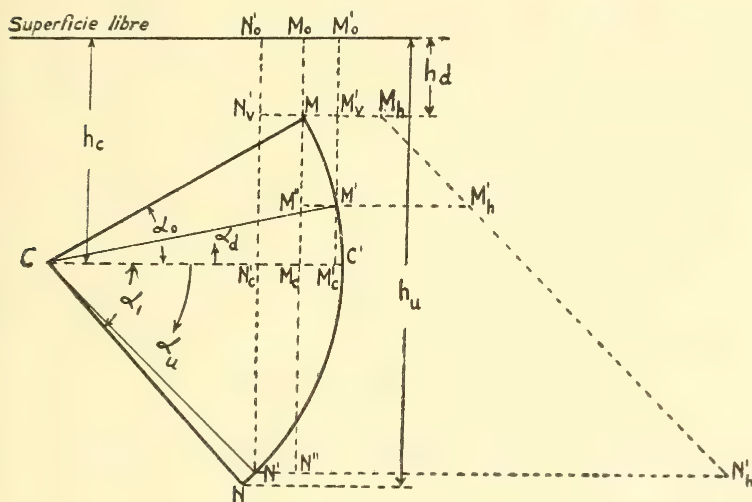


Fig. 2.

de C; es decir, ángulos al centro menores que $\alpha_0°$. La segunda parte trata el cálculo de las componentes vertical y horizontal de los empujes que actúan sobre zonas del sector de ángulos al centro variables, comprendidos entre el dintel M y por debajo de la horizontal de C; los ángulos al centro son mayores que $\alpha_0°$

1ª *parte*: ángulos al centro del sector: $\alpha_0° — \alpha_d°$.

Se considera una zona de compuerta $M\,M'$ siendo M' variable con $\alpha_d°$.

Empuje vertical. — Es siempre positivo, o sea dirigido hacia abajo. El diagrama de presiones vertical está representado por:

$$\text{área } M\,M'\,M_0'\,M_0 = \text{rect. } M_c\,M_0\,M_0'\,M_c' -$$

$$\text{sector } C\,M\,M' - C\,\overset{\triangle}{M'}\,M_c' + C\,\overset{\triangle}{M}\,M_c$$

$$P_v = \gamma\, b\ .\ \text{área } M\,M'\,M_0'\,M_0$$

$$P_v = \gamma\, b \left[h_c\, R\,(\cos\alpha_d - \cos\alpha_0) - \frac{R^2}{2}\left(\pi\,\frac{\alpha_0{}^\circ - \alpha_d{}^\circ}{180^\circ} + \right.\right.$$

$$\left.\left. \text{sen}\,\alpha_d\cos\alpha_d - \text{sen}\,\alpha_0\cos\alpha_0 \right)\right]$$

$$P_v = \gamma\, b\, R \left[h_c\,(\cos\alpha_d - \cos\alpha_0) - \frac{R}{4}\left(2\,\pi\,\frac{\alpha_0{}^\circ - \alpha_d{}^\circ}{180^\circ} + \right.\right.$$

$$\left.\left. \text{sen}\,2\,\alpha_d - \text{sen}\,2\,\alpha_0 \right)\right]$$

$$P_v = \gamma\, b\, R\,(h_c\, C_5 - R\, C_6)$$

Empuje horizontal. — El diagrama de presiones horizontal está representado por el trapecio $M\,M''\,M_h'\,M_h$

$$P_h = \gamma\, b\ .\ \text{área } M\,M''\,M_h'\,M_h$$

$$P_h = \gamma\, b\, R\,(\text{sen}\,\alpha_0 - \text{sen}\,\alpha_d)\left[\frac{h_c - R\,\text{sen}\,\alpha_0 + h_c - R\,\text{sen}\,\alpha_d}{2}\right]$$

$$P_h = \gamma\, b\, R \left[h_c\,(\text{sen}\,\alpha_0 - \text{sen}\,\alpha_d) - \frac{R}{4}\,(\cos 2\,\alpha_d - \cos 2\,\alpha_0) \right]$$

$$P_h = \gamma\, b\, R\,(h_c\, C_7 - R\, C_8)$$

2ª *parte*: ángulos al centro del sector: $\alpha_0{}^\circ + \alpha_u{}^\circ$.

Se considera una zona de compuerta $M\,N'$ siendo N' variable con $\alpha_u{}^\circ$.

Empuje vertical. — Puede ser positivo o negativo. El diagrama de presiones vertical está representado por:

$$\text{área } N' N_0' M_0 M M' C' = \text{sector } C C' N' - C \overset{\triangle}{N_c'} N' +$$

$$+ \text{sector } C M C' - C \overset{\triangle}{M} M_c + \text{rect. } N_0' M_0 M_c N_c'$$

$$- P_v = \gamma b \,.\, \text{área } N' N_0' M_0 M M' C'$$

$$- P_v = \gamma b \left[\frac{R^2}{2} \left(\pi \frac{\alpha_u^\circ}{180^\circ} - \text{sen } \alpha_u \cos \alpha_u \right) + \frac{R^2}{2} \left(\pi \frac{\alpha_0^\circ}{180^\circ} - \text{sen } \alpha_0 \cos \alpha_0 \right) + h_c R (\cos \alpha_0 - \cos \alpha_u) \right]$$

$$- P_v = \gamma b R \left[h_c (\cos \alpha_0 - \cos \alpha_u) + \frac{R}{4} \left(2 \pi \frac{\alpha_0^\circ + \alpha_u^\circ}{180^\circ} - \text{sen } 2 \alpha_0 - \text{sen } 2 \alpha_u \right) \right]$$

$$- P_v = \gamma b R (h_c C_9 + R C_{10})$$

Empuje horizontal. — El diagrama de presiones horizontal está representado por el área del trapecio $M N'' N_h' M_h$

$$P_h = \gamma b \,.\, \text{área } M N'' N_h' M_h$$

$$P_h = \gamma b R (\text{sen } \alpha_0 + \text{sen } \alpha_u) \left[\frac{h_c - R \text{ sen } \alpha_0 + h_c + R \text{ sen } \alpha_u}{2} \right]$$

$$P_h = \gamma b R \left[h_c (\text{sen } \alpha_0 + \text{sen } \alpha_u) + \frac{R}{4} (\cos 2 \alpha_0 - \cos 2 \alpha_u) \right]$$

$$P_h = \gamma b R (h_c C_{11} + R C_{12})$$

Empuje: $$P = \sqrt{P_v^2 + P_h^2}$$

3er *Caso* (Fig. N° 3). — Es idéntico al tratado en la primera parte del 2° Caso (1).

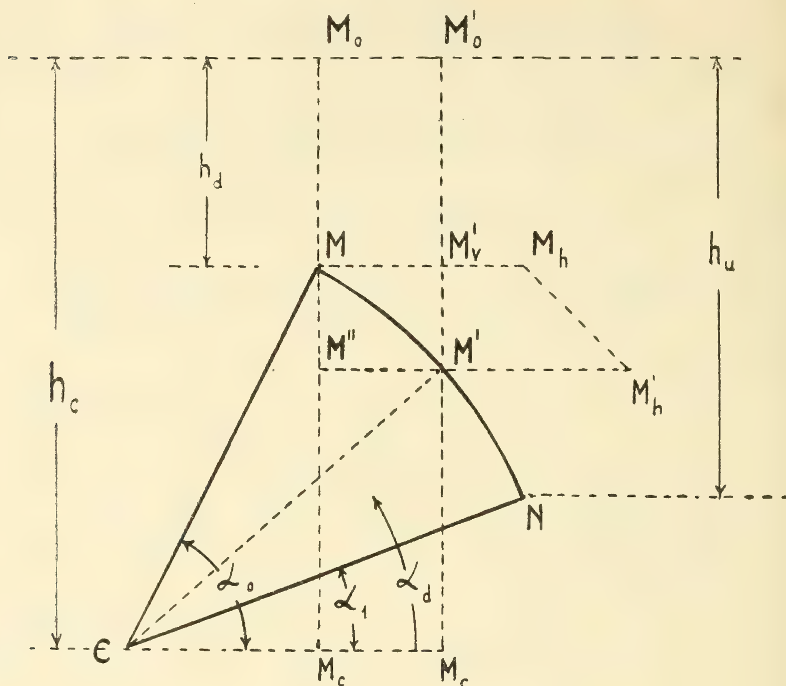


Fig. 3.

$$P_v = \gamma \, b \, R \, (h_c \, C_5 - R \, C_6)$$

$$P_h = \gamma \, b \, R \, (h_c \, C_7 - R \, C_8)$$

$$P = \sqrt{P_v^2 + P_h^2}$$

Diagrama de empujes en representación cartesiana. — Se toman ejes coordenados sobre la horizontal de *C*. Por los puntos *M*, *M'*, *N'*, *N* (Fig. 5) se trazan horizontales sobre las cuales se miden las abscisas $M' \, M_e'$, $N' \, N_e'$, $N \, N_e$, que representan en escala a los empujes calculados que actúan sobre las alturas de compuerta *M M'*, *M N'*, *M N*; en *M* el empuje es nulo.

(1) Aplicable únicamente cuando se verifica la estructura a la carga de agua retenida, considerando vacío el cuenco de flotación. Este estado ocurre cuando se debe mantener por medios apropiados, levantada la compuerta o en servicio y sea necesario vaciar el cuenco con fines de inspección, limpieza o conservación.

Las ordenadas representan:

En el caso N° 1 (fig. 4) : R sen α;
En el caso N° 2 (fig. 5) : hacia arriba de la horizontal de C: R sen α_d; hacia abajo: R sen α_u;
En el caso N° 3 (fig. 6) : R sen α_d.

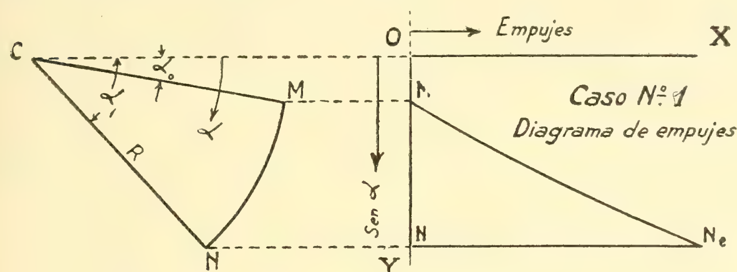


Fig. 4.

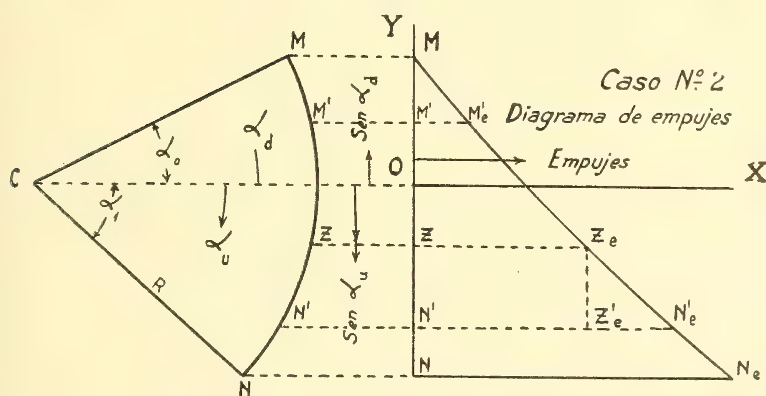


Fig. 5.

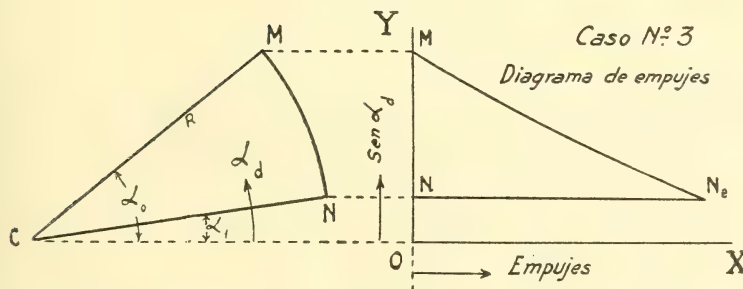


Fig. 6.

La curva que une los puntos M' M_e', N_e', N_e, es el diagrama de empujes. Dicha curva permite obtener gráficamente que el empuje que actúa sobre cualquier altura de compuerta $M\ Z$, es $Z\ Z_e$ (fig. 5).

Por diferencia de abscisas se obtiene que el empuje que actúa sobre una zona $Z\,N'$ está representado por la recta $Z_e'\,N_e'$ (fig. 5); esta magnitud está afectada de un pequeño error.

En efecto, la simple sustracción de magnitudes es correcta cuando se trata de empujes que actúan en la misma dirección; en las compuertas de sector circular, la resultante del empuje que actúa sobre una altura determinada tiene una cierta dirección radial distinta de las que les corresponden a las resultantes de otras alturas o zonas de la compuerta.

Fig. 7

Por tratarse de magnitudes vectoriales o dirigidas, la simple sustracción de los valores de los empujes equivale a rebatir un vector sobre el otro (fig. 7); el resultado que se obtiene es:

$$\overline{CB} - \overline{CD} = c' = a - b$$

Exactamente, la intensidad del vector c, sería:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\theta}$$

El error que determina la representación cartesiana está dado por la diferencia:

$$c - c' = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,a\,b \cos \theta} - (a - b)$$

El diagrama que se propone, pues, da valores en defecto, cuando por diferencias se desean conocer las magnitudes de los empujes que actúan sobre zonas intermedias.

Pero, para las necesidades del cálculo de la estructura de las compuertas de sector, los ángulos que forman entre sí las resultantes a substraerse son menores que 8°, en cuyo caso, $\cos \theta > 0{,}99$, y

$$c - c' = \sim 0$$

Analizado el error: $c - c'$, surge que:

1° Crece con el aumento de las magnitudes del empuje; por lo tanto, en las zonas superiores de la compuerta es menor que en las inferiores. Aumenta con los valores más altos de h_c/R;

2° aumenta con θ; es decir, que es mayor en las compuertas de casos Nos. 1 y 3 donde la componente vertical del empuje tiene un solo sentido y mínimo en las compuertas de caso N° 2.

La recta $N N_e$ (fig. 5) representa el empuje que actúa sobre la compuerta $M N$. Si se desea dividir a la compuerta en zonas de igual o desigual empuje, se divide a la recta $N N_e$ en la proporción deseada, se levantan las ordenadas hasta cortar a la curva de empujes; desde cada una de estas intersecciones se trazan horizontales que cortan a la compuerta en las zonas de empujes deseadas. Si por los puntos medios de los distintos segmentos en que se dividió a la recta $N N_e$ se repite la construcción, se obtienen las respectivas posiciones de los puntos de aplicación de los empujes parciales que determinan los lugares de ubicación de las vigas de resistencia. En el eje de las Y las distintas horizontales determinan magnitudes OM', $O N'$ que representan a: R sen α, R sen α_d, R sen α_u, según los casos.

Por medio de esta representación se puede prescindir del diseño de la compuerta de sector y reducir el diagrama a los ejes coordenados. Sobre las abscisas se miden los empujes calculados y sobre las ordenadas los valores naturales de los senos de los ángulos que han servido para el cálculo, sean α, α_d o α_u; el valor R del radio es

constante para los diversos puntos M, M', N', por lo que en la representación gráfica asume un valor escalar.

Las fajas de igual o desigual empuje y las posiciones de las vigas determinan en el eje de las Y los correspondientes valores naturales del seno, que permiten individualizar los respectivos ángulos al centro y por medio de ellos calcular las longitudes de los arcos de posición de la estructura resistente, cuyas dimensiones son las que se necesitan en la construcción de las compuertas de sector circular.

Ahora bien, por el error ya señalado, ¿en qué medida se desplazan las posiciones de las zonas de empuje y vigas de resistencia?

Se supone que la curva de rayas (fig. 7) sea el diagrama de la representación cartesiana que da valores en defecto y que la curva de trazo continuo sea la del diagrama de empujes idealmente exacto; para ángulos al centro menores de 10°, como se presentan en general en el cálculo de estas compuertas, ambas curvas pueden considerarse sensiblemente paralelas y desplazadas en el sentido de las abscisas en el error. $c - c' = m$. La vertical que pasa por la división deseada del empuje corta a la curva de puntos y forma con la tangente en ese punto un ángulo μ; la vertical n comprendida entre ambas curvas da el valor del desplazamiento del seno del ángulo de posición (1).

Tratándose de pequeñas diferencias es aceptable la siguiente expresión aproximada: $n = (c - c') \operatorname{ctg} \mu$

Como en la representación cartesiana debe operarse con escala de senos que permitan mucha aproximación, por ejemplo: 0,1 $\equiv$ 2 cm., en tanto que la escala de empujes debe tomarse necesariamente alta para obtener diagramas manuables, sin dejar de ser suficientemente exactos; resulta que $c - c'$ es muy pequeño y por lo tanto n mide muy poca variación o desplazamiento del seno del ángulo de posición. O bien, si resultan diagramas alargados del empuje, lo que frecuentemente ocurre cuando $h_c/R > 1$, en cuyo caso la longitud ideal $c - c'$ puede resultar apreciable, en cambio la tangente a la curva determina un ángulo μ cercano a 90°, resultando igualmente valores n muy pequeños de desplazamiento en el sentido de los senos.

Si se supone que se obtiene un desplazamiento en la posición del seno de 20', la longitud del arco de desplazamiento que le corresponde en compuertas de 3.— m de radio es de 1,7 cm; de 5.— m de radio, 2,9 cm; de 10.— m de radio, 5,8 cm.

(1) No hay duda que la vertical de la división también está desplazada, compensando parcialmente el error.

Los desplazamientos son locales y no se suman; en la parte superior de la compuerta el error es pequeño y recién en la parte inferior de aquellas de Caso N° 1 pueden obtenerse errores como el señalado, por todo lo cual, los desplazamientos de la posición de las zonas de empuje y de las vigas de resistencia determinados por medio del diagrama cartesiano del empuje son tolerables para las necesidades constructivas y el error puede computarse del mismo orden que el que origina el dibujo de la solución gráfica.

Determinación del empuje específico ε. — Las expresiones del empuje ya analizadas pueden escribirse en la siguiente forma:

Caso N° 1:

$$\frac{P}{\gamma\, b\, R^2} = \sqrt{\left(C_1 \pm \frac{h_c}{R}\, C_2\right)^2 + \left(C_3 \pm \frac{h_c}{R}\, C_4\right)^2} = \varepsilon$$

Caso N° 2:

1ª parte: $\alpha_0{}^\circ - \alpha_d{}^\circ$

$$\frac{P}{\gamma\, b\, R^2} = \sqrt{\left(\frac{h_c}{R}\, C_5 - C_6\right)^2 + \left(\frac{h_c}{R}\, C_7 - C_8\right)^2} = \varepsilon$$

2ª parte $\alpha_0{}^\circ + \alpha_u{}^\circ$:

$$\frac{P}{\gamma\, b\, R^2} = \sqrt{\left(\frac{h_c}{R}\, C_9 + C_{10}\right)^2 + \left(\frac{h_c}{R}\, C_{11} + C_{12}\right)^2} = \varepsilon$$

Caso N° 3:

$$\frac{P}{\gamma\, b\, R^2} = \sqrt{\left(\frac{h_c}{R}\, C_5 - C_6\right)^2 + \left(\frac{h_c}{R}\, C_7 - C_8\right)^2} = \varepsilon$$

El valor ε obtenido es no dimensionado y se lo denomina empuje específico.

Su magnitud varía:

a) Con el ángulo al centro de la compuerta de sector circular; es decir con la mayor o menor altura o zona de compuerta que se considera;

b) con la relación h_c/R

Todas las compuertas de sector circular de igual relación h_c/R y caso, por lo tanto, tienen la misma curva de empujes específicos.

Diagrama de empujes específicos. — Se toma como eje $X - X$ de un sistema ortogonal, a la horizontal que pasa por los centros de rotación de las compuertas de sector circular de relaciones h_c/R fijadas. Sobre las ordenadas se miden los senos de los ángulos de cálculo de los empujes específicos $\varepsilon : \alpha$, para el caso N° 1, y α_d, α_u, para los casos Nos. 2 y 3, con sentido hacia abajo o arriba, según corresponda; sobre las abscisas se miden los valores ε calculados para cada relación h_c/R y ángulo al centro. Se obtienen así los puntos que determinan los diagramas de los empujes específicos de cada valor h_c/R, en dos familias de curvas: una para el caso N° 1 y otra para los casos Nos. 2 y 3.

Como ya se ha explicado cuando se trató el diagrama de empujes en representación cartesiana, los valores del empuje específico ε son exactos si se toman con respecto al origen de la curva, pero acusan pequeños errores en defecto si se desean conocer los correspondientes a zonas intermedias.

Ese error se reduce hasta valores prácticamente exactos, si se construyen los diagramas calculando los valores ε para cada ángulo al centro por medio de las sumas sucesivas de los valores $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, que corresponden a pequeños ángulos al centro parciales; si el ángulo al centro de la zona intermedia de compuerta cuyo empuje específico se desea calcular es menor que éstos, el pequeño error será por defecto; si el mismo ángulo es mayor el error será por exceso y su valor relativo crecerá con el ángulo al centro y con el mayor valor de la relación h_c/R.

Se ha considerado que el diagrama de empujes específicos es útil y aplicable a la resolución rápida y general de las compuertas de sector circular, para cuyo objeto se ha dibujado el diagrama que se acompaña y que comprende dos familias de curvas que sirven respectivamente al caso N° 1 y a los casos Nos. 2 y 3. Cada familia de curvas comprende diversos valores de la relación h_c/R y una amplitud de ángulos al centro que exceden las necesidades límites de la aplicación profesional; si fuere menester utilizar curvas de valores h_c/R intermedios, pueden interpolarse con resultados igualmente satisfactorios.

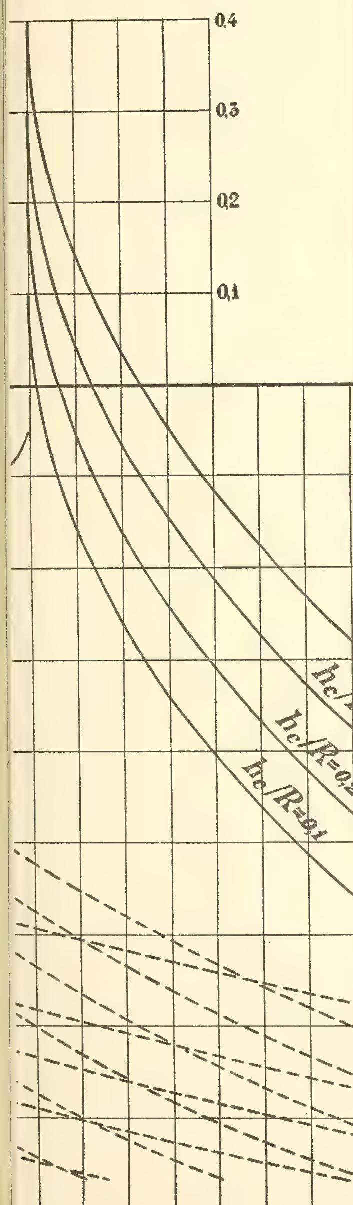
Cuando $h_c/R \leq 1$, los empujes específicos ε correspondientes se calcularon por sumas sucesivas de ángulos al centro parciales de 10°;

'eferencias

0,6

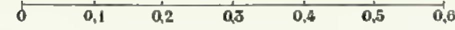
1,2

0,4



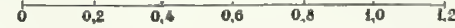
Referencias

Escala de $sen\,\alpha_0$ *y* $sen\,\alpha_1$

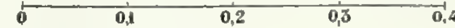


Escalas del empuje específico ε :

grupos a y b :



grupos c y d :



$$P = \varepsilon\,\gamma\,b\,R^2$$

- - - - - - *Caso Nº 1*

——— *Caso Nº 2*

——— *Caso Nº 3*

Fig. 8.

si $h_c/R > 1$ los ángulos al centro parciales se tomaron de 15°. Estos diagramas pueden dar errores relativos en exceso para grandes ángulos al centro, del siguiente orden: compuertas de ángulo al centro 30° y los más altos valores de h_c/R puede variar entre 0 y menos del 2 %; compuertas de ángulo al centro de 45° y los más altos valores de h_c/R pueden variar entre 0 y menos del 3 %.

Las curvas de las relaciones $h_c/R \leq 0{,}4$ se han dibujado con los valores ε del empuje específico a mayor escala.

Procedimiento de aplicación. — Para obtener el diagrama de empujes específicos de una compuerta de sector circular de relación h_c/R conocida, se trazan en escala a partir del eje $X - X$ y en el sentido o sentidos que correspondan, las horizontales de sen α_0 y sen α_1. El diagrama buscado es la parte de curva de valor h_c/R y caso de la compuerta en estudio, comprendida entre ambas horizontales, y referida a la vertical de la intersección de la curva con la recta de sen α_0.

Los empujes que actúan sobre distintas alturas o zonas de la compuerta, están dados por:

$$P = \varepsilon \gamma b R^2$$

mientras los correspondientes senos determinan los valores y las posiciones de los respectivos ángulos al centro.

Los diagramas de empujes específicos sirven también para fijar en la compuerta, la posición de la división en zonas de empuje y de las vigas de resistencia, en la misma forma, con el mismo procedimiento y con la misma exactitud señalada en el parágrafo: « Diagrama de empujes en representación cartesiana ».

PRIMER CONGRESO SUD-AMERICANO DE INGENIERÍA

En la primera quincena del mes de septiembre de 1938 se reunirá en Santiago de Chile el primer Congreso Sud Americano de Ingeniería, con el objeto de divulgar, por medio de la consideración de cuestiones de orden técnico, económico y administrativo, la experiencia adquirida por los ingenieros de los países sudamericanos, a fin de que pueda ser aprovechada en beneficio del progreso general del continente; tratará también de provocar un efectivo acercamiento intelectual y social de los ingenieros, que les permita obtener, de un modo uniforme el amparo legal a la profesión del ingeniero y la justa apreciación de los servicios que ellos prestan a la colectividad, y que los habilite para influir más intensamente en el mantenimiento de las buenas relaciones de cordial amistad y cooperación recíproca entre los pueblos sudamericanos; y finalmente, de procurar dar a conocer el acervo de posibilidades aprovechables en el desarrollo económico de los diversos países del continente y relacionadas con la profesión del Ingeniero.

El Congreso encargado de llevar a la práctica el interesante programa que se esboza en tales declaraciones, estará compuesto por miembros oficiales y adherentes. Serán oficiales los representantes designados por los gobiernos de las Repúblicas Sud Americanas; y los delegados de las Asociaciones de Ingenieros adscriptas a la U. S. A. I. (Unión Sud Americana de Ingenieros). Los adherentes serán las Asociaciones de derecho público o particulares de las mismas Repúblicas que lo soliciten, y los ingenieros que deseen formar parte del Congreso. La cuota de admisión es de $ 250 moneda chilena para las Asociaciones o Corporaciones, y de $ 100 para los Ingenieros.

Los trabajos que podrán presentarse al Congreso serán de dos clases: Comunicaciones y temas.

Las *Comunicaciones* comprenderán los relatos o informes de los resultados técnicos obtenidos en el estudio, construcción y conserva-

ción de obras de ingeniería; los resultados obtenidos en la aplicación de diversos métodos o sistemas de provisión de recursos económicos, organizaciones administrativas, memorias históricas, estadísticas, etc. Para estos trabajos no se exigirán conclusiones.

Los *temas* versarán sobre cualquier materia relacionada con la profesión del ingeniero, si por la naturaleza de la investigación o estudio conduce a resultados que puedan traducirse en conclusiones, las cuales serán sometidas a la aprobación del Congreso.

Se admitirán como idiomas oficiales el castellano y el portugués; los trabajos deberán presentarse a máquina o impresos, no excediendo de 10.000 palabras y acompañados de una síntesis de 1.200 palabras como máximo, en el idioma original y en traducción al castellano si aquél fuera el portuqués.

La comisión organizadora está compuesta por los siguientes señores:

Francisco Mardones, presidente; *José Valdés Fernández,* secretario general; *Carlos Valenzuela Cruchaga,* secretario general; *Ricardo Bascuñan, Héctor Marchant, Desiderio García, Juan Lagarrigue, Gustavo Lira M., Gabriel Quiroz, Teodoro Schmidt Q., Miguel Letelier, Jorge Lira O., Walter Muller, Eduardo Reyes C.* y *Ricardo Simpson,* vocales.

La comisión organizadora recomienda especialmente para ser tratadas en las Comunicaciones y en los Temas a presentarse al Congreso, las cuestiones que se indican a continuación.

Sección I.

VIAS DE COMUNICACION

I. — Medidas que tiendan a establecer mayor solidaridad y cohesión entre los países sudamericanos mediante el mejoramiento de sus vías de comunicación.

II. — Acción del Estado para producir la utilización más ventajosa de las diversas vías de transporte.

Sub-Sección I-a: Ferrocarriles.

I. — Mejoramientos introducidos en la vía y equipo de tracción y de transporte.

II. — Vías férreas de acceso a las poblaciones. Aspectos económicos y urbarísticos del problema.

(Se recomienda que cada país presente una monografía suscinta de sus Ferrocarriles en explotación).

Sub-Sección I-b: Caminos.

(No se recomienda especialmente ningún tema, por celebrarse en la misma época el 3er. Congreso Panamericano de Carreteras; pero se solicita que cada país presente una monografía sucinta de su red de caminos).

Sub-Sección I-c: Navegación Marítima.

I. — Construcción de Puertos en Playas de Arena.

II. — Medios que podrían recomendarse a los Gobiernos para fomentar la navegación sudamericana.

(Se recomienda que cada país presente una monografía sucinta de sus puertos principales en explotación y en proyecto).

Sub-Sección I-d: Navegación Fluvial y Lacustre.

I. — Regularización del régimen de los ríos.

II. — Estado actual de la navegación fluvial y lacustre en Sud-América y medios de fomentarla.

Sub-Sección I-e: Navegación Aérea.

I. — Tránsito aéreo. Aeródromos y rutas.

II. — Radiocomunicaciones y meteorología al servicio de la aviación.

Sub-Sección I-f: Vías Telegráficas, Telefónicas y de Radio.

Estado actual de estas vías de comunicación y medios para desarrollarlas entre los países sudamericanos.

Sección II

REGADIO Y FUERZAS HIDRAULICAS

I. — Embalses de agua para regadío o fuerza motriz.

II. — Métodos de distribución de las aguas acumuladas en los embalses que aseguren su mejor aprovechamiento.

III. — Acción del Estado en la ejecución de obras de regadío de interés regional.

IV. — Geología del agua subterránea.

(Se recomienda que cada país presente una monografía sucinta de los embalses de aguas en explotación y en proyecto).

Sección III

ELECTRICIDAD

I. — Posibilidades de exportación e importación de energía eléctrica entre los países sudamericanos. Centrales generadoras, líneas de transmisión, distribución, elección de frecuencias y voltajes normales sudamericanos.

II. — Comités nacionales sudamericanos de la Conferencia mundial de la Energía. Posibilidad de concertar una acción común sudamericana.

SECCIÓN IV

INGENIERIA SANITARIA

SUB-SECCIÓN IV-A: AGUA POTABLE.

I. — Desinfección de las aguas potables. Métodos y materiales empleados. Procedimientos de examen bacteriológico.

II. — Aprovechamiento de la energía disponible en las canalizaciones de conducción de agua potable.

III. — Abastecimiento de agua potable en pequeñas poblaciones (menos de 2.000 hab.).

IV. — Materiales empleados en las canalizaciones de agua potable. Vida económica de las cañerías de agua potable calentada en relacióna con la dureza de las aguas.

SUB-SECCIÓN IV-B: DESAGÜES Y AGUAS SERVIDAS.

I. — Eliminación de aguas servidas en pequeñas poblaciones y en grupos aislados de habitaciones.

II. — Tratamiento y reutilización de las aguas servidas.

SUB-SECCIÓN IV-C: ELIMINACIÓN DE DESPERDICIOS.

Eliminación de desperdicios:

a) basuras;

b) residuos industriales.

SECCIÓN V

INGENIERIA INDUSTRIAL

I. — El concepto de industria nacional y la protección del Estado. Facilidades para el intercambio sudamericano.

II. — Medios para estimular el desarrollo de las pequeñas industrias en los pueblos sudamericanos.

III. — La standardización aplicada a la producción inidustrial.

IV. — Explotación racional del bosque virgen.

SECCIÓN VI

M I N E R I A

SUB-SECCIÓN VI-A: MINERALES METÁLICOS.

Geología de los depósitos metalíferos en los países sudamericanos.

SUB-SECCIÓN VI-B: COMBUSTIBLES.

I. — Yacimientos sudamericanos de combustibles y posibilidades de abastecimiento propio del continente.

II. — Clasificación de los combustibles y de sus métodos de ensayo. Conveniencia de usar normbas uniformes en Sudamérica.

SUB-SECCIÓN VI-C: SALITRE Y OTROS.

Geología de los yacimientos minerales no metálicos.

SECCIÓN VII

TEMAS DIVERSOS

SUB-SECCIÓN VII-A: ENSEÑANZA DE LA INGENIERÍA.

I. — Estado actual de la enseñanza de la Ingeniería en los países sudamericanos.

II. — Preparación del ingeniero para su más eficiente intervención en las industrias, comercio, finanzas, administración pública y cultura nacional.

(Se recomienda que cada país presente una monografía sucinta de sus planes, programas y métodos de enseñanza).

SUB-SECCIÓN VII-B: INGENIERÍA MUNICIPAL.

I. — Instalaciones interiores en la edificación moderna. Normas de proyecto y control de ejecución y conservación. Abastecimiento de agua, suministro de energía, instalaciones de movilización, aereación, calefacción, etc.).

II. — Servicios de utilidad pública de orden municipal no incluídos en otros temas (Tranvías y Ferrocarriles suburbanos, Transporte colectivo, Alumbrado, Mercados, Mataderos, etc.).

SUB-SECCIÓN VII-C: INGENIERÍA RURAL.

I. — Encauzamiento de los cursos de agua como un medio de recuperar terrenos riberanos. Aspectos técnicos, económicos y legales del problema.

II. — Aguas de riego. Legislación, administración y distribución de las aguas que corren por cauces naturales y artificiales.

SUB-SECCIÓN VII-D: ORIENTACIÓN PROFESIONAL.

SUB-SECCIÓN VII-E: VARIOS.

a) Ejercicio de la profesión. Reglamentación existente o en estudio. Códigos de ética profesional. Aranceles profesionales.

b) Revalidación de títulos.

c) Organización legal y administrativa del servicio de Obras Públicas.

d) Racionalización de los presupuestos para Obras Públicas.

e) Participación financiera de los particulares en la ejecución de Obras Públicas.

BREVE ENSAYO SOBRE DON PEDRO DE CIEZA DE LEÓN Y LOS CARACTERES DE LA CONQUISTA INCAICA

POR ALBERTO M. SALAS

ADVERTENCIA

Nos proponemos en esta breve monografía estudiar críticamente el valor testimonial de don Pedro de Cieza de León, realizando el análisis interno y externo de su « Crónica del Perú », en el cual comprendemos: los datos biográficos indispensables, la situación del autor en el tiempo y en el espacio, el método y las fuentes empleadas en la elaboración, el contenido y las características fundamentales de la Crónica; finalmente, en una segunda parte, a la vez que tratando de concretar nuestros puntos de vista y nuestros conceptos vertidos sobre Cieza, estudiaremos un aspecto de la cultura incaica, la conquista, considerada, no como la historia de la expansión cuzqueña, sino en lo que ella tiene de genérico y particular.

En esta segunda parte de la monografía nos apartaremos a menudo de Cieza, deteniendo en cambio, insistentemente la crítica y el comentario en el testimonio de otros cronistas.

CAPITULO I

BIOGRAFÍA INDISPENSABLE DE DON PEDRO DE CIEZA DE LEÓN [1]

Mucho es lo ignorado y lo incierto en la biografía de don Pedro de Cieza de León. Su figura, al igual que la de muchos, y como sin duda ocurre en nuestros días, pasó inadvertida y vulgar en su época, como la de uno de tantos soldados indianos que tornaba sin el oro y sin la gloria de un gran conquistador; su obra, una crónica

(1) Nada justifica una nueva biografía de don Pedro de Cieza de León. Los documentos y detalles que sobre ella disponemos, son, con algunas adiciones insignificantes (*a*) los mismos que empleó Marcos Jiménez de la Espada en la muy excelente que logró de este cronista del Perú. (*b*) Así, pues, ante la imposibilidad de allegar nuevos datos acerca de una figura tan brumosa como es la de Cieza, y sin otra perspectiva que la de glosar lo ya escrito, nos concreta-

más para aquel reducido mundo de lectores que únicamente reparaba en lo novelesco del género, sólo una vez vió las prensas, y leyóse sin despertar los entusiasmos y fervores que levantaron años más tarde los « Comentarios » de Garcilaso. Los tiempos son pródigos de estas injusticias, si acaso podemos aquí, hablar de injusticias. Los méritos y los valores de la vida y de la obra de Cieza, aunque reales, no fueron brillantes y capaces por sí solos de atraerse la atención de la época y de su siglo. La fama de que goza, a fuer de desconocido él, una fama casi anónima, nace de curiosidades y afanes sentidos por generaciones muy posteriores a la suya, de los estudios y pacientes investigaciones de la etnografía, de los reajustes de la crítica historiográfica. Interesaba al contemporáneo de Cieza, hallar en toda aquella literatura de crónicas, cartas y relaciones, antes que otra cosa, el relato galano, el estilo brillante, o la narración de hazañas tropicales y fantaseadas. Además de que la Crónica de Cieza fué conocida en sus tiempos en una mínima parte, carece lo que de ella se publicara, de todo aquello capaz de encumbrar y dar fama a un autor en el siglo XVI.

Sabido es, por otra parte, que una vida honesta y ejemplar en el humilde, pasa silenciosa, mientras que impone respeto y veneración vivida en los primeros planos. No acusemos, pues, a la época por haber dejado pasar calladamente una vida que para nosotros adquiere singulares relieves, digamos que fué el destino, el mismo que guardó inédita su Crónica por espacio de dos siglos, el que hizo que no le meciera más alta cuna.

Por todo ello la biografía de « don Pedro, el de Cieza », está llena de incógnitas y de dudas que no podemos resolver sino con la ima-

---

remos a dar un breve resumen de su vida, de aquellos hechos que adquieren mayor importancia para nuestros propósitos, dejando de lado los que no les conciernen directamente, no porque ellos carezcan de interés, sino porque de todos se podrá informar cabalmente el lector acudiendo a la biografía antes mencionada, y porque adoptando el criterio contrario, nos parece cometer deshonestidad.

(*a*) Aludimos particularmente a la autorización que don Pedro de Cieza de León otorgó a tres vecinos de Lerena para que en su nombre contrayesen matrimonio con Ysabel López « e no con otra persona », publicado en: « Revista del Archivo Nacional del Perú », 133 y 134, t. VIII, entrega II, 1935.

(*b*) Marcos Jiménez de la Espada, Prólogo a « La guerra de Quito », Madrid, 1877.

ginación. Sabemos poco de él, pero poco y bueno, mejor dicho, poco y honesto.

Es casi seguro que nació, no sabemos de qué padres, en Llerena, ciudad de la Extremadura, tierra pródiga de conquistadores y de grandes soldados, allá por los años de 1519 ó 1520, como él nos dice de manera borrosa en su Crónica (1). Nada sabemos de la niñez transcurrida en sus tierras, sí que la paz de ella duró poco, ya que el mancebillo, cumplidos apenas los quince años, acaso trece, atrevióse a emprender la ruta de América, la todavía incierta tierra, sobre la cual se bordaban tantas leyendas de oro, de pueblos ocultos y de vida maravillosa, de reyes blancos y de blancas amazonas, pero de quien los que regresaban, truncos los sueños, hablaban ya en los mesones, de flechas enherboladas, de selvas impenetrables, de fiebres y fatigas que traen la muerte sobre el morral lleno de oro.

No creemos, sin embargo, que este hecho, en su época, tenga el sentido de algo excepcionalmente heroico; lo que admira y sorprende es que de aquel niño, luego soldado, resultara un cronista de sus méritos, un autor tan altamente inspirado como él, que siente imperiosa y sinceramente la necesidad de perpetuar todo aquello que ven sus ojos, los acontecimientos que vive intensamente, sin encargues de poderosos, sin segundas intenciones, sin que sus claros y bien determinados propósitos sufran desmedros y bastardías en su realización material.

Veinte años de su vida gastó en estas tierras de América, y desde que en ella afirmó sus plantas, vivió el de Cieza, el constante ajetreo del soldado, expedicionando y batallando sin cesar, contra la naturaleza y contra los hombres, de pecho inerme o abroquelado; viendo la escarcela henchida de fortuna, o agotada por el destino fatal e inexorable que le persigue. Sus días en América transcurrieron en expediciones que duraron años, incesantes, ya con Pedro de Heredia, con el licenciado Vadillo, o con Jorge Robledo, a través de las selvas de Cartagena y de Antiochia, sufriendo las peores calamidades, cometiendo hazañas increíbles, y turbados siempre por las pasiones que devoraban a aquellos hombres, más hombres en la lucha. Muy escasos momentos de reposo y de quietud serena hallaremos en su biografía, y las incertidumbres y la pobreza, sus eternos atributos, deben haberle seguido hasta su misma tierra natal, adon-

(1) Pedro de Cieza de León, «La Crónica del Perú», Proemio, XXVII y 340, Madrid, 1932.

de regresó allá por el año de 1550, vacías las manos del éxito que advierten los humanos, ya que su nombre no figura en probanzas ni en prebendas, y su muerte llegó tan callada que no sabemos en qué fecha acaeció, tal vez en 1560. Don Pedro de Cieza de León, murió a los cuarenta años, recien comenzaba a vivir.

Muchos soldados, cierto es, escribieron crónicas y relaciones, acuciados por la importancia, ya advertida en sus días, de la conquista, por lo extraordinario y novedoso de las culturas que avasallaban, o por intereses humanos, pero, muy pocos de ellos, ya que lo hicieron desde la quietud provinciana del retiro, pudieron haber escrito en sus obras, expresión como ésta que se lee en la Crónica de Cieza, que rezuma fiera voluntad y sincera modestia: « Temeridad parece intentar un hombre de tan pocas letras lo que otros de muchas no osaron, mayormente estando tan ocupado en las cosas de la guerra; pues muchas veces cuando los otros soldados descansaban; cansaba yo escribiendo. Mas ni esto, ni las asperezas de tierras, montañas y ríos ya dichos, intolerables hambres y necesidades, nunca bastaron para estorbar mis dos oficios de escrebir y seguir a bandera y capitán sin hacer falta ». [1] Y ella es indiscutiblemente cierta; la lectura de la Crónica, particualrmente de la primera parte, nos dice que fueron muchas las páginas así escritas, en las más duras y adversas circunstancias, asentando a la lumbre de las hogueras las impresiones y los recuerdos de la jornada de marcha, tal vez meditando los hechos mientras transcurre, lento, el turno de vela. A más de uno se le entorpeciera la pluma, se le quebrara la voluntad en situaciones semejantes, en medio de la soledad tremenda de un campamento dormido, rodeado del peligro que se sabe acechante, escuchando el murmullo agazapado en cada árbol, o el alarido estrepitoso de la selva, mas no a Cieza. Sobróle acero a su voluntad para lograrnos la Crónica más verdadera que poseemos del Perú.

El bagaje intelectual con que Cieza arribó a América, atendiendo a la temprana edad en que realizó el viaje, y a su condición, muy posiblemente humilde, sería necesariamente escaso. Jamás curaremos de la prevención que nos inspiran quienes acostumbran a juzgar a un autor por lo copioso de sus citas, puesto que suele ocurrir que se menten obras que sólo se conocen en parte, o lo que es menos, por referencias. Cieza, en el transcurso de su Crónica, alude con

(1) CIEZA, *ibíd.*, Dedicatoria, XXV.

mucha discreción a nombres como el de Tucídides, Cicerón, Virgilio, Ovidio, Ptolomeo, Diodoro Sículo, San Agustín, y San Isidro de Sevilla, citando con frecuencia, pasajes de la historia romana, de todo lo cual podríamos deducir una cultura de raigambre clásica. Desde luego, no creemos que los autores mencionados por Cieza sean fácil comidilla de campamento, ni de los rudos soldados en cuya compañía transcurrió la mayor parte de su vida. Si los ha leído, debe haber realizado su lectura en los momentos de tranquilidad que gozó en Arma, donde administraba una pequeña encomienda otorgada a sus merecimientos, y aun nos inclinaríamos a pensar que lo hizo en España, ya de regreso, y que estas citas han sido injertadas en el texto, a guisa de notas eruditas, tan al gusto de la época. De todos modos, apartándonos de ese concepto de cultura un tanto falso, no hemos de juzgar la que posee Cieza por estos autores que se complace en citar. Luego de leer su crónica, creemos más en sus dotes naturales, en su experiencia, en la circunspección de sus juicios, que en la cultura que pudieron proporcionarle dichas obras.

Llega al Perú, lo dice muy claramente y sin ambigüedades en varias partes de su Crónica, en el año de 1847, conducido por don Sebastián de Belalcázar a defender el partido del Rey en la Guerra Civil que ya no tardaría en definirse.

Interesan principalmente las circunstancias y la fecha en que Cieza ingresa al Perú. Su posición en el tiempo y ante los hombres, como hemos de ver es inmejorable. Estos dos elementos, indispensables a la crítica histórica, merecerán de nosotros el análisis màs detallado.

Cuidaremos en primer término de su posición ante los hombres, que en los cronistas de hispano-américa, y muy especialmente del Perú, se convierte en un problema crítico de primer orden. Pero antes determinemos esta misma circunstancia en los otros cronistas, a los cuales dedicamos el siguiente acápite.

Siguiendo en sus lineamientos generales la sencilla clasificación de Felipe Means, (1) diremos brevemente que los cronistas del Perú se pueden agrupar en dos escuelas fundamentales. Una, a la cual preferimos llamar « jurídica » antes que « toledana », reconoce como campeón máximo a Sarmiento de Gamboa y como numen inspirador al Virrey Toledo, y la otra, que llamada « idealista » o « idealiza-

(1) MEANS PHILIPH, A., « *Ancient civilizations of the Andes* », VI, 205, New York, 1931.

dora », agrupa en torno de Garcilaso, otrora autor de infalible testimonio, a la mayor parte de los cronistas indígenas y mestizos.

Para caracterizar a esta última, bástenos recordar la posición fácilmente comprometida de sus adeptos, y muy especialmente de su paladín, que se hace evidente e innegable cuando el citado cronista se ocupa de la religión incaica, y que llega al colmo al tratar de identificar la concepción monoteísta cristiana con el concepto similar que han logrado los *amautas,* y aun rebelándose ante la poca reverencia del español a los dioses peruanos. ([1])

Este es un ejemplo traído al azar, porque muchos son los dislates e involuntarias contradicciones que comete Garcilaso, llevado por su afán de justificar y mejorar ante los ojos de los españoles, los dogmas y costumbres de sus medio hermanos de sangre. Garcilaso cuando escribe sus Comentarios, en 1609, ya casi un anciano, ha asimilado por completo la cultura europea y es con categorías culturales de europeo con que rememora la civilización incaica que pudo contemplar durante sus niñez y adolescencia y cuya tradición espiritual conoció a través de los relatos de sus parientes indígenas, miembros de la casta destronada. Al advertir el profundo contraste que las separa, impulsado más por la fuerza de la sangre que por un afán consciente y meditado, y, conducido por el concepto erróneo, común hasta épocas muy cercanas a la nuestra, de que una cultura puede ser juzgada en función de otra, como si ellas no fueran valores absolutos, se empeña en suavizar sus contrastes, y en lo posible conciliarlas, faltando para ello, frecuentemente a la verdad.

Muy lejos está de nuestro ánimo el desconocer los méritos de Garcilaso, por la sola circunstancia de su vinculación racial; por el contrario, es y seguirá siendo un cronista imprescindible para múltiples aspectos de la cultura incaica, pero que obliga a una severa discriminación de sus materiales.

La escuela jurídica se resiste a tan breve caracterización, dadas las circunstancias complejas que motivan su aparición y las directivas fundamentales a que obedece.

Nace de la necesidad sentida por la corona castellana de buscar y exhibir los justos títulos de su propiedad sobre las tierras americanas, puestos en duda y aun negados, principalmente por dos clérigos españoles: el padre Las Casas y el padre Vitoria. El primero

([1]) GARCILASO DE LA VEGA, « Historia General del Perú », t. I, XXVIII, 188 y 190, Madrid, 1800.

de éstos negaba al conquistador español el derecho de sentar señorío temporal sobre los indígenas, aduciendo que la donación de Alejandro VI, atendía a la propagación del Evangelio en tierras americanas y sólo a eso.

El padre Vitoria, con cuyas teorías se relaciona más directamente la escuela jurídica, aun cuando se colocaba en una posición casi idéntica a la del dominico, puntualizaba varias circunstancias en las cuales el conquistador estaba autorizado a quitar señorío. « A su juicio, era aceptable que un soberano cristiano hiciera la guerra a los bárbaros cuando éstos fueran antropófagos y practicaran sacrificios humanos; si no quisieran recibir a los predicadores del Evangelio o si después de recibidos los mataban; pero añadía a modo de restricción, al comentar la *Secunda Secundae* de Santo Tomás, que no era lícito despojarlos de su señorío ni de su oro, ni ocupar por fuerza sus tierras « Si éstos las poseen como verdaderos dueños, esto es, si siempre estuvieron bajo su dominación.» (1)

Por otra parte, el teólogo, continuando su alegato, llega a la siguiente conclusión: « Antes de la llegada de los españoles, eran ellos verdaderos señores, pública y privadamente ». (2) que es lo mismo que negar los derechos a la conquista española, así como fué realizada.

Aunque la negación de los títulos regios que hacía el padre Vitoria, no era absoluta, y en lo sustancial no pasara todo aquello de una afirmación severamente razonada, en el Perú los argumentos del clérigo hallaron cabal respuesta, ya que el Virrey Toledo, de manera espontánea u obedeciendo sugestiones del monarca, se dió a la tarea de averiguar directamente de los indígenas, si los Incas y sus *curacas*, eran o no señores naturales de aquellas tierras. De esto resultaron las « Informaciones » que en diversos lugares del Perú levantó Toledo, y que constituyeron la base sólida de la segunda parte de « La Historia Indica », que escribió Sarmiento de Gamboa, que es la que realmente nos interesa.

En la dedicatoria que de su obra hace Sarmiento de Gamboa a Felipe II, hállase expresado con suma claridad que los derechos de España en América se asientan, precisamente, a parte de otros títulos, en las posibilidades consideradas por el padre Vitoria: 1º) que

(1) Levillier, Roberto, « Don Francisco de Toledo », t. I, III, 153, Madrid, 1935.

(2) Levillier, Roberto, *ibíd.*, 157.

no se despojaba a señores naturales; 2º) que los incas eran bárbaros, antropófagos, sacrificadores de vidas humanas, etc.

Sarmiento de Gamboa ha encarado, pues, su tarea, con dos propósitos bien definidos. En qué grado pueden comprometer la sinceridad de su testimonio, lo vemos muy rápidamente.

El primero de ellos, a nuestro juicio, es bien legítimo, y los resultados a que arriba el cronista, sin torturar argumentos, eran cosa tan sabida que hallaremos que ningún cronista lo ignora, antes y después de él, y aun ningún español de los que con Pizarro entraron en Tumbez. Sólo al padre Vitoria que no estaba muy bien informado de las cosas de América, y que desconocía lo que sabían muchos conquistadores de Méjico y del Perú, podía ocurrírsele la ciega afirmación que los que habían sufrido despojo de señorío eran *veri domini.* Cuando Pizarro llega al Perú, la última gran conquista incaica, la de Quito, aun era incierta, y veinte años antes de Sarmiento de Gamboa, Cieza de León, utilizando procedimientos muy semejantes a los que había de emplear el cosmógrafo de Toledo, estampa en su Crónica que los incas no eran naturales del *Cuzco,* y que cuando llegaron a dicho valle, quién sabe de dónde, hallábase ya poblado por otra tribu (Alcabiquiza), a la cual, con el correr de los años dominaron, lo mismo que a todo el Perú.

Cabe la advertencia que cuando Sarmiento afirma que los Incas eran tiranos del Perú, emplea esta palabra con dos sentidos: como usurpadores del poder, y como gobernantes déspotas y crueles. Esta última acepción se vincula estrechamente con el segundo propósito ya enunciado. Con respecto a éste, al empeño de Sarmiento en mostrarnos a un país de « salvajes », de antropófagos, y otras lindezas por el estilo, a nuestro juicio, compromete en mucho la imparcialidad de su obra. Ya hemos de ver al tratar la conquista incaica, que en el Imperio, según Sarmiento de Gamboa, todo se resuelve en sangre y brutalidades, no ya como resultado de una justicia severa, sino como la satisfacción de bajos sentidos. El cronista nos presenta un estado en el cual el crimen y el pillaje son leyes naturals, y muy alejado del orden y disciplina en que le hallaron los conquistadores.

Concretando nuestra opinión, manifestaremos que Sarmiento de Gamboa, en cuanto se refiere al advenimiento de la tribu incaica en el valle del *Cuzco,* a la sucesión de sus reyes, a sus conquistas, y gradual expansión, es, posiblemente, el cronista mejor informado y más

digno de fe; pero su crónica en cuanto se refiere a la exposición de la cultura incaica, a sus métodos de conquista, de gobierno, a las condiciones morales de los individuos, etc., es de la más apasionadas, y acaba por convertirse en una monótono sucesión de crímenes, masacres y revoluciones de palacio. La cultura incaica, pues, no se hallará en Sarmiento ni por asomo, y cuando se refiere a ella, dirá lo malo, lo bueno lo callará o dirá muy brevemente, como a disgusto.

En esta escuela se denigra sistemáticamente a la cultura incaica para dar mayor solidez a los títulos de España, suficientemente probados al demostrarse que los Incas, sólo eran conquistadores del Perú.

Fuerza es que repitamos las palabras finales dedicadas a la crónica de Garcilaso, que esto no priva que la de Sarmiento resulte para el lector atento y libre de dogmatismos, pródiga de noticias y detalles interesantísimos, que sólo él consigna.

Cieza mantiénese independiente de estas dos escuelas que hemos tratado de caracterizar muy brevemente; de la última, por simple razón de orden cronológico, ya que cuando escribió su crónica no se había iniciado la corriente de probanzas jurídicas, y porque no siente el más mínimo interés en denigrar la cultura aborigen, como lo demuestra al denunciar e impugnar por falsas algunas consejas que acerca de la moralidad del indígena circulaban por el Perú (1); de la segunda porque no tenía compromiso alguno de sangre, y porque su opinión, libre por completo de mordazas que la sujetaran, reflejando la realidad, ya buena, ya mala, dista mucho del tono monocorde del relato de Garcilaso. Nos apresuramos a manifestar que en la Crónica de Cieza, hay un matiz, que percibido o no, nadie lo ha puesto de manifiesto, nos referimos a un dejo de simpatía, que a nuestro juicio evidencia el cronista al considerar algunos aspectos de la cultura incaica, nunca disfrazándonos los hechos, pero sí adjetivando con regateos y tratando de explicar algunas cosas, el tributo de niños, por ejemplo, que él no oculta, pero procurando hacernos creer, no diré en la conformidad de los padres, que acaso fuera cierta, sino hasta en lo lógico y natural del proceso. Esto, sobre lo cual tornaremos más adelante, es una cuestión de matices, que nos parece,

(1) CIEZA, «Segunda Parte de La Crónica del Perú, que trata del señorío de los Incas Yupanquis y de sus grandes hechos y gobernación», XXV, 98, Madrid, 1880.

afecta menos a los hechos que a los juicios y comentarios que le merecen.

Tampoco podrían interpretarse como reaccionarias e inspiradas por su simpatía hacia el indio, las imputaciones que hace Cieza al conquistador, merecida o inmerecidamente, eso ya lo veremos al tratar la leyenda negra en la Crónica, sino como la protesta airada de quien presencia hechos que si en verdad son difíciles de perdonar, se explican y hasta se justifican por inevitables.

En los siguientes capítulos objetivaremos estas palabras con numerosos ejemplos y la cordura y equilibrio de Cieza ante estas dos escuelas extremas, a las cuales es anterior en el tiempo, ha de surgir inequívoca del más elemental cotejo.

Réstanos para concluir con este breve análisis de la posición externa del autor, puesto que hemos de tratar su ubicación en el tiempo conjuntamente con la Crónica, considerar su posible condición de cronista oficial del pacificador Gasca. Los antecedentes de que disponemos acerca de este aspecto de nuestro cronista, los únicos hasta ahora hallados, son los que proporciona Jiménez de la Espada, y citados por Carbia [1]. Como este último autor nos inclinamos a creer muy problemática su misiôn oficial, puesto que Cieza en toda su Crónica no alude una sola vez a esta condición, que desde luego no era como para ocultarse, muy al contrario, prez y galardón, sin que valgan en este caso, argumento alguno de modestia. Lo que resulta incuestionable es que Gasca, enterado de sus desvelos y conociendo sus resultados, le ha prestado valiosa ayuda, y que Cieza dispuso hasta de los documentos del presidente; así lo confiesa él mismo [2].

(1) CARBIA, RÓMULO, « La Crónica Oficial de las Indias Occidentales », 134 y 135, La Plata, 1934.

(2) CIEZA, « La Crónica... », XCV, 280.

CAPITULO II

La crónica y su realización

La « Crónica del Perú », de don Pedro de Cieza de León, una de las más extensas de cuantas se escribieran sobre las culturas aborígenes, la conquista española, y las guerras civiles, no ha llegado completa hasta nosotros. El mismo autor es quien nos informa de esta pérdida, al darnos en el Proemio, noticia detallada y concreta acerca del tema y extensión de cada una de las cuatro partes y dos comentarios que componían su obra. De ellas han respetado el olvido y los azares, las dos primeras partes, cuyo contenido hemos de tratar más adelante como objeto particular de nuestro estudio, y los siguientes libros de la cuarta parte, dedicada a historiar las luchas civiles: « La Guerra de Salinas »; « La Guerra de Chupas », y « La Guerra de Quito ». Faltan, pues, la parte tercera, en la cual se trataba del descubrimiento y conquista del Perú por los españoles, los libros cuarto y quinto de la cuarta parte, titulados: « La Guerra de Guarina » y « La Guerra de Jaquijaguana », así como también los dos comentarios finales, dedicados, el uno a los sucesos acontecidos en Perú desdde la fundación de la Audiencia hasta la partida del presidente Gasca, y el otro a los hechos de Tierra Firme, a los tumultos de Panamá y a los motines del Cuzco.

Si se considera que el conocimiento de los grandes archivos de España es muy reciente y hasta incompleto, y que indudablemente, muy rico es el acervo documental en poder de particulares, poco menos que ignorado, no parecerá excesivamente optimista nuestra esperanza en que los manuscritos de Cieza perduran, quién sabe dónde y hasta cuándo, esperando al erudito y al editor. Más se afianzará esta opinión si consideramos los caprichosos itinerarios que han seguido algunos manuscritos, el de Sarmiento de Gamboa, por ejemplo, que luego de errar durante más de 300 años por archivos y bibliotecas, fué descubierto por Enrique Pietschmann, quien lo editó en Alemania, en 1906 [1]. Así mismo, no hace mucho tiem-

[1] Ernesto Morales, «Sarmiento de Gamboa: Un navegante español del siglo XVI», IX, 117-118, Barcelona, 1932.

po, Paul Rivet, ha editado « El Primer Nuevo Corónica y Buen Gobierno » de Guaman Poma de Ayala, que escrita en el Perú, más o menos en el año 1600 fué descubierta, también por Pietschmann, en la Biblioteca Real de Copenhague, en 1908.

El conocimiento y publicación de los libros de Cieza, hasta ahora hallados, es reciente. Sólo la primera parte se publicó en vida del autor, y lo que tal vez fuera mezquino consuelo de sus afanes y trabajos, apareció allá por el año de 1553, en Sevilla. No les cupo igual suerte a los libros restantes, ni al mundo que se ocupaba de las cosas de Indias, por muchos años bajo la influencia de los comentarios de Garcilaso, la de leerlos. No sólo no se publicaron, sino que manuscritos fueron escasamente conocidos, y utilizados principalmente por Herrera y Prescott. El primero de éstos revela haber conocido toda la Crónica de Cieza, cuando menos aquellos libros que poseemos, atestiguándolo así las extensas transcripciones y refundiciones que de ellos hace, y su declaración expresa. En torno al empleo que de los tales libros ha hecho Herrera, exprésase Jiménez de la Espada, perdida evidentemente la serenidad, acusando al cronista mayor, de haber plagiado y sepultado en sus « Décadas », el manuscrito entero. (1) No ha mucho tiempo, el Dr. Rómulo Carbia, objetivando rigurosamente sus juicios, ha demostrado lo injusto y apasionado de esta acusación. (2)

Por lo que atañe al segundo de los nombrados, es notorio que conoció y valoró cabalmente la segunda parte de la Crónica, que, debido a un error deslizado en la copia que utilizó, atribuye a Juan de Sarmiento, presidente del Consejo de Indias, ya que no a Cieza, su verdadero e indiscutible autor. La más somera lectura de la « Historia de la Conquista del Perú », y desde luego, la de aquellos capítulos que conciernen a las culturas aborígenes, es suficiente para informar al lector, que fué empleada con frecuencia, y su testimonio no pocas veces antepuesto al de otras crónicas, preferencia que el mismo Prescott declara. (3).

(1) Jiménez de la Espada, Prólogo a « La Guerra de Quito », IX.

(2) Carbia, Rómulo, *ibíd.*, 172-177.

(3) Prescott, « Historia de la Conquista del Perú », Libro I, 176, Madrid, 1847. Al igual que a Jiménez de la Espada, nos resulta inexplicable el hecho de que Prescott, habiendo leído ambas partes de la Crónica, no las atribuyera a un mismo autor, ya que son múltiples las referencias, con determinación de tema y número de capítulo, que en una y otra parte se hacen del libro anterior o posterior, que evidencian que las dos obras se deben a una misma pluma. En

Debemos a don Marcos Jiménez de la Espada, bibliófilo diligente, la edición primera y única de la segunda parte de la Crónica, realizada en 1880, así como la primera de la « Guerra de Quito », que vió la luz dos años antes, publicadas ambas en la Biblioteca Hispano,Ultramarina. Los restantes libros aparecieron casi contemporáneamente a los ya mencionados; la « Guerra de Salinas », en el tomo LXVIII de la Colección de Documentos Inéditos para la Historia de España; y la « Guerra de Chupas » en tomo LXXVI de la misma colección.

Concluída esta breve noticia preliminar, analicemos con la extensión que nos está permitida, los dos primeros libros de la Crónica, ya que sôlo nos interesa el cronista de la civilizaciôn incaica y no el de las guerras civiles.

Entre ambos libros existen singulares diferencias, no tanto de tema como de método expositivo, de investigación, y hasta de colorido y animación del estilo. Las circunstancias las explican.

En el primero de ellos se describen minuciosamente los lugares, los habitantes y las cosas que hay desde la provincia de Cartagena hasta la villa de Plata (Potosí), en las postrimerías de la provincia del Collao. Este libro, a nuestro juicio el más pintoresco de la Crónica, en el cual escribió Cieza cuantas rarezas y peculiaridades advirtieron sus ojos, cuantas consejas y mitos escuchó en el transcurso de sus continuas expediciones, es una miscelánea de costumbres y de leyendas, desordenada a veces, pero que resulta siempre la sabrosa y útil narración del viajero. Fiel a lo enunciado en el Proemio, contiene también las fundaciones de las ciudades españolas, de las iglesias, de los conventos; la introducción de las órdenes religiosas; y hasta es catálogo de los accidentes litorales, de los vientos, lluvias, de las dificultades y épocas propicias para la navegación peruana; índice de plantas, de remedios, de alimentos, de tinturas, de animales y sabandijas, y la mención detallada de los caminos del virreinato, sin

---

cuanto a lo que afirma Jiménez de la Espada, en el Prólogo a su edición del « Señorío de los Incas », que lo más sorprendente es que Prescott llegara acerca de ambos autores a juicios muy diversos, diremos por nuestra parte, que no hemos podido comprobar tal diversidad de opiniones, y que la que le merece Don Pedro de Cieza de León (PRESCOTT, *ibíd.*, t. II, Libro IV, 285 a 287), aparte de estar muy de acuerdo con los valores de su obra, no contiene juicio alguno que contradiga a los vertidos sobre Don Juan De Sarmiento, el Presidente del Consejo de Indias.

olvidar siquiera las leguas y los *tambos* que hay entre el Cuzco y Lima, ni la calidad de los caballos que se generan en aquellas tierras, ni de las vides que doran los soles peruanos.

Pero es evidente que los pueblos indígenas, los muchos que halló en sus expediciones, ya al Guaca con el licenciado Vadillo, ya con Jorge Robledo a la fundación de Antiochía o con Belalcazar al Perú, llamaron poderosamente su atención y determinaron en esta parte de la Crónica ,el valor más fundamental.

La preocupación de Cieza por recoger todas estas noticias, en advertir todos estos detalles, que demuestra que no es tan sólo un viajero que se contenta con ver y anotar, sino que inquiere e investiga en la profundidad y extensión que le permiten las circunstancias, la refleja al decir: « Y deste pueblo de Urabá hasta la villa de Plata, que son los fines del Perú, anduve yo, y me apartaba por todas partes a ver las provincias que más podía, para poder entender y notar lo que en ellas había ». (1).

No está ausente de este libro, cosa fácil de comprobarse con la lectura de unas pocas de sus páginas, eso que Ricardo Rojas llama documento humano, « cosas vistas y sentidas, un espejo de vida verdadera », cualidades que según él, sólo existen entre las crónicas primitivas, en la « Descripción Colonial », de fray Reginaldo de Lizàrraga (2), cometiendo evidente injusticia con el nuestro y otros cronistas, y no menos grande con respecto a algunas probanzas que conocemos. (3).

Uno de los mayores méritos de este libro, es el que reconoce el inca Garcilaso, al comentar: « ..escribiólas (las costumbres) con división de tiempos y edades. Dice lo que cada nación tenía antes que los incas la sujetaran y lo que tuvieron después que ellos imperaron ». (4)

Esta feliz circunstancia que con tanta claridad exalta Garcilaso, es la que ha reservado para nosotros, los usos y costumbres propias

(1) Pedro de Cieza de León, « La Crónica del Perú », IX, 27.

(2) Ricardo Rojas, Prólogo a « Descripción Colonial », 32 a 35, Bs. Aires, 1928.

(3) Basta para convencerse de esto, la lectura de unas páginas de: Roberto Levillier, « Gobernación del Tucumán, Probanzas de méritos y servicios de los conquistadores », Madrid, 1919. En esas probanzas palpita la vida, vida verdadera, llena de heroísmo y de pasiones.

(4) Garcilaso de la Vega, *ibíd.*, t. I, XXXVI, 251-252.

de los pueblos peruanos antes de ser dominados por los incas, y por ello amalgamados política y culturalmente, delimitación que es un nuevo argumento en favor de lo dicho acerca de la investigación que ejerce Cieza, aun cuando es soldado y viajero, la cual podemos hacer extensiva a toda la obra, menos a los XXXVI primeros capítulos, donde se describen pueblos sobre los cuales los incas no llegaron a sentar dominio definitivo.

La segunda parte, que como hemos dicho, llámasela también, « Del Señorío de los Incas...», deja de ser ya la narración de un viajero, y el autor ocupado en referir los resultados de pacientes investigaciones, más que observaciones, incidentes y curiosidades, desaparece casi por completo de las páginas de la obra. En cierto modo, esta segunda parte, es la ampliación y bonificación de todo lo dicho en la anterior con respecto a la civilización incaica. A ella especialmente, es decir, a la descripción de su patrimonio, se dedican los treinta y dos capítulos iniciales, cabiendo la advertencia que el manuscrito ha sufrido la mutilación de los tres primeros; en el resto de este libro, la mayor parte de él, trata de la historia incaica. Esta disposición sistemática del material, de por sí un verdadero mérito, se halla, dentro del repertorio de crónicas primitivas, por primera vez en Cieza, siendo imitado en este sentido, años más tarde, por el padre Bernabé Cobo, cronista y eximio compilador de crónicas, sin que esto último vaya en desmedro de sus valores.

Aunque muchos, sinó todos los materiales que sobre costumbres incaicas pudo allegar Cieza, figuran tanto en la primera como en la segunda parte, en esta última emplea el autor una expresión sobria y objetiva, que en mucho la diferencia de la anterior. Es pues en un sentido bastante restringido con que se pueden separar legítimamente ambas porciones de la Crónica, atendiendo sólo al plan expositivo y a la viveza de la acción, ya que no al contenido, puesto que si no son idénticas se complementan de manera mutua.

Pese a todo, la segunda parte, por su inmejorable ordenación sistemática, es la que más de cerca seguiremos en nuestra exposición y comentario de la conquista incaica. Bueno es por lo tanto examinar cada uno de sus aspectos.

SU OBJETO Y SUS FUENTES

Es evidente que la admiración y no otra cosa, fué la que impulsó a Cieza a circunstanciar y ampliar en obra particular cuanto había contemplado como manifestación de la cultura incaica, desde que entró en contacto con ella en Quito y llegó al Cuzco, su centro mismo de expansión.

La admiración despertada por la civilización incaica es cosa harta frecuente en el repertorio de los cronistas peruanos como para que entremos a desconfiar de ésta que aparece en Cieza. La experimentaron, y en alto grado, los primeros conquistadores que penetraron en el Perú, que admiraron en Tumbez el orden y la disciplina del pueblo, los numerosos y bien provistas depósitos, la obediencia sumisa de los vasallos, la autoridad sin mengua de los *curacas*. Léasela en las primeras relaciones que sobre el Perú escribieron los compañeros y secretarios de Pizarro, Francisco de Xerez y don Miguel de Estete aun cuando por ciertas razones, traten inútilmente de disfrazar el sentimiento. Y si la experimentamos nosotros ante la pieza de museo o la reconstrucción del arqueólogo, cuánto más aquel soldado que llegaba al Perú después de haber vivido y batallado durante largos años con las tribus salvajes de Cartagena, con los antropófagos y cazadores de cabezas de Urabá y de Antiochía. Y así dice que las escribe «...porque son todas cosas grandes y dignas de memoria, y para que las repúblicas que se rigen por grandes letrados y varones desto tomen aviso y unos y otros conciban admiración...» (1)

El cuadro cultural que nos presenta Cieza, desgraciadamente es incompleto. Algunos aspectos sociales y económicos de fundamental importancia, han sido olvidados de manera inexplicable. Es en verdad desconsolador, no hallar en una crónica tan bien inspirada como la de Cieza, una noticia concreta sobre la familia, el matrimonio, o sobre lo que no es menos importante, el parcelamiento del suelo y la organización de la propiedad. Esta omisión de elementos capitales se debería según nuestro criterio, a determinadas circunstancias. La primera de ellas la constituiría la evidente atracción que sobre el cronista ejerce la figura del Rey Inca, personaje dominante en su

(1) CIEZA, «Segunda Parte de La Crónica del Perú, que trata del Señorío...», IX, 29.

relato, y al cual se complace en desdibujarle ante nuestros ojos en medio de su aparato y magnificencia reales. Es por ello que si algo nos dice en verdad del matrimonio, es tratando el de él, si algo de la propiedad, lo hace refiriéndose a la suya, a la de sus hijos o a la de los orejones, no a la del pueblo. Dijérase que la imagen del Inca, agigantada por atributos casi divinos, ha quitado perspectiva al cronista, le ha impedido la visión perfecta del pueblo cuya organización era bien distinta de la que regía a la clase dominante. La misma calidad de los informantes de Cieza, orejones en su mayoría, ha debido determinar en buena parte esta orientación de la obra. La otra explicación creemos hallarla allí donde dice: «...y esto haré con gran brevedad, sin querer ocuparme en contar cosas menudas, de que siempre huyo...» (1), expresión que itera en diversas partes de la Crónica.

Son sus ideas de cristiano del siglo XVI, las mismas que le impulsan a creer que el diablo metido en el cuerpo de los indígenas muertos, habla y dice «niñerías y embustes», las que explican de manera intergiversable y clara, sus reservas ante las fiestas y cultos religiosos de los paganos. Las citas con que podemos objetivar estas palabras son muchas; extraemos de ellas la más ilustrativa.

Dice Cieza, refiriéndose a las fiestas, que no las describe todas porque son muchas «..y también hacen poco al caso y antes conviene que no se trate de contar los desvaríos y hechicerías que en ellas se hacían, por algunas causas...» (2). No podemos dejar de anotar la actitud similar que asume Betanzos ante las ceremonias indígenas (3), llenos ambos autores de un temor ingenuo y piadoso, muy de su época.

No son estos los únicos olvidos en que voluntaria o involuntariamente ha incurrido Cieza, puesto que tiene otros, aunque menos importantes, cuyo detalle no intentamos por no señalar dentro de la obra concepto ni derectiva alguna.

Hemos prometido en el primer capítulo ocuparnos de la posición del autor en el tiempo, conjuntamente con las fuentes de la crónica. De ello trataremos ahora.

(1) Cieza, *ibíd.*, IX, 30.

(2) Cieza, *ibíd.*, XXX, 118.

(3) Juan de Betanzos, «Suma y Narración de los Incas», II, 8, Madrid, 1880. Este autor dice: «Otras muchas cosa hobiera aquí más escripto deste Viracocha, segund que estos indios me han informado de él, sino, por evitar proligidades y grandes idolatrías y bestialidades, no las puse...»

Llega al Perú, como hemos dicho anteriormente, en el año de 1548, acaudillado por don Sebastián Belalcazar, que a instancias del Virrey Gasca, concurre con 200 hombres a la lucha civil, cuando, consumada apenas la conquista, no había sido organizada aún, por estar los ánimos ofuscados y las voluntades entorpecidas por los odios de la facción.

Todavía alentaba en el Perú el alma del Imperio Incaico. Su Historia era un pasado reciente, y su tradición, fuente fecunda e inagotable, vivía íntegra en la mente de cada nativo. La imagen del Rey Inca, grabada por el respeto y el temor que inspiran las cosas sagradas, perduraba en los ojos del vasallo, que esperaba verla aparecer cada día, poderoso y terrible con la asistencia de su Divino Padre, para arrojar al castellano de las tierras del Sol. En los lugares alejados y escondidos del celoso catequista cristiano, celebraba el indígena sus fiestas y sus ceremonias y adoraba el ídolo salvado de la llama de las extirpaciones o el puñado de cenizas que no fueron aventadas. Los dedos ágiles de los *quipos-camayos,* seguían anudando cuentas y retorciendo números en los quipos de cada valle y de cada Señor, pues aún había señoríos.

Este es el Perú que conoció Cieza para verdad de su Crónica y fortuna de quienes la leen; el Perú incaico palpitando bajo el tenue barniz español, manifestándose en las costumbres y en las instituciones cuya existencia superó en mucho tiempo a la del Inca, lo único que había desaparecido totalmente. (1)

En la ciudad imperial del Cuzco, vivían descendientes de *Huayna Capac* y muchos miembros descollantes de aquella nobleza diezmada por sus luchas civiles. Vivían también muchos de los antiguos conquistadores que conocieron al regio prisionero de Pizarro, que supieron de la dôcil obediencia de sus vasallos; muchos, en fin, que escucharon el relato de « los tres » (tres, según Cieza) que vieron al Cuzco en su pristina vida, que contemplaron intacto al enjoyado *Curicancha.*

El inca Garcilaso, comentando la primera parte de la Crónica, la única de que dispuso, reconoce esta inmejorable posición de Cieza en el tiempo, diciendo: « Alcanzó como él dice, muchos curacas, que co-

(1) Se afirma esto considerando en su verdadero alcance la precaria autoridad de los Incas refugiados en *Vilcabamba.* El Inca, como Rey, como Dios, como amo absoluto del Perú, había desaparecido con *Atahuallpa,* o con *Huayna Capac,* su padre.

nocieron a Huyna Capac el último de los reyes, de los cuales hubo muchas relaciones de las que escribió, y las de entonces, que ha cincuenta y tantos años, eran diferentes de las de estos tiempos, porque eran más frescas y más allegadas a aquella edad». [1]

Veamos ahora, aunque de manera asaz breve, las fuentes que utilizó Cieza.

Refiriéndose a esto expresa: «...y como no tengo otra relación ni escriptura que la que ellos dan (los Indios)...» [2], de lo cual deducimos que no dispuso Cieza de ninguna crónica o escrito que lo guiara en sus afanes. Sin embargo, cuando se refiere a los *mitimaes,* critica un juicio erróneo contenido « en la Historia que llaman de Indias », que no es otra que la que escribiera López de Gómara. «Por lo demás, esta censura de Cieza —anota Jiménez de la España— prueba que retocaba y ampliaba esta segunda parte de su Crónica después del año 1552, en que salió la primera edición de la Historia de Gómara » [3]. Esto que aparentemente es una contradicción, aunque torne a aludir a Gómara en otro pasaje, no es tal, en primer término, porque cuando pudo leer la Crónica del autor citado, él ya había concluído la suya, en 1550 [4], aunque la retocaba y ampliaba, y por ello mal podía servirle como fuente informativa, y en segundo término, porque los méritos de una obra como la del apologista de Cortés, debieron parecerle mezquinos a un autor bien informado cual era Cieza, e incapaz de servirse de ella. Prueba de esto es que la alude sólo para contrariar su testimonio.

La fuente que utilizó principalmente nuestro cronista, fué el mismo indígena. No se crea por ello que Cieza acepta y tiene por verdaderas las narraciones de cualquier natural. «Yo siempre sigo la mayor opinión, y la que dan los más viejos y avisados dellos, y que son Señores, porque los indios comunes, en todo lo que saben no se ha de tener porque ellos lo afirman por verdad » [5]. Son pues, sus informantes los *curacas,* los orejones, y algún sobreviviente de la dinastía real, a quienes, llevado por su afán de verdad, interroga y escucha en el Cuzco, «.. donde hice juntar —cuenta— a *Cayu Tupac,* que es el que hay vivo de los descendientes de Huaina Capac...

(1) Garcilaso, *ibíd.,* t. I, 260.
(2) Cieza, *ibíd.,* VI, 13.
(3) Cieza, *ibíd.,* XXII, 83.
(4) Cieza, *ibíd.,* LXXIII, 279.
(5) Cieza, *ibíd.,* LXXI, 270.

y a otros de los orejones, que son los que entre ellos se tienen por más nobles, y con los mejores intérpretes y lenguas que se hallaron les pregunté...» (1). De sus relatos debió extraer noticias valiosísimas para su obra, principalmente para la historia de la dinastía incaica, siendo el primer cronista español que disponía de semejantes elementos, y el primero que los obtenía de esa manera, que pocos años más tarde habían de imitar el Virrey Toledo y Sarmiento de Gamboa en sus Informaciones.

Puede suponerse que Cieza recogió y guardó en sus cartapacios cuanta noticia le proporcionaron sus nobles informantes, puede creerse también, que en los relatos, proviniendo casi de una misma fuente, no habría contradicciones; pero no ocurrió así. Pese a que la historia incaica era un ayer cercano en el momento de investigarla Cieza, fueron varios los problemas de crítica, y muchas las dudas que tuvo que resolver. Estas dificultades están claramente expresadas por el cronista que dice al respecto: «Como estos indios no tienen letras ni cuentan sus cosas sino por la memoria que dellas queda de edad en edad y de sus cantares y quipos, digo esto, porque en muchas cosas varían, diciendo unos uno y otros otro, y no bastara juicio humano a escrebir lo escripto sino tomara destos dichos lo que ellos miscos decían ser más ciertos, para lo contar» (2).

Los instrumentos de crítica que podía esgrimir para develar estas incógnitas y resolver las dudas, eran bastante escasos, fundamentalmente, el buen sentido y la intuición. A veces soluciona las perplejidades inclinando su opinión, luego de puntualizar las distintas versiones, hacia aquella que se le ocurre la más lógica y verosímil, no siempre las más ciertas en historia. (3)

(1) Cieza, *ibíd.*, VI, 13-14.

(2) Cieza, *ibíd.*, LII, 196.

(3) He aquí algunas expresiones de Cieza que objetivarán todo lo dicho acerca de las fuentes empleadas y que darán idea de las dificultades casi insalvables con que chocó.

« Y con esta servidumbre (tributo) quedaron en gracia del Inca, de quien dicen no hacerles enojo, antes mandarles proveer de mantenimientos y otras cosas, y enviallos a sus tierras, otros dicen que los mató a todos sin que ninguno escapase. Lo primero creo, aunque de lo uno y de lo otro no sé más de decirlo estos indios » (Cieza, *ibíd.*, XLVIII, 182).

« Y aun algunos indios quisieron decir que el un Inca había de ser de uno destos linajes — Anancuzco y Orencuzco — y otro del otro; mas no le tengo

La Crónica de Cieza ha sido algo más dificultoso que una simple recopilación de noticias.

Como una consecuencia de este espíritu crítico, siempre alerta y atento a la discriminación de la verdad, cabe considerar en Cieza, una variada gama de matices afirmativos. Por lo pronto adelantaremos que no todo lo que estampa en la Crónica, goza del mismo crédito, y a veces, cuando transcribe alguna leyenda, la de *Pacarec Tampu*, verbigracia, aunque el autor trata de hacerlo con la mayor fidelidad, no priva, que cuando ha concluído el relato de ella, escriba expresando la poca fe que le merece el mito: « Reídome he de lo que tengo escripto destos indios: yo cuento en mi escriptura lo que ellos a mí contaron por la suya, y antes quito muchas cosas que añido una tan sola ». (1)

Prescott, que en muy breves líneas supo resumir un juicio cabal de Cieza, dice que se mostró tan cumplido historiador, en esto de la manera de afirmar los hechos relatados como el mismo padre de la historia (2) Las afirmaciones rotundas, cuando Cieza trata de la historia incaica, son muy raras, lo cual evidencia que en ese aspecto de la Crónica, no siente hacia quienes le informan, la misma profunda fe que inspiran las cosas vistas. Pruébalo el constante « dicen », « cuentan », propio de quien conoce el valor de las opiniones y que no quieren comprometer la suya.

Si esto no bastara recordaríamos aquella frase en que el cronista refiriéndose a algunas de las narraciones que recoge: «. . . porque yo no sé en esto más de lo que ellos mismos cuentan ». (3), que es suficiente para evidenciar todas las dudas y aprensiones que experimentó nuestro autor. Cieza cree en la veracidad de sus informaciones, pero es indiscutible que no siente por todos sus dichos, la misma convicción que hacia aquellos pocos que ha podido comprobar su investigación y su crítica, circunstancia única que le autoriza para las afirmaciones categóricas.

---

por cierto, ni que es más de lo que los orejones cuentan, que es lo que ya está escripto » (CIEZA, *ibíd.*, XXXIII, 128).

«. . . y cuentan otra cosa, la cual si es cierta o nó sábelo el altísimo Dios que entiende todas las cosas, porque lo que yo voy contando no tengo otro testimonio ni libros que los dichos de estos indios; . . .» (CIEZA, *ibíd.*, IV, 3).

(1) CIEZA, *ibíd.*, VIII, 27.

(2) PRESCOTT, *ibíd.*, 179.

(3) CIEZA, *ibíd.*, LIX, 222.

Objeción a las fuentes de Cieza

Hemos visto al considerar muy brevemente la figura del inca Garcilaso, que es el jefe de una escuela a la cual hemos llamado idealista, y bajo cuya bandera se agrupan, si no todos, la mayor parte de los cronistas aborígenes y mestizos. Conocida es también, por los párrafos anteriores que la base sólida en que se afirma la Crónica de Cieza, es el testimonio de los mismos indígenas. Es por ello que hemos pensado, que se podrían objetar muy seriamente estas fuentes utilizadas por el cronista, puesto que si interés hubo en Garcilaso y los suyos en disimular muchas cosas y atenuar otras, bien pudo haber existido en los informantes de Cieza. Y esto sería verdadero, olvidando la crítica que pudo haber ejercido el cronista, si no mediaran dos circunstancias: un cierto lapso, y lo que es más decisivo, un estado cultural muy distinto.

Los que informan a Cieza, no sienten como Garcilaso, la necesidad de disculpar las « barbaridades » de su raza ante la cultura europea. Para ellos nada más natural que sus costumbres y sus principios morales, nada tan ridículo como los españoles que se dejan crecer las barbas y que ofrendan pan y vino a su Dios. Así como para un señor feudal del siglo XV, es cosa legítima y natural disponer a su albedrío de la vida y de la honra de sus vasallos, no lo es menos para el Inca sacrificar vidas humanas en el ara del Sol, o exigir a los padres, en lugar de oro, el tributo de sus propios hijos.

En aquellos espíritus primitivos aún no se había engendrado, bajo el influjo de la cultura europea y de la moral cristiana, ese curioso dualismo que todavía perdura en nuestra época (1) y del cual Garcilaso, puede ser un representante.

Son los orejones, los curacas, los quipos-camayos, sin ninguna inquietud, sin rubores, sin temer en nada el juicio del español que les escucha, quienes informan cabalmente a Cieza de temas y detalles que con sumo cuidado han soslayado quienes hicieron suyos algunos conceptos morales del conquistador.

Vemos, pues, que las fuentes de Cieza escapan incólumes de esta objeción que hemos forjado nosotros mismos para robustecer los conceptos vertidos sobre ellas.

(1) José Imbelloni, « Epítome de Culturología », IX, 213, Bs. As., 1936.

La leyenda negra en la Crónica de Don Pedro de Cieza de León

En la obra de Cieza de León, y muy particularmente, en el primer libro de su « Crónica del Perú », la leyenda negra, que creemos definitivamente acallada, adquiere un aspecto, que por lo concreto y característico de las expresiones, nos atrevemos a ver en él un caso verdaderamente típico.

Cieza, como tantos otros españoles, procediendo con la mejor buena fe, ha contribuído con su incomprensión de las circunstancias y del común de los hombres, a entenebrecer los anatemas que a sus compatriotas y a la dominación española lanzara el obispo de Chiapa.

Luego de reconocer la obra inaudita acometida y llevada a término por aquel puñado de hombres que conquistaron y poblaron América desde más allá del golfo de Méjico hasta Magallanes (1), escribe en el « Señorío de los Incas » cosas tan afligentes como estas: « Que por cierto no es pequeño dolor contemplar que siendo aquellos Incas gentiles e idólatras, tuviesen tan buena orden para saber gobernar y conservar tierras tan largas, y nosotros, siendo chripstianos, hayamos destruido tantos reinos; porque, por donde quiera que han pasado chripstianos conquistando y descubriendo otra cosa no parece sino que con fuego se va todo gastando », (2) Surge el contraste violento y categórico entre las dos expresiones, ambas ciertas, verdaderas. Pero en una, Cieza es el hombre que con visión amplia, generosa, abarca la gesta heroica en toda su magnitud sublime; en la otra, el de pupila torpe, de mirada cercana,

(1) He aquí la expresión de Cieza, una verdadera síntesis de la obra hispánica, una de las más hermosas y completas que hemos podido leer en los primitivos cronistas, dicha con una sencillez realmente heroica: « Cosa es muy digna de notar que en menos tiempo de sesenta años se haya descubierto una navegación tan larga y una tierra tan grande y llena de tantas gentes, descubriéndola por montañas muy ásperas y fragosas y por desiertos sin camino, y haberlas conquistado y ganado, y en ellas poblado de nuevo más de doscientas ciudades. Cierto los que esto han hecho merecedores son de gran loor y de perpetua fama, mucho mayor que la que mi memoria sabrá imaginar ni mi flaca mano escrebir. Una cosa diré por muy cierta: que en este camino se padeció tanta hambre y cansancio que muchos dejaron cargas de oro y muy ricas esmeraldas por no tener fuerzas para las llevar ». (Cieza de León, « La Crónica del Perú », XLII, 136, Madrid, 1932).

(2) Cieza, *ibíd.*, XXIII, 89.

parcial, que sólo repara en lo malo e inevitablemente de la conquista hispánica, de todas; la reacción de un espíritu piadoso ante hechos que se comprenden, que se perdonan en tales circunstancias, en aquella época, en el transcurrir de toda la historia humana; hechos que al fin obedecen a pasiones y crueldades que el hombre lleva en sí, más o menos ocultas. (1)

Así es como se ha formado la leyenda negra, la que hizo que el mundo culto de Europa, olvidado de Alejandro VI en el reparto, abominara de la España conquistadora de América, con la incomprensión y torpeza de quienes creyeron que dominar a una densa población indígena muy capaz de hacer valer sus derechos ante caballos y arcabuces, era cosa de Cruz y de Evangelio; con la incomprensión de los que juzgaron al conquistador hispano con los mismos principios con que Catón, ciudadano en Roma, clamó contra las violencias del conquistador de las Galias; en fin, que le dió cuerpo la contradicción de quien abogando por la libertad del indígena, pedía la sumisión y el comercio de otra raza, de quien contaba iniquidades de la encomienda después de perder la suya.

No es este sin embargo el aspecto que ha llamado nuestra atención, sino el dualismo que un poco académicamente llamaremos artístico-religioso, hallado en Cieza, y que mucho ilustra acerca de su incomprensión con respecto a estas materias, y en un plano más trascendente, del valor relativo de las censuras que a sí misma se formula esta raza que parece complacerse en menguar o disimular sus glorias.

(1) El mismo Cieza no escapa de lo dicho cuando sorprende a Jiménez de la Espada describiendo con alegría y feroz deleite la muerte de uno de los enemigos de su Rey, cierto es, pero de un hombre al fin, y él cristiano.
Jiménez de la Espada, Prólogo a la « Guerra de Quito », CXXXIII.

(Continuará)

INDICE GENERAL

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN EL TOMO CENTÉSIMO VIGÉSIMO QUINTO

VARIAS

BIBLIOGRAFÍA

SOCIOS ACTIVOS

Aguilar, Félix
Albizzati, Carlos M.
Alvarez, Raúl J.
Alvarez de Toledo, Belisario
Allende Lezama, Luciano P.
Anastasi, Camilo
Anchorena, Juan E.
André, Enrique de
Andrioletti, Juan Luis
Añón Suárez, Vicente
Aparicio, Francisco de
Aráoz Alfaro, Gregorio
Arbecchi, Armando C.
Arce, Manuel J.
Arditi Thompson, H.
Armani, Aquiles
Arnaudo, Silvio J.
Avila Méndez, Delfín
Aztiria, Ignacio
Bado, Atilio A.
Bachmann, Enesto
Baglietto, Eduardo E.
Balbiani, Atilio
Bancalari, Agustín
Barabino Amadeo, S.
Barbieri, Antonio
Bargna, Juan L.
Barilari, Mariano J.
Barral Souto, José
Barrancos, Leónidas A.
Becke, Alejandro von der
Berrino, Juan B.
Bertino, José Carlos
Besio Moreno, Nicolás
Bianchi Lischetti, A.
Biggeri, Carlos
Blaquier, Juan
Boaglio, Santiago
Bolognini, Héctor
Bonanni, Cayetano A.
Bontempi, Luis
Bordenave, Pablo E.
Borruat, Luis
Borzi, Ana María
Bosch, Gonzalo
Bosisio, Anecto J.
Bottaro, Juan C.
Bozzini, Luis (h.)
Briano, Juan A.
Bunge, Juan C.
Buontempo, Guillermo
Butty, Enrique
Buzzo, Alfredo
Buzzo, Eduardo B.
Caillet Bois, Teodoro
Calandra, Raúl E.
Camus, Nicolás
Canale, Humberto
Carabelli, Juan José
Carbia, Rómulo D.
Carbone, Esteban
Carbonell, José J.
Cárcova, Enrique de la
Carelli, Antonio
Carelli, Humberto H.
Caride Massini, Pedro
Carman, Ernesto
Carrea, Juan Ubaldo
Casacuberta, Antonio
Castellanos, Alberto
Castello, Manuel F.
Castiñeiras, Julio R.
Celasco, Juan L.
Cock, Guillermo E.
Coni Bazán, F. A.
Curti, Orlando P.
Curutchet, Luis
Chanourdie, Enrique
Chizzini Melo, Aníbal F.
D'Ascoli, Lucio
Dassen, Claro C.
Dasso, Héctor
Dasso, Ricardo L.
De Cesare, Elías A.
De Fina, Armando L.
De la Ini, Juan E.
Dellepiane, Luis J.
Deulofeu, Venancio
Díaz, Emilio C.
Dieulefait, Carlos E.
Doello-Jurado, Martín
Dobranich, Jorge W.
Domínguez, Juan A.
Dubecq, Raúl E.
Dueñas, José
Duhau, Luis
Dupont, Enrique
Durañona y Vedia, A.
Durrieu, Mauricio
Edelberg, Benjamín
Escudero, Antonio
Escudero, Pedro
Faré, Santo S.
Fernández, Alberto J.
Fernández Díaz, A.
Fernández Long, S.
Figini, Angel
Figuerero, Hernando W.
Fischer, Gustavo Juan
Flores, Emilio M.
Floriani, Luis
Florit, Carlos J.
Forn, Carlos J.
Fossa Mancini, E.
Franceschi, Alfredo
Fürnkorn, Divico A.
Gadda, Carlos Manuel
Galmarini, Alfredo G.
Gando, Alfredo R.
Gandolfi Herrero, Augusto
Gandolfo, José S.
Gascón, Alberto
Gaspar, Fernando L.
Géneau, Carlos E.
Gerardi, Donato
Ghigliazza, Sebastián
Giagnoni, Bartolomé E.
Giannone, José
Gradín, Carlos
Grieben, Arturo
Gutiérrez, Ricardo J.
Haussler, Emilio
Herbin, Luis A.
Hermitte, Enrique
Herrera Vegas, M.
Herzer, Bernardo
Hickethier, Carlos F.
Hofmann, Herbert
Hortal, José Angel
Houssay, Bernardo A.
Hoyo, Arturo
Igartúa, Luis María
Irigoyen, Luis H.
Isetta, José
Ivanissevich, Ludovico
Jorge, José M.
Jakob, Cristofredo
King, Diarmid O.
Kinkelin Pelletán, J. C. de
Knoche, Walter
Kraglievich, Nicolás T.
Krapf, Eduardo
Labarthe, Julio
Lagunas, Simón
La Menza, Francisco
Laporte, Luis B.
Larco, Esteban
Lasso, Alfredo L.
Latzina, Eduardo
Lignières, Roberto
Lizer y Trelles, C. A.
Lombardi, Alberto
Loyarte, Ramón G.
Lugones, Arturo M.
Llauró, José
Mac Donagh, E. J.
Magnin, Félix J.
Magnin, Jorge
Mainini, Carlos
Mallol, Emilio
Mamberto, Benito
Marcó del Pont, E.
Marchionatto, Juan B.
Maresca, Antonio J.
Marini, Tomás L.
Martignone, Eduardo
Marotta, F. Pedro
Marotta, R. Armando
Mata, Leopoldo
Méndez, Julio
Meoli, Gabriel
Meoli, Humberto
Mercau, Agustín
Mermoz, Francisco A.
Molfino, José F.
Molina Carranza, L.
Molle, Clotilde C.
Montes, Vicente E.
Moreno, Evaristo V.
Nágera, Juan José
Natale, Alfredo
Natale, Ernesto
Negrete, Lucía
Negri, Mario L.
Nelson, Ernesto
Nielsen, Juan
Oliveri, Alfredo E.
Ortega Belgrano, Raúl
Ortiz, Aníbal A.
Ortiz de Rosas, Jorge
Otamendi, Gustavo
Ottonello, Héctor
Páez, José María
Page, Franklin Nelson
Paitoví y Oliveras, A.
Paquet, Carlos
Parodi, Edmundo
Parodi, Lorenzo R.
Pasman, Raúl G.
Pasman, Rodolfo E.
Pastore, Franco
Paz Anchorena, José M.
Pérez Hernández, A.
Perrone, Cayetano
Pestalardo, Agustín
Pini, Aldo S.
Platz, Hubert
Podestá, Juan Carlos
Polti, Modesto
Posadas, Carlos
Quinos, José Luis
Quinterno, Bruno F.
Quiroga, Pedro R.
Raimondi, Alejandro
Raffo, Bartolomé M.
Ramaccioni, Danilo
Ramallo, Carlos M.
Ratto, Héctor R.
Rebuelto, Antonio
Rebuelto, Emilio
Reece, William Asher
Repetto, Blas Angel
Repossini, José
Ringuelet, Emilio J.
Rissotto, Atilio A.
Rivarola, Rodolfo
Robles, Angel A.
Rodríguez Aravena, S.
Rodríguez, Germinal
Roffo, Angel H.
Roffo, Juan
Roldán, Raimundo
Romero Brest, Enrique
Rokotnitz, Otto
Rospide, Juan
Rossell Soler, Pedro
Ruata, Luis E.

Ruiz Moreno, Isidoro
Ruiz Moreno, Adrián
Rumi, Tomás J.
Sabaria, Enrique
Sagastume Berra, A. E.
Salomón, Hugo
Sánchez, José Ricardo
Sánchez, Gregorio L.
Sánchez Díaz, Abel
Sánchez Sorondo, M. G.
Sanromán, Iberio
Santángelo, Rodolfo
Sarhy, Juan F.
Sarrabayrouse, Eugenio
Savon, Marcos A.
Schnack, Benno J.
Schmidt, Max

Schulz, Guillermo
Selva, Domingo
Selzer, Samuel
Sesma, Angel
Sheahan, Juan F.
Silva, Leónidas L.
Simonoff, Miguel
Simons, Hellmut
Siri, Luis
Sobral, Arturo
Solari, Emilio F.
Solari, Miguel A.
Soler, Frank L.
Sordelli, Alfredo
Spinetto, David J.
Spota, Víctor J.
Storni, Segundo R.

Suárez, Angel
Taiana, Alberto F.
Taiana, Jorge
Tarragona, José
Tedeschi, Virgilio
Tello, Eugenio
Torre Bertucci, Pedro
Torello, Pablo
Tossini, Luis
Trelles, Rogelio A.
Trucco, Sixto E.
Valeiras, Antonio
Valentini, Argentino
Valentinuzzi, Máximo
Vallebella, Colón B.
Vanossi, Reinaldo
Varela, Rufino

Vecchi, Arístides de
Vela Huergo, Julio
Veyga, Francisco de
Vidal, Eduardo
Villalobos D., C.
Vignaux, Juan C.
Vinardell, Alberto
Volpatti, Eduardo
Wainer, Jacobo
White, Guillermo J.
Wauters, Carlos
Wysztelewski, W. de
Zamboni, Agustín
Zappi, Enrique V.
Zavalla, Carlos M.
Zuloaga, Angel M.

SOCIOS ADHERENTES

Bazzanella, José
Devoto, Carlos Alberto
Ferramola, Raúl
Folcini, Martín L. G.
García, Eduardo D.

Glücksmann, Carlos E.
Goyena, Ricardo J.
Laclau, Juan Pedro
Magne de la Croix, P. A.
Mailhos, Luis E.

Milesi, Emilio Angel
Quevedo Capdevila, Eduardo A.
Recoder, Roberto F.
Repetto, Cayetano

Rusconi, Carlos
Somonte, Eduardo
Wechsler, Wolf

CASAS ADHERENTES

Angel Estrada y Cía.
Benvenuto y Cía.

Lutz, Ferrando y Cía.
Hijos de Atilio Massone

Otto Hess, S. A.
T. Gr. "Tomás Palumbo"

Jacobo Peuser, S. A. Ltda.

SOCIO VITALICIO

Huergo, Eduardo María

MIEMBROS PROTECTORES DE LA ORGANIZACION DIDACTICA DE BUENOS AIRES

Anchorena, Juan E.
Besio Moreno, Nicolás
Tornquist, E. y Cía. (Lda.)

SECCION CORDOBA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Ing. Pedro N. Gordillo; Vice-presidente, Dr. Miguel Fernández; Vice-presidente, Ing. Daniel A. García; Secretarios, Dr. Guillermo V. Stuckert; Prof. Tulio Mácola; Tesoreros, Dr. Juan Olsacher; Dr. Carlos C. Hosseus; Vocales, Ing. Clodoveo Pascualini; Dr. Agustín E. Larrauri; Dra. J. Gambastiani de Peláez; Arq. Salvador Godoy; Ing. Jorge E. Bobone; Dr. Federico Padula; Ing. Luis Chechi; Dr. Edwin Rothlin.

SOCIOS ACTIVOS

Achával, Luis
Aguiar, Henoch D.
Amaya, Arturo A.
Arrambide, Miguel
Bobone, Jorge E.
Bodenbender, G.
Bonet, Rafael
Borzacow, Wladimir
Brandan, Ramón A.
Broglia, Alberto A.

Buteler, Jesús E.
Camilloni, Carlos
Carlomagno, José
Chaudet, Enrique
Checchi, Luis
Deheza, Eduardo
Del Viso, Jacinto
De Tezanos Pinto, J.
Devoto, Heraclio A.
Espinosa, Manual

Esteban, Fernando
Fernández, Miguel
Fitz Simon, Sgo. E.
Fontana, Lorenzo P.
Fuchs, Guillermo J.
García, Daniel
Gavier, Daniel E.
Giménez de Azúa, F.
Godoy, Salvador A.
Gómez, Calixto A.

Gordillo, Pedro N.
Granillo Barros, M.
Hosseus, Carlos Curt
Jagsich, Juan
Kronfus, Juan
Lofayette Zimmer, M.
Larrauri, Agustín C.
Lutzow Holm, Olaf.
Mácola, Berardo A.
Mácola, Tulio

Mirizzi, Pablo Luis
Ninci, Carlos A.
Ninci, Raúl T.
Novillo Corvalán, S.
Olsacher, Juan
Padula, Federico

Pasqualini, Clodoveo
Peláez, J. Gambastiani de
Pilotto, Bernardo
Ponce Laforgue, C.
Roggeri, Domingo

Rothlin, Edwin
Sayago, Gumersindo
Schmiedecke, Augusto
Sigal, Moisés
Sparn, Enrique
Stuckert, Guillermo V.

Taravella, Ambrosio L.
Tarragó, Emeterio
Torres, Valeriano
Trebino, Natalio
Vercello, Carlos
Yadarola, Mauricio L.

SECCION SANTA FE

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Gustavo A. Fester; Vice-presidente, Dr. José Piazza; Secretario de correspondencia, Ing. Quím. Francisco A. Bertuzzi; Secretario de actas, Ing. Quím. José Cruellas; Tesorero, Ing. Quím. Enrique Virasoro; Vocal 1º, Ing. José Babini; Vocal 2º, Prof. Rolando Hereñú; Vocal suplente 1º, Prof. Julio Salaber; Vocal suplente 2º, Ing. Quím. Guillermo Berraz; Encargado de Biblioteca y Canje, Ing. Quím. Rodolfo Rouzaut; Encargado de Publicaciones, Ing. José Babini.

SOCIOS ACTIVOS

Anadón, Leónidas
Ariotti, Juan Carlos
Babini, José
Benet, Pedro José
Berraz, Guillermo
Bertuzzi, Francisco A.
Bonazzola, César J.
Borruat, Luis (hijo)
Borzone, Rodolfo
Bossi, Celestino
Caballero, Martín A.
Camo, José María
Cerana, Miguel
Claus, Guillermo

Courault, Pablo
Crouzeilles, A. L. de
Cruellas, José
Christen, Carlos
Christen, Rodolfo G.
Damianovich, Horacio
Falco, Federico
Fester, Gustavo A.
Frenguelli, Joaquín
Gollán, Josué (h.).
Gschwind, Eduardo P.
Guinle, Hugo José
Hereñú, Rolando
Hotschewer, Curto

Juliá Tolrá, Antonio
Kleer, Gregorio
Mai, Carlos
Mántaras, Fernando
Marelli, Hipólito
Martino, Antonio E.
Montpellier, Luis Marcos
Mounier, Celestino
Muzzio, Enrique
Nigro, Angel
Niklison, Carlos A.
Oliva, José
Peresutti, Luis

Piazza, José
Piñero, Rodolfo
Pozzo, Hiram J.
Ragonese, Arturo E.
Reinares, Sergio
Rouzaut, Rodolfo
Salaber, Julio
Salgado, José
Santini, Bruno L. P.
Schivazappa, Mario
Simonutti, Atilio A.
Tissembaum, Mariano
Urondo, Francisco E.
Virasoro, Enrique

SECCION MENDOZA

COMISION DIRECTIVA

Presidente honorario, Ing. José S. Corti; Presidente, Dr. Juan B. Lara; Vice-presidente, Ing. Agr. José Raúl Ponce; Secretario, Ing. Agr. Julio Tolosa (h); Tesorero, Ing. Cayetano C. Piccione; Bibliotecario, Sr. Adrián Ruiz Leal; Vocales: Dr. Eduardo Carette; Dr. Mario Bidone; Ing. Alfredo Rosenthal; Sr. Manuel Tellechea; Ing. Agr. Rafael E. Pontis.

SOCIOS ACTIVOS

Alurralde, Juan Carlos
Anzorena, Jacinto
Ayala Castagnino, G.
Basso, Germinal
Benegas, Raúl
Bidone, Mario
Borsani, Carlos Pablo
Burgoa, Pedro A.
Carette, Eduardo
Croce, Francisco M.
Espinosa, Norberto A.
Flor Alvarado, José M.

Gabrielli, Francisco J.
Galeano, Edgardo
García, José Federico
Godoy Vergelin, G.
Gomensoro, José N.
Granzella, Sinibaldo
Guiard, Ricardo
Jofré, Alberto L.
Lara, Juan B.
Lucero, Braulio G.
Lugones, Manuel G.
Magistretti, Guillermo

Maneschi, Ernesto
Maroso, José Angel
Maveroff, Aquiles
Mayorga, Santiago C.
Miyara, Salomón
Paganotto, Juan P.
Pelaia, Dante
Piccione, Cayetano C.
Ponce, José Raúl
Pontis, Rafael E.
Rosales, Ranulfo S.
Rosenthal, Alfredo

Ruiz, Aníbal
Ruiz Leal, Adrián
Silvestre, Tomás
Stura, Angel C.
Tellechea, Manuel
Tolosa, Julio (h)
Toso, Juan P.
Villanueva, Miguel Angel

SECCION LA PLATA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Carlos A. Sagastume; Secretario, Ing. Adolfo P. Grissi; Tesorero, Dr. Carlos Teobaldo; Vocales: Dr. Hilario Magliano. Dra. Juana Cortelezzi; Ing. Juan Sabato: Dr. Federico E. Christmann.

SOCIOS ACTIVOS

Alsina Fuertes, Fidel
Angli, Jerónimo
Arroyo Basaldúa, Víctor M.
Bonet, Luis A.
Cortelezzi, Juana
Crespi Gherzi, Rodolfo A.
Christmann, Federico E.

Daló, Héctor R.
Ferrari, Obdulio J. F.
Gascón, Jorge
Gershánik, Simón
Giovambattista, Humberto
Grisi, Adolfo P.
Mc Loughlin, Rogelio P.

Magliano, Hilario
Méndez, José D.
Micheletti, Luis A
Nico, Raúl
Oliva, Virgilio
Paternosto, Pedro G.
Platzceck, Ricardo P.
Sabato, Ernesto R.

Sabato, Juan
Sáez, Francisco A.
Sagastume, Carlos A
Teobaldo, Carlos
Toranzos, Fausto I
Trejo, César A.
Vucetich, Danilo O
Wilkens, Alejandr

SOCIOS CORRESPONDIENTES

Aguilar y Santillán, R.......	México
Amaral, Afranio de.........	San Pablo (Br.)
Avendaño, Leónidas.........	Lima
Alvarez, Antenor............	Sgo. del Estero
Bonarelli, Guido............	Gubbio (It.)
Borel, Emile................	París
Bachmann, Carlos J.........	Lima
Bragg, William Henry......	Londres
Bolívar, Ignacio............	Madrid
Bruch, Carlos...............	Olivos (B. A.)
Cabrera, Blás...............	Madrid
Campos Porto, Pablo........	Río de Janeiro
Carabajal, Melitón M........	Lima
Corti, José S................	Mendoza
Darmois Georges............	París
Dávila, Rubén...............	Santiago (Ch.)
Dabbene, Roberto...........	La Plata
Escomel, Edmundo..........	Arequipa (P.)
Fiebrig, Carlos..............	Munich (Al.)
Fontecilla Larrain, Arturo...	Santiago (Ch.)
Fort, Michel.................	Lima
González del Riego, Felipe..	Lima
Greve, Germán..............	Santiago (Ch.)
Guinier, Philibert...........	Nancy (Fr.)
Hadamard, Jacques.........	París
Hauman, Luciano...........	Bruselas
Hernández, Juvenal.........	Santiago (Ch.)
Hijar y Haro, Luis.........	México
Janet, Pierre................	París
Jiménez de Asúa, Luis......	Madrid
Kinart, Fernando...........	Amberes
Lahille, Fernando...........	Tarn (Fr.)
Langevin, Paul..............	París
Levi Civita, Tulio...........	Roma
Lobo, Bruno.................	Río de Janeiro
Mardones, Francisco........	Santiago (Ch.)
Molina, Enrique.............	Concepc. (Ch.)
Monjarás, Jesús E...........	México
Moretti, Gaetano............	Milán
Oliver Schneider, Carlos....	Santiago (Ch.)
Pereira d'Andrade, Lencastre	Nova Goa (I. P.
Perrin, Tomás G............	México
Porter, Carlos E............	Santiago (Ch.)
Pi y Suñer, Augusto........	Barcelona
Reyes Cox, Eduardo........	Santiago (Ch.)
Rospigliosi y Vigil, Carlos..	Lima
Rowe, Leo S................	New York
Shepperd, William R........	Wáshington
Tello, Julio C...............	Lima
Villarán, Manuel V.........	Lima
Vélez, Daniel M............	México
Valle, Rafael H.............	México
Vitoria, Eduardo............	Barcelona
Volterra, Vito...............	Roma

ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

ADOPTADOS PARA SUS PUBLICACIONES POR LA

ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

DIRECTOR: EMILIO REBUELTO

JULIO 1938 — ENTREGA I. — TOMO CXXVI

SUMARIO

BUENOS AIRES

CALLE SANTA FE 1145

1938

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

ADVERTENCIA. — Los colaboradores de los Anales son personalmente responsables de la tesis sustentada en sus escrito. Tienen derecho a la corrección de do pruebas. Los que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos, deben solicitarla por escrito. Los manuscritos, correspondencia, etc. se enviarán a la sede social, **Santa Fe 1145.**

Impreso en los Talleres Gráficos "TOMAS PALUMBO" - La Madrid 321-325 - Buenos Aires

SOBRE INTEGRALES DE LAPLACE Y DE STIELTJES ASINTÓTICAS

POR J. C. VIGNAUX

INTRODUCCIÓN.— La representación asintótica de una función $f(z)$ real o compleja, mediante una serie de potencias del tipo

$$\sum_{0}^{\infty} a_n \frac{1}{z^n} \qquad [1]$$

se debe a H. Poincaré [1]. En trabajos anteriores hemos propuesto su extensión a las series dobles de potencias [2]

$$\sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} \frac{a_{mn}}{z^m w^n}, \qquad [2]$$

y algunas generalidades de esta representación, sustituyendo las series de potencias [1] y [2] por series de Dirichlet y series de facultad simples y dobles [3].

En la presente memoria proponemos en cambio una representación asintótica de una función $f(z)$ mediante una integral de Laplace

$$\int_{0}^{\infty} e^{-xz} \varphi(x)\, dx \quad (x \geq 0),$$

y de una integral de Stieltjes [4]

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x+z} dx,$$

donde $\varphi(x)$ es una función real $(x \geq 0)$.

(1) H. POINCARÉ, *Acta Math.*, t. 8 (1886).

(2) J. C. VIGNAUX, *Series dobles asintóticas*, Anales Soc. Científ. Argentina, Junio 1938.

(3) J. C. VIGNAUX, *Series asintóticas simple y doble de Dirichlet y de facultad*. (En curso de publicación).

(4) Véase: E. BOREL, *Leçons sur les series divergentes*, París 1928.

Una vez introducida la nueva noción de *integral asintótica*, se prueban cuáles son las operaciones fundamentales que se pueden aplicar a una representación de este tipo.

Luego se extienden todos estos resultados a las funciones de dos variables representables asintóticamente mediante integrales dobles de Laplace.

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-xz-yw} \varphi(x, y)\, dx\, dy .$$

Muchas de estas conclusiones se pueden generalizar a las integrales de Laplace-Stieltjes.

$$\int_0^\infty e^{-xz}\, d\, \psi(x)$$

las cuales fueron estudiadas por Widder y otros, desde el punto de vista de la convergencia.

Queda planteada la cuestión siguiente análoga al problema de E. Borel [1] relativo a las series asintóticas: *dada la función* $\varphi(x)$ *en el intervalo* $x \geq 0$, *existe siempre una función* $f(z)$ *de la variable compleja* z, *tal que tenga como representación asintótica la integral* [1]*?*

En otro lugar se estudia la transformada definida por integrales de Stieltjes simples o dobles:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\varphi(x, y)}{(x+z)(y+w)}\, dx\, dy.$$

(1) E. Borel, *Sur quelques points de la théorie des fonctions*, (Annales d'École Normale, 1895); T. Carleman, *Les fonctions quasi analytiques*, Paris 1926.

I. Integrales asintóticas

2. Dada la función $f(z)$ holomorfa de la variable *compleja* z en el semi-plano $R(z) \geq 0$; diremos que la integral de Laplace

$$\int_0^\infty e^{-xz} \varphi(x)\, dx$$

convergente o divergente, donde $\varphi(x)$ es una función real e integrable en todo intervalo $0 \leq x \leq a$, *representa a la función* $f(z)$ *asintóticamente*, si la expresión

$$\varepsilon_a(z) = e^{az}\left[f(z) - \int_0^a e^{-xz} \varphi(x)\, dx\right], \quad (a > 0) \qquad [1]$$

tiende a *cero* cuando $z \longrightarrow \infty$, para todo *a positivo*.

La [1] se puede escribir en la forma

$$f(z) = \int_0^a e^{-xz} \varphi(x)\, dx + \frac{\varepsilon_a(z)}{e^{az}} \qquad \varepsilon_a(z) \longrightarrow 0, \quad (a > 0)\ ;$$

y esta correspondencia la expresaremos con la notación

$$f(z) \sim \int_0^\infty e^{-xz} \varphi(x)\, dx\ .$$

La representación asintótica de una función $f(z)$, si existe, es única según el

Teorema I. — *Si*

$$f(z) \sim \int_0^\infty e^{-xz} \varphi(x)\, dx \qquad f(z) \sim \int_0^\infty e^{-xz} \psi(x)\, dx$$

y las funciones $\varphi(z)$ *y* $\psi(x)$ *son analíticas en el intervalo* $(0, a)$, $a > 0$; *se tiene:* $\varphi(z) \equiv \psi(z)$, *en dicha intervalo* (1).

(1) Este teorema no subsiste como me ha hecho notar gentilmente el Dr. C. Biggieri, si no se impone a la $\varphi(x)$ otra condición que su integrabilidad.

En efecto; por hipótesis

$$f(z) = \int_0^a e^{-xz} \varphi(x)\, dx + \frac{\varepsilon_a(z)}{e^{az}} \quad , \quad \varepsilon_a(z) \longrightarrow 0$$

$$f(z) = \int_0^a e^{-xz} \psi(x)\, dx + \frac{\delta_a(z)}{e^{az}} \quad , \quad \delta_a(z) \longrightarrow 0$$

cuando $z \longrightarrow \infty$, para todo $a > 0$ y además

$$\varphi(x) = \sum_0^\infty a_n z^n \quad , \quad \psi(z) = \sum_0^\infty b_n z^n .$$

La [1] y [2] se pueden escribir

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z_n \int_0^a e^{-xz} dx + \frac{\varepsilon_a(z)}{e^{az}} = \frac{1 - e^{-az}}{z} \sum_0^\infty a_n z^n + \frac{\varepsilon_a(z)}{e^{az}} \qquad [1']$$

$$f(z) = \frac{1 - e^{az}}{z} \sum_0^\infty b_n z^n + \frac{\delta_a(z)}{e^{az}}, \qquad [2']$$

de donde se deduce

$$0 = (1 - e^{-az}) \sum_0^\infty (a_n - b_n) z^n + \frac{\eta_a(z)}{e^{az}} z, \qquad [3]$$

y haciendo ahora $z \longrightarrow \infty$, resulta

$$0 = a_0 - b_0 \quad \therefore \quad a_0 = b_0 .$$

Sustituyendo en [3] este valor, dividiendo por z y haciendo $z \longrightarrow \infty$, se tiene

$$0 = a_1 - b_1 \quad \therefore \quad a_1 = b_1 ,$$

y continuando este proceso, resulta entonces

$$a_n = b_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) ;$$

por tanto las funciones analíticas son idénticas.

3. Definida la correspondencia entre una función y la integral de Laplace del tipo anterior, probaremos ahora que esta correspondencia se conserva en las operaciones fundamentales.

Suma. — *Si*

$$f(z) \sim \int_0^\infty e^{-xz} a(x)\, dx$$

$$g(z) \sim \int_0^\infty e^{-xz} b(x)\, dx$$

se tiene entonces

$$f(z) \pm g(z) \sim \int_0^\infty e^{-xz} c(x)\, dx$$

donde

$$c(x) = a(x) \pm b(x).$$

Por hipótesis

$$f(z) = \int_0^\alpha e^{-xz} a(x)\, dx + \varepsilon_\alpha(z) . e^{-\alpha z}, \quad \varepsilon_\alpha(z) \longrightarrow 0$$

$$g(z) = \int_0^\alpha e^{-xz} b(x)\, dx + \delta_\alpha(z) . e^{-\alpha z}, \quad \delta_\alpha(z) \longrightarrow 0$$

de aquí resulta

$$f(z) \pm g(z) = \int_0^\alpha e^{-xz} [a(x) \pm b(x)]\, dx + \eta_\alpha(z)\, e^{-xz}$$

y como

$$\eta_\alpha(z) = \varepsilon_\alpha(z) + \delta_\alpha(z) \longrightarrow 0 \quad (z \longrightarrow \infty)$$

el teorema queda demostrado.

PRODUCTO. — *Si*

$$f(z) \sim \int_0^\infty e^{-xz} a(x)\, dx$$

$$g(z) \sim \int_0^\infty e^{-xz} b(x)\, dx$$

se tiene entonces

$$f(z) . g(z) \sim \int_0^\infty e^{-xz} c(x)\, dx$$

donde

$$c(x) = \frac{1}{2} \int_0^x a(t)\, b(x - t)\, dt$$

Por hipótesis

$$f(z) = \int_0^\alpha e^{-xz}\, a(x)\, dx + \frac{\varepsilon_\alpha(z)}{e^{\alpha z}} = F + \frac{\varepsilon}{e^{\alpha z}} \quad , \quad \varepsilon_\alpha(z) \longrightarrow 0$$

$$g(z) = \int_0^\alpha e^{-xz}\, b(x)\, dx + \frac{\delta_\alpha(z)}{e^{\alpha z}} = G + \frac{\delta}{e^{\alpha z}} \qquad \delta_\alpha(z) \longrightarrow 0$$

de donde

$$f(z) \,.\, g(z) = F \,.\, G + F \frac{\delta}{e^{\alpha z}} + G \frac{\varepsilon}{e^{\alpha z}} + \frac{\varepsilon \,.\, \delta}{e^{2\alpha z}} \qquad [1]$$

Además se tiene

$$F \,.\, G = \int_0^\alpha e^{-xz}\, a(x)\, dx \,.\, \int_0^\alpha e^{-yz}\, b(y)\, dy = \iint_D e^{-(x+y)z}\, a(x)\, b(y)\, dx\, dy$$

donde la integral doble está tomada sobre el cuadrado D de lado igual a α, situado en el plano (x, y).

Por otra parte

$$\iint_D e^{-(x+y)z}\, a(x) \,.\, b(y)\, dx\, dy = 2 \iint_T e^{-(x+y)z}\, a(x)\, b(y) \,.\, dx\, dy$$

donde T designa el triángulo $O\,(0, 0)$, $A\,(\alpha, 0)$, $B\,(0, \alpha)$.

Haciendo el cambio de variables definidas por las relaciones

$$x + y = \xi \quad , \quad y = \xi \,.\, \eta$$

es decir

$$x = \xi\,(1 - \eta) \quad , \quad y = \xi \,.\, \eta \qquad [2]$$

al dominio T del plano xy, le corresponde en el plano coordenado ξ, η un cierto rectángulo R; puesto que a la recta $x = 0$ corresponden las dos rectas $\xi = 0$, $\eta = 1$; a la recta $y = 0$ corresponden las dos rectas $\xi = 0$, $\eta = 0$ y al lado $x + y = \alpha$ le corresponde la recta $\xi = x$; los vértices del rectángulo R son, por tanto: $(0, 0)$, $(\alpha, 0)$, $(\alpha, 1)$, $(0, 1)$.

Como el jacobiano de la transformación

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix},$$

vale ξ; se tiene entonces

$$\iint_T e^{-(x+y)z} a(x) \, . \, b(y) \, dx \, dy = \iint_R e^{-\xi z} . \, \xi . \, a[\xi(1-\eta)] \, b(\xi \eta) \, d\xi \, d\eta$$

$$= \int_0^\alpha e^{-\xi z} . \, \xi \, d\xi \int_0^1 a[\xi(1-\eta)] \, b(\xi \eta) \, d\eta \, .$$

Es decir, poniendo $\xi = t$.

$$\iint_T e^{-(x+y)z} . \, a(x) \, b(y) \, dx \, dy = \int_0^\alpha e^{-tz} \, dt \int_0^t a(t-y) \, b(y) \, dy.$$

Por tanto

$$F \, . \, G = \int_0^\alpha e^{-tz} c(t) \, dt$$

donde

$$c(t) = \frac{1}{2} \int_0^t a(t-y) \, b(y) \, dy \, .$$

Según esto, la relación [1] resulta

$$e^{\alpha z} \left[f(z) \, . \, g(z) - \int_0^\alpha e^{-tz} c(t) \, dt \right] = F \, . \, \delta + G \varepsilon + \frac{\varepsilon \, . \, \delta}{e^{\alpha z}}$$

luego

$$\lim_{z \to \infty} e^{\alpha z} \left[f(z) \, . \, g(z) - \int_0^\alpha e^{-tz} c(t) \, dt \right] = 0$$

lo cual prueba el teorema.

DIVISIÓN. — *Si*

$$f(z) \sim \int_0^\infty e^{-zx} a(x)\, dx$$

y

$$g(z) - m \sim \int_0^\infty e^{-zx} b(x)\, dx \qquad m \neq 0$$

resulta entonces

$$\frac{f(z)}{g(z)} \sim \int_0^\infty e^{-zx} \psi(x)\, dx$$

donde la función $\psi(x)$ *esta determinada por la ecuación integral de Volterra de segunda especie* (1).

$$a(x) = m\,\psi(x) + \int_0^x b(x-t)\,\psi(t)\, dt$$

cuyo *núcleo* es la función $b(x-t)$.

En efecto; por hipótesis

$$f(z) = \int_0^x e^{-zx} a(x)\, dx + \varepsilon(z) \,.\, e^{-\alpha z} = F + \varepsilon \,.\, e^{-\alpha z}\ , \ \varepsilon \longrightarrow 0$$

$$g(z) = m + \int_0^\alpha e^{-zx} b(x)\, dx + \delta(z)\, e^{-\alpha z} = (G+m) + \delta\, e^{-\alpha z}\, ,\ \delta \longrightarrow 0$$

luego

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{F}{G+m} + \eta(z) \qquad [2]$$

donde

$$\eta(z) = \frac{\dfrac{\varepsilon}{e^{\alpha z}} - \dfrac{F}{(G+m)}\,\dfrac{\delta}{e^{\alpha z}}}{(G+m) + \dfrac{\delta}{e^{\alpha z}}}\ ;$$

por tanto $\eta(z) \longrightarrow 0$ cuando $z \longrightarrow \infty$.

(1) Véase: E. GOURSAT, *Cours d'Analyse Mathématique*, T. III. p. 324. París (1905).

Determinemos una función $\psi(x)$ integrable en todo intervalo $(0, \alpha)$, y tal que

$$\frac{\int_0^\alpha e^{-xz} a(x)\, dx}{m + \int_0^\alpha e^{-xz} b(x)\, dx} = \int_0^\alpha e^{-yz} \psi(y)\, dy$$

es decir

$$\int_0^\alpha e^{-xz} a(x)\, dx = m \int_0^\alpha e^{-yz} \psi(y)\, dy + \int_0^\alpha \int_0^\alpha e^{-xz-yz} b(x)\, \psi(y)\, dx\, dy\,.$$

La integral doble que figura en el segundo miembro se transforma, según un proceso análogo al caso del producto. Resulta entonces

$$\int_0^\alpha e^{-xz} a(x)\, dx = m \int_0^\alpha e^{-xz} \psi(x)\, dx + \int_0^\alpha e^{-xz}\, dx \int_0^x b(x-t)\, \psi(t)\, dt$$

y poniendo

$$\theta(x) = \int_0^x b(x-t)\, \psi(t)\, dt$$

se tiene

$$\int_0^\alpha e^{-xz} a(x)\, dx = \int_0^\alpha e^{-xz} [m\, \psi(x) + \theta(x)]\, dx\,.$$

De aquí resulta según un conocido teorema (1)

$$a(x) = m\, \psi(x) + \int_0^x b(x-t)\, \psi(t)\, dt$$

ecuación integral que nos permite determinar la función $\psi(x)$ en función de $a(x)$ y $b(x)$.

Por tanto

$$\frac{F}{G+m} = \int_0^\alpha e^{-yz} \psi(y)\, dy\,,$$

y la relación [2] se puede escribir

$$e^{\alpha z} \left[\frac{f(z)}{g(z)} - \int_0^\alpha e^{-yz} \psi(y)\, dy \right] = \eta(z)\, e^{\alpha z}$$

(1) Si las funciones integrales no son contínuas la igualdad se verifica salvo un conjunto de medida nula, según el teorema de Lerch-Vitali.

Teniendo presente que $\eta(z)\, e^{\alpha z} \longrightarrow 0$, se tiene entonces

$$\lim_{z \to \infty} e^{\alpha z}\left[\frac{f(z)}{g(z)} - \int_0^\alpha e^{-yz}\, \psi(y)\, dy\right] = 0$$

lo cual prueba el tecrema.

4. Integración. — *Si se tiene*

$$f(z) \sim \int_1^\infty e^{-xz}\, \varphi(x)\, dx$$

resulta entonces

$$\int_z^\infty f(z)\, dz \sim \int_1^\infty e^{-xz} \frac{\varphi(z)}{x}\, dx\,.$$

Por hipótesis

$$f(z) = \int_1^\alpha e^{-xz}\, \varphi(x)\, dx + \varepsilon(z)\,.\, e^{-\alpha z} \quad (\alpha > 1)$$

con $\varepsilon(z) \longrightarrow 0$ para $z \longrightarrow \infty$.

De aquí resulta

$$\int_z^\infty f(z)\, dz = \int_z^\infty dz \int_1^\alpha e^{-xz}\, \varphi(x)\, dx + \int_z^\infty \frac{\varepsilon(z)}{e^{\alpha z}}\, dz$$

La primer integral del segundo miembro, se puede escribir

$$\int_z^\infty dz \int_1^\alpha e^{-xz}\, \varphi(x)\, dx = \int_1^\alpha \varphi(x)\, dx \int_z^\infty e^{-xz}\, dz$$

desde que la permutación de la integración es legítima por ser la integral

$$\int_z^\infty e^{-xz}\, dz$$

uniformemente convergente para $x > 1$. En efecto, si ponemos $z = \xi + i\eta$ se tiene

$$\left|\frac{1}{e^{xz}}\right| = \frac{1}{e^{x\xi}} > \frac{1}{e^{\xi}} \quad \text{para} \quad x > 1$$

luego

$$\left| \int_m^\infty e^{-xz}\, dz \right| \leq \int_m^\infty | e^{-xz}\, dz | \leq \int_m^\infty e^{-\xi}\, d\xi = \frac{1}{e^m};$$

por tanto, fijando un $\varepsilon > 0$, existe un $\mu > 0$, tal que

$$\int_m^\infty e^{-xz}\, dz < \varepsilon \quad m \geq \mu$$

y para todo x del intervalo $(1, +\infty)$.

Además como

$$\int_z^\infty e^{-xz}\, dz = \frac{e^{-xz}}{x} \qquad (x > 0)$$

resulta entonces

$$\int_z^\infty dz \int_1^\alpha e^{-xz}\, \varphi(x)\, dx = \int_1^\alpha e^{-xz} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx$$

luego

$$\int_z^\infty f(z)\, dz = \int_1^\alpha e^{-xz} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + \eta(z)\, e^{-az} \qquad [3]$$

donde

$$\eta(z) = e^{-az} \int_z^\infty \frac{\varepsilon(z)}{e^{az}}\, dz .$$

De la condición: $\varepsilon(z) \longrightarrow 0$ para $z \longrightarrow \infty$, a todo $\delta > 0$ arbitrario, corresponde un $m(\delta)$ tal que

$$| \varepsilon(z) | < \delta \quad \text{para} \quad | z | \geq m(\delta)$$

luego

$$| \eta(z) | < | e^{az} | \,.\, \delta \,.\, \int_z^\infty | e^{-az}\, dz | < \delta$$

por tanto

$$\eta(z) \longrightarrow 0 \quad z \longrightarrow \infty,$$

y teniendo en cuenta la relación [3], queda demostrado el teorema.

DERIVACIÓN. — *Si la función $f(x)$ y su derivada $f'(x)$ tienen los desarrollos asintóticos*

$$f(z) \sim \int_1^\infty e^{-xz}\, \varphi(x)\, dx \qquad [1]$$

y

$$f'(z) \sim \int_1^\infty e^{-xz}\, \psi(x)\, dx \qquad [2]$$

entonces la integral [2] *es la derivada de la* [1].

En efecto; aplicando el teorema de la integración a la [2] resulta

$$\int_z^\infty f'(z)\, dz = -f(z) \sim \int_z^\infty e^{-xz} \frac{\psi(x)}{x}\, dx\,,$$

o sea

$$\int_1^\infty e^{-xz}\, \varphi(x)\, dx = \int_1^\infty e^{-xz}\left(-\frac{\psi(x)}{x}\right) dx$$

por tanto debe ser

$$\varphi(x) = -\frac{\psi(x)}{x}$$

$$\psi(x) = -x\, \varphi(x)\,.$$

Además

$$\frac{d}{dz}\left[\int_1^\infty e^{-xz}\,.\,\varphi(x)\,.\,dx\right] = \int_1^\infty \frac{d}{dz}\left[e^{-xz}\, \varphi(x)\,.\,dx\right]$$

$$= \int_1^\infty e^{-xz}\,.\,(-x\,.\,\varphi(x)\,.\,dx = \int_1^\infty e^{-xz}\,.\,\psi(x)\,.\,dx\,,$$

de donde resulta la proposición.

II. INTEGRALES DOBLES ASINTÓTICAS

5. Las definiciones y los teoremas que hemos dado en la primera parte, se extienden a las integrales dobles en la siguiente forma.

Dada la función $f(z, w)$ de las variables complejas z, w en la semi-planos asociados: $R(z) \geq 0$, $R(w) \geq 0$; diremos que la integral doble de Laplace

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-xz-yw}\, \varphi(x, y)\, dx\, dy$$

convergente o no, donde $\varphi(x, y)$ es una función real de x e y integrable en todo rectángulo $(0 \leq x \leq a \ 0 \leq y \leq b)$ la representa asintóticamente si la expresión

$$\varepsilon_{a,b}(x, y) = e^{az+bw}\left[f(z, w) - \int_0^a\int_0^b e^{-xz-yw}\,\varphi(x, y)\,dx\,dy\right] \quad [1]$$

tiende a *cero,* cuando z y w tienden a infinito *simultanea e independiente,* para todo $(a > 0,\ b > 0)$.

La [1] equivale a poner

$$f(z, w) = \int_0^a\int_0^b e^{-xz-yw}\,\varphi(x, y)\,dx\,dy + \varepsilon(x, y)\,e^{-az-bw}$$

con

$$\varepsilon(x, y) \longrightarrow 0 \quad (z, w) \longrightarrow \infty .$$

En este caso, pondremos

$$f(z, w) \sim \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-xz-yw}\,\varphi(x, y)\,dx\,dy .$$

La representación asintótica de una función $f(z, w)$ si existe, es única. En efecto; supongamos

$$f(z, w) = \int_0^a\int_0^b e^{-xz-yw}\,\varphi(x, y) + \frac{\varepsilon(z, u)}{e^{az+bw}} \quad , \quad \varepsilon \longrightarrow 0$$

$$f(z, w) = \int_0^a\int_0^b e^{-xz-yw}\,\psi(x, y) + \frac{\delta(z, w)}{e^{az+bw}} \quad , \quad \delta \longrightarrow 0$$

y que las funciones $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ *sean analíticas*

$$\varphi(x, y) = \sum\sum a_{mn}\,x^m\,y^n \quad , \quad \psi(x, y) = \sum\sum b_{mn}\,x^m\,y^n .$$

De aquí resulta

$$f(z, w) = \frac{(1 - e^{-az})(1 - e^{-bw})}{zw} \sum \sum a_{mn} z^m w^n + \frac{\varepsilon}{e^{ab + bw}}$$

$$f(z, w) = \frac{(1 - e^{-ab})(1 - e^{-bw})}{zw} \sum \sum b_{mn} z^m w^n + \frac{\delta}{e^{az + bw}}$$

de donde resulta, por recurrencia (1) que

$$a_{m,n} = b_{m,n} \quad (m, n = 0, 1, 2, \ldots)$$

luego las funóiones $\varphi(x, y)$ y $\psi(x, y)$ son analíticas.

6. Ocupémonos de las operaciones fundamentales algebraicas.

Si

$$f(z, w) \sim \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-xz-yw} a(x, y)\, dx\, dy \qquad [1]$$

y

$$g(z, w) \sim \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-xz-yw} b(x, y)\, dx\, dy \qquad [2]$$

se tiene

$$f(z, w) \pm g(z, w) \sim \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-xz-yw} c(x, y)\, dx\, dy$$

donde

$$c(x, y) = a(x, y) \pm b(x, y) .$$

Se prueba como en el caso de una variable.

Si las funciones tienen los desarrollos asintóticos [1] *y* [2]; *se tiene entonces*

$$f(z, w) \,.\, g(z, w) \sim \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-zx-wy} c(x, y)\, dx\, dy ,$$

donde

$$c(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^x \int_0^y a(t, u)\, b(x - t, y - u)\, dt\, du .$$

Por hipótesis

$$f(z, w) = F + \varepsilon e^{-az-bw} \quad , \quad g(z, w) = G + \delta e^{-az-bw}$$

donde

$$\varepsilon \longrightarrow 0 \quad , \quad \delta \longrightarrow 0 \quad (z, w) \longrightarrow \infty$$

(1) Véase: J. C. Vignaux, *Sobre series doble asintóticas* anteriormente citado.

Además

$$F \cdot G = \int_0^a \int_0^b e^{-xz-yw} a(x, y)\, dx\, dy \cdot \int_0^a \int_0^b e^{-\alpha z-\beta w} b(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta$$

$$= \int_0^a \int_0^a dx\, d\alpha \int_0^b \int_0^b e^{-(x+\alpha)z}\, e^{-(y+\beta)w} a(x, y)\, b(\alpha, \beta)\, dy\, d\beta .$$

Razonando del mismo modo que en el caso anterior de una variable y con el cambio de variables

$$x + \alpha = \xi \quad \alpha = \xi \eta \, , \; y + \beta = \xi' \, , \; \beta = \xi' \eta'$$

resulta finalmente

$$F \cdot G = \int_0^a \int_0^b e^{-tz-wu} c(t, u)\, dt\, du$$

donde

$$c(t, u) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^u a(t, u)\, b(x - t, y - u)\, dt\, du .$$

Por tanto

$$e^{az-bw} \left[f(z, w)\, g(z, w) - \int_0^a \int_0^b e^{-tz-uw} c(t, u)\, dt\, du \right] =$$

$$= F \cdot \delta + G\, \varepsilon + \varepsilon \cdot \delta\, e^{-az-bz} \longrightarrow 0$$

cuando $(z, w) \longrightarrow \infty$.

Si las funciones

$$f(z, w) \quad \text{y} \quad g(z, w) + m \quad (m \neq 0)$$

tienen por desarrollo asintótico las integrales dobles [1] *y* [2]; *se tiene*

$$\frac{f(z, w)}{g(z, w)} \sim \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-zx-wy} w(x, y)\, dx\, dy$$

donde $w(x, y)$ *es solución de la ecuación integral de Volterra.*

$$a(x, y) = m\, w(x, y) + \int_0^x \int_0^y b(x - t, y - u) \cdot w(t, u)\, dt\, du . \qquad [3]$$

Por hipótesis

$$f(z, w) = F + \varepsilon\, e^{-az-bw} \quad , \quad g(z, w) = b + m + \delta\, e^{-az-bw}$$

de donde

$$\frac{f(z, w)}{g(z, w)} = \frac{F}{G + m} + \eta \quad \text{donde} \quad \eta \longrightarrow 0 \quad (z, w) \longrightarrow 0$$

Pongamos

$$\frac{\int_0^a\int_0^b e^{-xz-yw}\, a(x, y)\, dx\, dy}{m + \int_0^b e^{-xz-yw}\, b(x, y)\, dx\, dy} = \int_0^a\int_0^b e^{-\alpha z-\beta w}\, w(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta$$

de donde

$$\int_0^a\int_0^b e^{-xz-yw}\, a(x, y)\, dx\, dy = \int_0^a\int_0^b e^{-xz-yw}\, [m\, w(x, y) + \eta(x, y)]\, dx\, dy$$

con

$$\eta(x, y) = \int_0^x\int_0^y b(x-t, y-u)\, w(t, u)\, dt\, du$$

y de aquí resulta que $w(\alpha, \beta)$ debe ser solución de la ecuación integral [3].

Por tanto

$$e^{az+bw}\left[\frac{f(z, w)}{g(z, w)} - \int_0^a\int_0^b e^{-xz-yw}\, w(x, y)\, dx\, dy\right] \longrightarrow 0$$

cuando $(z, w) \longrightarrow 0$.

7. El teorema de la integración y derivación se extiende también de la siguiente manera:

Si

$$f(z, w) \sim \int_1^\infty\int_1^\infty e^{-xz-yw}\, \varphi(x, y)\, dx\, dy$$

es entonces

$$\int_z^\infty\int_w^\infty f(z, w)\, dz\, dw \sim \int_1^\infty\int_1^\infty e^{-xz-yw}\, \frac{\varphi(x, y)}{xy}\, dx\, dy$$

De la hipótesis resulta

$$\int_z^\infty\int_w^\infty f(z, w)\, dz\, dw = \int_1^\infty\int_w^\infty dz\, dw \int_1^a\int_1^b e^{-xz-yw}\, \varphi(x, y)\, dx\, dy +$$

$$+ \int_z^\infty\int_w^\infty \frac{\varepsilon(z, w)}{e^{az+bw}}\, dz\, dw \quad , \quad \varepsilon(z, w) \longrightarrow 0\,. \qquad [4]$$

Además, la primera integral doble del segundo miembro se puede escribir

$$\int_1^a \int_1^b \varphi(x, y)\, dx\, dy \int_1^\infty \int_1^\infty e^{-xz-yw}\, dz\, dw = \int_1^a \int_1^b \frac{\varphi(x, y)}{x, y}\, dx\, dy$$

puesto que la integral doble

$$\int_z^\infty \int_w^\infty e^{-xz-yw}\, dx\, dy$$

converge uniformemente a su límite:

$$\frac{e^{-xz-yw}}{x \cdot y}$$

para todo $(x > 1,\ y > 1)$.

De la condición: $\varepsilon(z, w) \longrightarrow 0$, resulta que a todo $\delta > 0$ arbitrario corresponde un $m(\delta)$ tal que

$$|\varepsilon(z, w)| < \delta \quad \text{para} \begin{cases} |z| > m(\delta) \\ |w| > m(\delta) \end{cases}$$

luego

$$\eta(z, w) = \int_z^\infty \int_w^\infty \frac{\varepsilon(z, w)}{e^{az+bw}}\, dz\, dw \longrightarrow 0 \quad (z, w) \longrightarrow \infty.$$

Teniendo en cuenta la [4] y las conclusiones anteriores, el teorema queda demostrado.

Finalmente:

Si

$$f(z, w) \sim \int_1^\infty \int_1^\infty e^{-xz-yw}\, \varphi(x, y)\, dx\, dy \qquad [1]$$

y

$$f_z' \sim \int_1^\infty \int_1^\infty e^{-xz-yw}\, \psi\, dx\, dy\,, \qquad [2]$$

$$f_w' \sim \int_1^\infty \int_1^\infty e^{-xz-yw}\, \psi_1\, dx\, dy \qquad [3]$$

$$f_{zw}'' \sim \int_1^\infty \int_1^\infty e^{-xz-yw}\, \psi_2\, dx\, dy \qquad [4]$$

entonces las integrales [2], [3] *y* [4] *son las derivadas parciales de la* [1].

En efecto; aplicando el teorema de la integración a las series [2], [3] y [4] resulta sucesivamente

$$f(z, w) \sim -\int_1^\infty\int_1^\infty e^{-xz-yw} \frac{\psi . (x, y)}{x} dx\, dy .$$

$$f(z, w) \sim -\int_1^\infty\int_1^\infty e^{-xz-yw} \frac{\psi_1 (x, y)}{y} dx\, dy .$$

$$f(z, w) \sim \int_1^\infty\int_1^\infty e^{-xz-yw} \frac{\psi_2 (x, y)}{xy} dx\, dy ,$$

por tanto

$$\varphi(x, y) = -\frac{\psi(x, y)}{x} \quad \therefore \quad \psi(x, y) = -x\,\varphi(x, y)$$

$$\varphi(x, y) = -\frac{\psi_1(x, y)}{y} \quad \therefore \quad \psi_1(x, y) = -y\,\varphi(x, y)$$

$$\varphi(x, y) = \frac{\psi_2(x, y)}{xy} \quad \therefore \quad \psi_2(x, y) = x\,y\,\varphi(x, y)$$

y las funciones $\psi(x, y)$, $\psi_1(x, y)$ y $\psi_2(x, y)$ son respectivamente las derivadas parciales de

$$e^{-xz-yw}\,\varphi(x, y)$$

respecto de z, de w y de z, w.

LOS SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES Y SUS APLICACIONES AL ESTUDIO DE LOS CUERPOS CONVEXOS

POR

FRANCISCO LA MENZA

(*Conclusión* *)

Se deduce inmediatamente que:

III) *Dos cadenas no idénticas iguales tienen el mismo orden, la misma clase, el mismo número de permanencias, las mismas eventuales singularidades, y sus respectivos grupos, los mismos números característicos.*

En dos cadenas iguales, llamaremos *filas homólogas* y *permanencias homólogas*, a aquéllas que se corresponden en la sustitución σ, que transforma una cadena en la otra.

De (26, IV), resulta:

IV) *Todas las cadenas elementales del mismo orden son iguales entre sí.*

En particular, puesto que las cadenas unitarias cerradas son, (26, V), elementales:

V) *Todas las cadenas unitarias cerradas, son iguales entre sí; como también las cadenas unitarias abiertas,* porque estas últimas constan de una sola permanencia.

Por la misma razón:

VI) *Dos permanencias no idénticas regulares del mismo orden, son iguales*; pues sus componentes, (26, II), forman una cadena elemental.

VII) *Todas las cadenas binarias cerradas de igual clase, son iguales entre sí.*

En efecto, por su definición, (24), en este caso el conjunto de las permanencias de la cadena implica una ordenación cíclica de sus filas. Sea entonces:

$$C_2(m, n) = \{a_1 \, a_2\} \, \{a_2 \, a_3\} \, \ldots \, \{a_{m-1} \, a_m\} \, \{a_m \, a_1\} \, .$$

(*) Ver *Anales S. C. A.*, Mayo 1938, Entrega V, Tomo CXXV.

A esta cadena corresponde la ordenación

$$a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, a_m .$$

Cualquier otra cadena binaria cerrada $C_2'(m, n)$ de estas mismas filas, implica otra ordenación:

$$a_{\nu_1} a_{\nu_2}, \ldots, a_{\nu_{m-1}}, a_{\nu_m} .$$

Por consiguiente, la sustitución,

$$\sigma = \begin{pmatrix} a_{\nu_1} & a_{\nu_2} & \ldots & a_{\nu_{m-1}} & a_{\nu_m} \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{m-1} & a_m \end{pmatrix},$$

transforma $C_2(m, n)$, en $C_2'(m, n)$.

También,

VIII) *Son iguales entre sí todas las cadenas binarias cerradas que tienen el mismo número de permanencias*; puesto que en tal caso tienen, (29), la misma clase.

IX) *Si dos cadenas son iguales y una de ellas tiene derivada de un dado orden con respecto a un grupo de filas, la otra también tiene derivada del mismo orden, con respecto al grupo homólogo, y ambas cadenas derivadas también son iguales.*

Puesto que las dos cadenas dadas son iguales, existe una sustitución σ, entre todas las filas de una de ellas, que la transforma en la otra. Como, (34), la cadena derivada se obtiene suprimiendo, en las permanencias que las contienen, las filas con respecto a las cuales se deriva, y en la correspondencia σ, las filas homólogas también pertenecen a las permanencias homólogas en la otra cadena, ésta admite, por lo tanto, la derivada con respecto al grupo homólogo de filas dadas. En consecuencia, dicha derivada resulta del mismo orden que su homóloga. Pero ambas cadenas derivadas son, además, iguales. En efecto, una sustitución σ' que transforma una de ellas en la otra, se obtiene de la misma sustitución σ, suprimiendo en ésta los dos grupos homólogos de filas consideradas y, además, todas las otras filas que no pertenecen a las dos cadenas derivadas.

Ejemplo 3:

Así, las cadenas derivadas, con respecto a las filas 1, 2 y a sus homólogas 3, 2 en la sustitución σ que transforma C en C' del *ejemplo 2*, de este número son:

$$\mathcal{D}_{1,2}\, C = \{34\}\ \{46\}\ \{63\},$$

$$\mathcal{D}_{2,3}\, C' = \{15\}\ \{54\}\ \{41\} .$$

Una sustitución σ', que transforma la primera de éstas en la segunda, es,

$$\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

que se obtiene suprimiendo en σ, las filas 1, 2, 5 y sus homólogas 3, 2, 6.

X) *En dos cadenas iguales, a cada par asociado de cadenas derivadas en una de ellas, corresponde un par asociado de cadenas derivadas respectivamente iguales a las dadas, en la otra.*

Sean C y C' las dos cadenas iguales y [36.2], σ, la sustitución que transforma C en C'. Sea, además, $\mathcal{D}_{a_i} C$ y $\mathcal{D}_{a_j} C$ el par asociado en C. Se debe tener, (35, X),

$$\mathcal{D}_{a_j} (\mathcal{D}_{a_i} C) = \mathcal{D}_{a_i} (\mathcal{D}_{a_j} C).$$

Pero, por ser $C = C'$, resulta (IX):

$$\mathcal{D}_{a_i} C = \mathcal{D}_{a_{\nu_i}} C',$$

$$\mathcal{D}_{a_j} C = \mathcal{D}_{a_{\nu_j}} C',$$

y también,

$$\mathcal{D}_{a_j} (\mathcal{D}_{a_i} C) = \mathcal{D}_{a_{\nu_j}} (\mathcal{D}_{a_{\nu_i}} C')$$

$$\mathcal{D}_{a_i} (\mathcal{D}_{a_j} C) = \mathcal{D}_{a_{\nu_i}} (\mathcal{D}_{a_{\nu_j}} C').$$

Luego:

$$\mathcal{D}_{a_{\nu_j}} (\mathcal{D}_{a_{\nu_i}} C') = \mathcal{D}_{a_{\nu_i}} (\mathcal{D}_{a_{\nu_j}} C');$$

lo que prueba, (35, X), la proposición.

Veamos cómo son las correspondientes sustituciones, en este caso. La primera de las igualdades escritas significa que la cadena $\mathcal{D}_{a_i} C$ contiene a la fila a_j y que, viceversa, la $\mathcal{D}_{a_j} C$ contiene a la fila a_i. Por lo tanto, las sustituciones σ_j y σ_i que transforman a $\mathcal{D}_{a_j} C$ en $\mathcal{D}_{a_{\nu_i}} C'$ y $\mathcal{D}_{a_i} C$ en $\mathcal{D}_{a_{\nu_i}} C'$, contienen respectivamente a las filas a_i y a_j. En cambio, una cualquiera de las dos penúltimas igualdades expresa que de ambas sustituciones σ_i y σ_j se deduce una misma sustitución $\sigma_{i,j}$ que transforma la cadena $\mathcal{D}_{a_j} (\mathcal{D}_{a_i} C)$ en $\mathcal{D}_{a_{\nu_j}} (\mathcal{D}_{a_{\nu_i}} C')$, suprimiendo en σ_i la fila a_j, las que no figuran en la cadena y sus homólogas; o en σ_j, la fila a_i, las que no figuran en la cadena y sus homólogas. Por lo tanto:

XI) *Las dos sustituciones que transforman pares asociados de cadenas derivadas, en pares asociados, en dos cadenas iguales tienen, por lo menos, una fila. Las filas comunes en ambas sustituciones tienen*

las mismas homólogas y la fila de una derivada pertenece a la sustitución que transforma a la otra derivada.

Así, pues, ellas son, respectivamente, de la forma:

$$\begin{cases} \sigma_i = \begin{pmatrix} a_{\nu_1} & a_{\nu_2} & \dots & a_{\nu_{i-1}} & a_{\nu_{i+1}} & \dots & a_{\nu_j} & \dots & a_{\nu_p} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{i-1} & a_{i+1} & \dots & a_j & \dots & a_p \end{pmatrix}, \\ \\ \sigma_j = \begin{pmatrix} a_{\nu_1} & a_{\nu_2} & \dots & a_{\nu_{j-1}} & a_{\nu_{j+1}} & \dots & a_{\nu_i} & \dots & a_{\nu_q} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{j-1} & a_{j+1} & \dots & a_i & \dots & a_q \end{pmatrix}. \end{cases} \qquad [36.3]$$

Ejemplo 4:

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ las dos cadenas iguales del *ejemplo 2*, de este número y una sustitución, $\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ que transforma $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$.

Las dos cadenas derivadas siguientes:

$$\mathcal{D}_1\,\mathcal{C} = \{234\}\{236\}\{246\}\{346\} \quad \text{y}$$

$$\mathcal{D}_2\,\mathcal{C} = \{134\}\{136\}\{146\}\{345\}\{356\}\{456\},$$

son asociadas en $\mathcal{C}$. Pues

$$\mathcal{D}_2(\mathcal{D}_1\,\mathcal{C}) = \{34\}\{46\}\{63\},$$

$$\mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2\,\mathcal{C}) = \{34\}\{46\}\{63\}.$$

Las cadenas respectivamente iguales a éstas en $\mathcal{C}'$, resultan:

$$\mathcal{D}_3\,\mathcal{C}' = \{215\}\{214\}\{254\}\{154\},$$

$$\mathcal{D}_2\,\mathcal{C}' = \{315\}\{314\}\{354\}\{156\}\{164\}\{564\},$$

$$\mathcal{D}_2(\mathcal{D}_3\,\mathcal{C}') = \{15\}\{54\}\{41\},$$

$$\mathcal{D}_3(\mathcal{D}_2\,\mathcal{C}') = \{15\}\{54\}\{41\}.$$

Ellas son también asociadas en $\mathcal{C}'$. Las sustituciones σ_1 y σ_2 que transforman respectivamente $\mathcal{D}_1\,\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}_3\,\mathcal{C}'$ y $\mathcal{D}_2\,\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}_2\,\mathcal{C}'$ son:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad ; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

37. **Criterios de igualdad de cadenas.** — En el número precedente hemos dado algunos criterios muy simples de igualdad para el caso particular de las cadenas elementales y de las cadenas unitarias y binarias; veremos aquí algunos criterios para las cadenas generales.

I) *Dos cadenas son iguales si se cumplen, a la vez, las tres condiciones siguientes:*

a) Tienen las mismas eventuales singularidades;

b) a cada cadena derivada de primer orden en una de ellas, corresponde una cadena derivada de primer orden igual en la otra;

c) si dos derivadas de primer orden en una de ellas, tienen una fila común, sus correspondientes en la otra también tienen una fila común.

Por tener las mismas singularidades e iguales cadenas derivadas de primer orden, tienen, (III), el mismo orden y la misma clase. Sean C y C' ambas cadenas y $a_1, a_2, \ldots a_i, \ldots a_j, \ldots a_m$, sus filas. Designando con a_{ν_i} la fila homóloga en C' de a_i, respecto de las cuales ambas derivadas de primer orden son iguales, se debe tener, para todo $i = 1, 2, 3, \ldots, m$,

$$\mathcal{D}a_i\, C = \mathcal{D}a_{\nu_i}\, C' .$$

Luego, existen m sustituciones;

$$\sigma_i = \begin{pmatrix} a_{\nu_1} & a_{\nu_2} & \ldots & a_{\nu_{i-1}} & a_{\nu_{i+1}} & \ldots & a_{\nu_p} \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{i-1} & a_{i+1} & \ldots & a_p \end{pmatrix},$$

tales que,

$$\sigma_i\, \mathcal{D}a_i\, C \equiv \mathcal{D}a_{\nu_i}\, C' .$$

Para probar la igualdad de las dos cadenas será preciso demostrar la existencia de una sustitución σ, entre las m filas dadas, tal que:

$$\sigma\, C \equiv C' .$$

Para ello, basta observar, en primer lugar, que, si dos sustituciones σ_i y σ_j de las m dadas, tienen una fila común a_s, ésta tiene en σ_i y en σ_j una misma fila homóloga a_{ν_s}. En efecto, si a_s es una fila común a las cadenas $\mathcal{D}a_i\, C$ y $\mathcal{D}a_j\, C$, por la condición c), sus respectivas homólogas, $\mathcal{D}a_{\nu_i}\, C'$ y $\mathcal{D}a_{\nu_j}\, C'$, tienen también una fila común a_{ν_s}. Luego, dichos pares de cadenas admiten derivadas relativas a a_s y a a_{ν_s} respectivamente, para las cuales se tiene:

$$\mathcal{D}a_s\, (\mathcal{D}a_i\, C) = \mathcal{D}a_{\nu_s}\, (\mathcal{D}a_{\nu_i}\, C')$$
$$\mathcal{D}a_s\, (\mathcal{D}a_j\, C) = \mathcal{D}_{a_{\nu s}}\, (\mathcal{D}a_{\nu_j}\, C') .$$

Esto implica, a su vez, por definición de cadenas iguales, que:

$$\sigma'_i \cdot \mathcal{D}_{a_s}(\mathcal{D}_{a_i} C) \equiv \mathcal{D}_{a_{\nu_s}}(\mathcal{D}_{a_{\nu_i}} C'),$$

$$\sigma'_j \cdot \mathcal{D}_{a_s}(\mathcal{D}_{a_j} C) \equiv \mathcal{D}_{a_{\nu_s}}(\mathcal{D}_{a_{\nu_j}} C').$$

Pero σ'_i no es otra que la sustitución σ_i en la cual se ha suprimido la fila a_s y las que no figuran en la derivada, por lo tanto, su homóloga en σ_i, es a_{ν_s}. Por la misma razón esta fila es también homóloga de a_s en σ_j.

Siendo así, mediante las m sustituciones σ_i dadas, es siempre posible formar una sustitución σ, entre las m filas, conservando en cada una, las filas que son homólogas, hasta agotarlas todas, puesto que cada fila pertenece, por hipótesis, necesariamente a alguna sustitución σ_i. La igualdad de las dos cadenas resulta, (36), de la existencia de la sustitución σ, del hecho de tener ambas cadenas las mismas singularidades y de (34, XII).

II) *Dos cadenas son iguales si se cumplen, a la vez, las tres condiciones siguientes*:

a) *Tienen las mismas eventuales singularidades;*

b) *a cada cadena derivada de primer orden en una de ellas, corresponde una cadena derivada de primer orden igual en la otra;*

c) *a cada par asociado de cadenas derivadas en una de ellas, corresponde un par asociado de cadenas derivadas respectivamente iguales en la otra.*

Con las mismas notaciones del teorema precedente, se tiene:

$$\mathcal{D}_{a_i} C = \mathcal{D}_{a_{\nu_i}} C',$$

$$\mathcal{D}_{a_j} C = \mathcal{D}_{a_{\nu_j}} C',$$

en donde, por hipótesis, las dos cadenas de cada miembro son respectivamente asociadas en C y en C'. Luego (34, X):

$$\mathcal{D}_{a_j}(\mathcal{D}_{a_i} C) = \mathcal{D}_{a_i}(\mathcal{D}_{a_j} C)$$

y

$$\mathcal{D}_{a_{\nu_j}}(\mathcal{D}_{a_{\nu_i}} C') = \mathcal{D}_{a_{\nu_i}}(\mathcal{D}_{a_{\nu_j}} C')$$

En virtud de (36, IX), resulta, además:

$$\mathcal{D}_{a_j}(\mathcal{D}_{a_i} C) = \mathcal{D}_{a_{\nu_j}}(\mathcal{D}_{a_{\nu_i}} C'),$$

$$\mathcal{D}_{a_i}(\mathcal{D}_{a_j} C) = \mathcal{D}_{a_{\nu_i}}(\mathcal{D}_{a_{\nu_j}} C').$$

En consecuencia, estas relaciones prueban que las sustituciones σ_i y σ_j que transforman respectivamente $\mathcal{D}_{a_i} C$ en $\mathcal{D}_{a_{v_i}} C'$ y $\mathcal{D}_{a_j} C$ en $\mathcal{D}_{a_{v_j}} C'$, son de la forma [36.3].

Pero, (34, XI), a cada cadena derivada corresponde una asociada. Repitiendo, entonces, las mismas consideraciones para cada par de asociadas, se obtienen sustituciones del tipo indicado, con las cuales se compone una sustitución σ, como en el teorema precedente.

NOTA: Las condiciones impuestas son todavía superabundantes en lo referente al número de derivadas iguales de primer orden. Basta sólo la de algunas. Sería interesante investigar el menor número que es preciso dar para que se verifique la igualdad.

38. **Forma de las figuras poliédricas convexas.** — La noción de cadena, (24), nos va a proporcionar el modo más natural de definir, por abstracción, el concepto de *forma de una figura poliédrica convexa.*

Recordemos, (8), que a todos los resolventes principales de un sistema $S_h(m, n)$, corresponde una *figura,* y que las *figuras* que constituyen el *contorno* de ella, *vértices, aristas, caras,* etc., se obtienen considerando, (10), los resolventes principales de sus sistemas subordinados. Pero éstos corresponden, a su vez, (34), a las cadenas derivadas de la cadena a que pertenece, (32, III), el dado sistema. Diremos que dichas figuras son las *figuras derivadas* de orden $s \leq h$ de la figura considerada, puesto que, (32, IV), a estas cadenas derivadas corresponden sistemas subordinados compatibles de igual orden del sistema dado. En particular, las figuras derivadas de primer orden, son las *caras* de la dada. Las de orden h son los *vértices.*

Diremos que dos o más sistemas $S_h(m, n)$ son del *mismo tipo,* si pertenecen a una misma cadena o a cadenas iguales. En caso contrario se dirán de *distintos tipos.* Cuando dos o más sistemas son del mismo tipo, diremos que las figuras definidas por sus respectivos resolventes principales, pertenecen a la misma *forma poliédrica convexa,* o, brevemente, *tienen la misma forma.* En caso contrario se dirá que pertenecen a *formas distintas.*

La forma de una figura poliédrica convexa es un ente abstracto que representa a todos los sistemas de un mismo tipo. Ella está, pues, dada por una cadena C y por todas las cadenas iguales a ésta. La cadena constituye, de este modo, la expresión *analítica* de la forma, la cual es *invariante* en las sustituciones entre todas las filas que la definen.

La clase y el orden de la cadena se llaman, respectivamente, *clase* y *dimensión* de la forma. Esta última designación está justificada por la siguiente razón: Si $C_h(m, n)$ es la cadena que define la forma considerada, todas las cadenas iguales a ella, (36), pueden tener dimensiones distintas pero no inferiores a su orden h, el cual es, (8), la dimensión del espacio de pertenencia de las correspondientes figuras particulares.

Así, pues, desde este punto de vista, un polígono convexo y un prisma también convexo con tantas caras como lados tiene el polígono, pertenecen a la misma *forma*, siendo, en cambio, *figuras distintas*.

No habría inconveniente en definir la forma exigiendo que las cadenas iguales tengan además igual dimensión, pero es más cómodo hacerlo sin este último requisito. Está demás hacer notar aquí, que la forma así definida es independiente de toda relación métrica entre los elementos de las figuras. Sólo depende, como en las cadenas, del modo según el cual se asocian entre sí para constituirla.

Resulta:

I) *Todas las figuras correspondientes a cadenas elementales del mismo orden, pertenecen a la misma forma*; puesto que, (36, IV), dichas cadenas son iguales entre sí.

De (36, V), resulta directamente:

II) *Todos los sistemas unitarios de igual clase son del mismo tipo.*

En particular, si son unidimensionales sus figuras son, (14), respectivamente segmentos o semirrectas según que sus cadenas tengan dos o una permanencia. Luego:

III) *Todos los segmentos pertenecen a la misma forma, como también todas las semirrectas.*

Del mismo modo, (36, VII):

IV) *Todos los sistemas binarios pertenecientes a cadenas binarias cerradas de igual clase, son del mismo tipo.*

Cuando la dimensión de estos sistemas binarios es igual a dos, sus figuras son polígonos convexos, luego:

V) *Todos los polígonos convexos de igual número de lados pertenecen a la misma forma.*

Según las precedentes definiciones, dar una forma F, de clase m y de dimensión h, equivale a dar una cadena $C_h(m, n)$ de clase m, de orden h y de cualquier dimensión $n \geq h$ y el conjunto de todas las cadenas iguales a ella. Una cualquiera de éstas define la misma forma F.

Las cadenas derivadas de orden s, con respecto a grupos de s filas homólogas de dos cualesquiera del conjunto de esas cadenas iguales son, (36, IX), también cadenas iguales. La correspondiente forma F' definida por este conjunto de cadenas iguales de orden s, se llama *forma derivada de orden s de la dada forma* F, con respecto al grupo g de filas consideradas o de cualquier grupo homólogo a él. La indicaremos con la notación

$$F' = \mathcal{D}_g F,$$

análoga a la usada para las cadenas. Como la derivación de formas se reduce a la de cadenas, goza de las mismas propiedades de aquella operación.

VI) *Si dos figuras pertenecen a una misma forma* F, *y una de ellas admite la figura derivada de un dado orden con respecto a un grupo de filas, la otra también admite la figura derivada del mismo orden con respecto al grupo homólogo, y ambas figuras derivadas pertenecen a la misma forma, la cual se obtiene derivando la* F *con respecto a dichas filas.*

Es consecuencia inmediata de las precedentes definiciones y de (36, IX).

En virtud de (34, V, VI), las figuras derivadas de una figura, corresponden a las cadenas derivadas del mismo orden de la cadena a que pertenecen los sistemas que la definen, y recíprocamente. Pero, (34, VIII y IX), a sistemas subordinados contiguos corresponden pares de cadenas asociadas y viceversa. Por lo tanto, dos figuras derivadas de primer orden de una misma figura de sistemas de característica $h > 1$, son *contiguas en ella*, si las correspondientes cadenas derivadas son asociadas en la cadena a que pertenecen dichos sistemas.

De (36, X) se tiene directamente:

VII) *En dos figuras pertenecientes a la misma forma, a cada par de figuras contiguas en una de ellas corresponde un par de figuras también contiguas en la otra. Dichos pares homólogos, pertenecen, a su vez, cada uno, a una misma forma.*

Este teorema asegura que el concepto de forma definido aquí por abstracción coincide con la imagen intuitiva que tenemos de dicha noción, puesto que conserva la contigüidad de los elementos del contorno en las figuras que pertenecen a una misma forma.

Los criterios generales de igualdad de cadenas dados en (37), corresponden, en virtud de las precedentes consideraciones, a otros tantos criterios generales relativos a la forma de las figuras.

Recordando (22 Obs.) y (30 Obs.) que una permanencia regular o singular de orden $h > 0$, corresponde también geométricamente a un ángulo poliedro de un espacio euclídeo de puntos de h dimensiones y que la igualdad de ellas se reduce, (36), a la de sus respectivas cadenas componentes, o secciones completas, resulta:

VIII) *Dos ángulos poliedros de la misma dimensión* $n \geq h > 1$ *pertenecen a una misma forma de h dimensiones si las figuras de sus respectivas secciones completas pertenecen, a su vez, a una misma forma de* $h - 1$ *dimensiones.*

En particular, de (36, VI) resulta inmediatamente que:

IX) *Los ángulos poliedros de* $n \geq h > 1$ *dimensiones formados por h hiperplanos pertenecen a una misma forma de* $h - 1$ *dimensiones.*

Puesto que los vértices de una figura poliédrica convexa de h dimensiones corresponden, o bien a ángulos poiledros formados por h hiperplanos o bien, para $h > 2$, a ángulos poliedros formados por más de h hiperplanos, caso singular, convendremos en decir que dos vértices de sendos poliedros convexos de h dimensiones *pertenecen a la misma forma,* si tal ocurre con los respectivos ángulos poliedros, (VIII), de los cuales ellos forman parte en las mencionadas figuras.

Los dos criterios generales de igualdad dados en (37), se expresarán, pues, en lenguaje geométrico como sigue:

X) *Dos figuras poliédricas convexas de igual dimensión* $n \geq h$ *pertenecen a la misma forma de h dimensiones si se verifican, a la vez, las tres condiciones siguientes:*

a) a cada vértice de una forma F *en una de ellas, corresponde un vértice perteneciente a la misma forma* F *en la otra;*

b) a cada cara de una forma Φ*, de* $h - 1$ *dimensiones, en una de ellas, corresponde una cara perteneciente a la misma forma* Φ*, en la otra;*

c) si dos caras en una de ellas son contiguas a una tercera, sus correspondientes también son contiguas a una misma cara en la otra.

Se obtiene el correspondiente al (37, II), sustituyendo en este último, la condición *c*) por la siguiente:

c′) Si dos caras son contiguas en una de ellas, sus correspondientes también son contiguas en la otra.

Se logra abreviar el enunciado de ambos teoremas condensándolos en uno solo, si se conviene en que las condiciones *a*), *c*) y *c′*) signifiquen: *caras igualmente dispuestas.*

Entonces:

XI) *Dos figuras poliédricas convexas de una misma dimensión* $n \geq h$*, pertenecen a una misma forma de h dimensiones, si sus caras*

están igualmente dispuestas, y si a cada cara en una de ellas, perteneciente a una forma Φ, corresponde una cara en la otra que pertenece también a Φ.

Este teorema es análogo al teorema métrico de CAUCHY para dos poliedros convexos del espacio ordinario.

39. **El problema de Steiner.** — El problema de STEINER, para el espacio ordinario, puede enunciarse, ahora, con toda claridad. En su forma más general posible es el siguiente:

1. *¿Cuántas formas poliédricas convexas tridimensionales hay, de dada clase?*

Este problema debe considerarse resuelto en toda su generalidad. Bastará obtener, (26, VI), y (33, V), todas las cadenas ternarias regulares y singulares de clase igual a la dada. Son en número finito. Hay tantas formas ternarias de la dada clase, como cadenas distintas entre sí, (36), hay en el conjunto así obtenido.

Es claro que si sólo se piden los poliedros convexos tridimensionales de m caras, bastará considerar, (32), cadenas cerradas en el espacio E_3 métrico. Si en cambio se piden las figuras poliédricas cualesquiera de E_3, bastará considerar, (25), cadenas cerradas correspondientes a figuras en el espacio arguesiano E'_3. El problema es el mismo (1).

La generalización del problema de STEINER a cualquier espacio euclídeo E_h es la siguiente:

2. *¿Cuántas formas poliédricas convexas de h dimensiones y de clase m hay?*

También este problema debe considerarse resuelto en toda su generalidad. Bastará obtener, (26, VI), y (33, V), todas las cadenas regulares y singulares de orden h y de clase m. Hay tantas formas como cadenas distintas en el conjunto así obtenido.

Es ésta, como se ve, una solución constructiva, por cuanto es preciso obtener, previamente, cada una de las cadenas. En cuanto al cálculo directo del número, no creemos que sea, en general, una cuestión fácil, salvo, quizás, en casos particulares. De todas maneras, el análisis que precede pone claramente de manifiesto la naturaleza francamente *combinatoria* del problema.

En virtud de (25, V) y de (33, V), el estudio de esta interesantísima cuestión puede reducirse al caso de las cadenas regulares cerradas.

(1) Una obra muy moderna que trata de los poliedros ordinarios es la intitulada: *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder* de E. STEINITZ y H. RADEMACHER. Berlin - Julius Springer - 1934.

Para los espacios *uni* y *bi-dimensionales*, la respuesta al problema es inmediata y está dada por los teoremas (38, III y V).

40. **Formas polares recíprocas.** — Consideremos el conjunto de todas las cadenas iguales entre sí que definen (38), una misma forma de dimensión h y de clase m y sea $\mathcal{C}_h(m, n)$ una de ellas, siendo n cualquier número no menor que h. Según que se interpreten, (5), en los sistemas, $S_h(m, n)$ que pertenecen, (32, IV), a dichas cadenas, sus ecuaciones (5.1), ya sea como hiperplanos o como puntos de un espacio arguesiano, obtendremos, respectivamente, sistemas $S_h(m, n)$ o sus duales $S'_h(m, n)$; y, (8), correspondientemente a éstos, figuras también duales, cada una de las cuales pertenece, a su vez, a sendas formas $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ que se llamarán también *formas duales*.

Así, pues:

I) *Cada cadena* $\mathcal{C}_h(m, n)$ *y todas las iguales a ella definen una misma forma poliédrica convexa* $\mathcal{F}$, *y también la forma poliédrica convexa dual* $\mathcal{F}'$.

Como, (5), de cada región definida por cada uno de los sistemas $S_h(m, n)$ se pasa a la de los duales, $S'_h(m, n)$, por medio de una polaridad y recíprocamente, tanto las correspondientes figuras como sus formas $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ se dicen también *polares recíprocas*.

Este doble significado de una misma cadena y de todas las cadenas iguales a ella, está, pues, supeditado a la interpretación geométrica que se dé, en cada caso, de las filas que las forman. Si éstas se interpretan como hiperplanos, las permanencias de la cadena representan los *vértices* de las correspondientes figuras. Si, en cambio, se interpretan como puntos, las permanencias representan las *caras*.

41. **Extensión del concepto de figura poliédrica convexa.** — Es posible generalizar el concepto de figura poliédrica convexa, considerando regiones limitadas por hipersuperficies de Jordan en recintos abiertos, en los cuales el segmento está sustituído por un conveniente arco de curva de Jordan, ya que la convexidad no es una propiedad intrínseca de la figura, sino una propiedad ambiente.

Consideremos un sistema de $n > 1$ ecuaciones

$$f_j(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_n, x_j) = 0, \qquad [41.1]$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n)$$

de modo que él defina una transformación homeomórfica cualquiera, de todo el espacio E_n de coordenadas cartesianas x_j del intervalo

$(-\infty, +\infty)$, en un recinto abierto R_n de coordenadas cartesianas ξ_j, el cual puede ser, a su vez, todo el espacio; por ejemplo:

$$\xi_j^3 - x_j = 0 \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Todo sistema normal de m inecuaciones lineales, cuando es compatible, entre los valores x_j:

$$a_{i1}\, x_1 + \ldots + a_{ij}\, x_j + \ldots + a_{in}\, x_n + c_i > 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, m),$$

define, en el recinto R_n de exietencia de las funciones

$$x_j = \varphi_j\,(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

un conjunto de puntos que puede considerarse *convexo*, con respecto a dicho recinto. Tal conjunto está limitado, en R_n, por las n hipersuperficies simples de JORDAN, cada una de las cuales es homeomorfa al correspondiente hiperplano del sistema precedente.

Para justificar tal generalización, basta observar que a todo segmento

$$x_j = x_j^0 + \lambda\,(x_j^1 - x_j^0),$$

$$0 \leq \lambda \leq 1$$

de extremos (x_j^0, x_j^1), en E_n, corresponde en R_n, un arco simple de curva de JORDAN, pues, se tiene en [41.1],

$$f_j\,(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, x_j^0 + \lambda\,(x_j^1 - x_j^0)) = 0\,.$$

De donde, en virtud de las hipótesis hechas,

$$\xi_j = \psi_j\,(\lambda) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

En base a esto, es inmediato que en el R_n se verifican las proposiciones (2, I, II, III), sobre las cuales se basa la convexidad.

Para abreviar, diremos que las infinitas variedades de JORDAN, dadas por las n funciones del sistema [41.1], constituyen un *reticulado natural* del recinto R_n.

Demostraremos, ahora que:

I) *En todo recinto R_n, limitado por una variedad simple y cerrada de* JORDAN, M_{n-1}, *de* $n - 1 > 0$ *dimensiones, existe un reticulado natural.*

En efecto, en tal hipótesis, el recinto abierto R_n, es decir, el interior, es homeomorfo al interior de un recinto hipercúbico C_n de n dimensiones de E_n. Sea dicho hipercubo el que tiene arista igual a *2* y centro en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas, $O(y_1, y_2, \ldots, y_j, \ldots, y_n)$ de E_n. Si Ω, es el homeomorfismo que transforma R_n en C_n, las coordenadas cartesianas $O'(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_n)$ de los puntos de R_n son funciones de la forma

$$f_j(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, y_j) = 0, \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

las que, por definir un homeomorfismo, cumplen las mismas condiciones que las [41.1], siendo en este caso $-1 < y_j < 1$.

Pero, mediante un nuevo homeomorfismo que transforme todo el intervalo abierto $(-1, +1)$ en el intervalo $(-\infty, +\infty)$, por ejemplo:

$$x_j = \frac{y_j}{1 - |y_j|} \quad \therefore \quad y_j = \frac{x_j}{1 + |x_j|},$$

se logra que las n funciones

$$f_j\left(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_n \frac{x_j}{1 + |x_j|}\right) \equiv F_j(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_n, x_j) = 0, \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

definan, en R_n, un reticulado natural.

Es claro que a tales figuras de R_n les es aplicable también el concepto de cadena, el de forma, etc., y valen, para ellas, todas las propiedades de aquéllas, dentro del recinto a que pertenecen las correspondientes figuras.

En cuanto a la forma, ella es *invariante* en tales tipos de homeomorfismos, puesto que sólo depende de la cadena.

FIN DE LA PRIMERA PARTE

SOBRE EJEMPLARES JUVENILES DEL GÉNERO «SCELIDOTHERIUM»

POR

CARLOS RUSCONI

I

Aun cuando son muchísimos los hallazgos de restos fósiles de nuestros grandes desdentados extinguidos, muy pocas son, en cambio, las noticias que se tienen con respecto a los descubrimientos de individuos sea recién nacidos o de estado intrauterino. Este hecho se explica en parte, debido a que a esa edad el hueso tiene poca consistencia y está desprovisto de la gran cantidad de calcio como se manifiesta este último en los individuos adultos, cuyo elemento, como se sabe, permite preservar más al hueso. Solamente pudieron conservarse aquellos esqueletos o parte de los mismos de individuos que, al morir, quedaron luego inmediatamente sepultados en fangos lagunares o en terrenos que bajo circunstancias especiales impidieron el proceso rápido de la destrucción ósea. Por lo menos así parece haber ocurrido con diversos despojos observados hace años en el Museo, mas casi todos los restos que forman parte de la colección Rusconi, y son estos últimos también los que motivan las presentes líneas. Los dibujos son del autor.

II

Trátase, en efecto, de cuatro porciones mandibulares pertenecientes a distintos individuos y procedentes del piso ensenadense, a saber:

Nº 1150 de la colección paleontológica Rusconi. Porción mandibular del lado izquierdo con los cuatro dientes bien conservados de un individuo que si no es nonato por lo menos tiene características del recién nacido; fué hallado frente a la estación J. Anchorena.

Nº 1105, de la colección Rusconi. Porción mandibular del lado

izquierdo con restos de los dos primeros dientes y gran parte de la sínfisis de un individuo juvenil pero de algo más edad que el anterior; fué hallado también frente a la estación Anchorena [1].

Nº 19 de la colección Rusconi. Porción mandibular del lado izquierdo con los cuatro dientes aunque el último deteriorado en la corona; procede de Olivos.

Nº 233 de la colección Rusconi. Porción mandibular del lado derecho con los cuatro dientes bien conservados; otra del lado izquierdo con los tres primeros dientes, escápula, costillas, etc., todos de un mismo individuo joven-adulto, y un poco más avanzado en edad que el anterior. Procede de terreno loesoide pardo claro de los arrecifes del río frente a la estación Olivos.

Los tres primeros restos tienen una coloración gris verdosa y sus intersticios están llenos del mismo conglomerado calcáreo sumamente duro en que yacían. En estos bancos calcáreos — que son depósitos de antiguas lagunas — los huesos se encuentran generalmente bien conservados, pero, a veces, resulta dificultoso poderlos extraer de esa matriz durísima. Sólo la erosión del agua, que, actuando constantemente sobre dicha superficie calcárea, los va sacando lentamente, sin destruirles, en ciertos casos, ni los más insignificantes detalles óseos. Y es en esos mismos terrenos, sea dicho de paso, donde han sido posibles los hallazgos de la mayor parte de los huesos de poca consistencia (reptiles, aves, batracios, etc.) de la época ensenadense, algunos de los cuales los he dado a conocer en otras publicaciones (véase Rusconi, 1936 y 1937).

III

Mandíbula. — La mandíbula Nº 1150 se conserva desde el conducto dental anterior o sinfisiano hasta el conducto posterior situado detrás del último molar. Vista de arriba (fig. 1) la rama muestra una línea bastante recta advirtiéndose tan sólo una débil constricción en la zona sinfisiana; en la mandíbula nº 1105 se manifiesta ya una mayor torsión hacia la línea medial siendo mucho más acentuada en los individuos adultos.

En su vista lateral externa (fig. 2), la rama presenta una superficie más convexa al nivel de las raíces de los dos dientes centrales que sigue hacia atrás y arriba coincidiendo con la raíz de la rama ascendente. En la parte anterior de la pieza y en el borde de la rotura

[1] Quédole muy agradecido al señor Oscar Román por la donación de esta pieza.

aparece el agujero mentoniano que tiene casi 3 milímetros de diámetro; otro se encuentra en la mitad de la altura de la rama y en la cara anterior el primer diente. El agujero dental posterior está parcialmente roto, tiene 4 milímetros de diámetro y se encuentra detrás del último diente. La distancia que media entre ambos agujeros principales es de 75 milímetros, mientras que en las formas adultas pasa de los 180 milímetros.

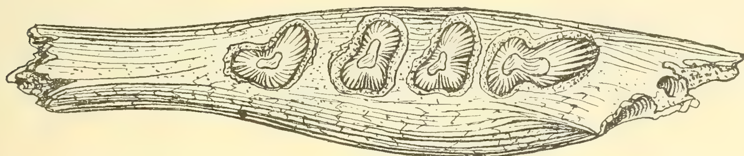


FIG. 1. — Mandíbula del lado izquierdo de un individuo juvenil de *Scelidotherium ?Bravardi*, Nº 1150, en tamaño natural.

Una particularidad interesante es, por ejemplo, la estructura ósea en los diferentes estadios de su evolución ontogenética. Pues, en el animal nonato nº 1150, la superficie muestra un aspecto escamoso dando la impresión de estar constituído el hueso de numerosas laminillas superpuestas, asemejándose en cierto modo a un tronco de árbol viejo en el que la intemperie lo ha rebajado perpendicularmente dejando ver sus círculos anuales en forma irregular. En los individuos de mayor edad (fig. 4, nº 19 y 233), el hueso presenta parcialmente esa estructura, ofreciendo el resto una superficie de aspecto poroso.

Dentadura. — Como se sabe, casi la totalidad de nuestros desdentados extinguidos pilosos (*Megatherium, Lestodon*, etc.) y los provistos de coraza (*Glyptodon, Sclerocalyptus*, etc.) presentaban en su estado juvenil o recién nacidos dientes de figura cónica. Y en las mandíbulas de los celidoterios ocurre lo mismo. La parte superior de la corona tiene el aspecto de un cono de superficie lateral sensiblemente convexa en el extremo superior y casi aplanada en el resto del diente. Además, las superficies de trituración no están dispuestas horizontalmente y describen distintas figuras, siendo triangular en los primeros y en forma de un « 8 » en el último. Esta figura es más regular en la cúspide que en la raíz, pero con la edad ella se va modificando debido a la sensible torsión que sufre en todo su recorrido el lóbulo posterior del cuarto diente. También el primer diente sufre una pequeña modificación a través de su desarrollo ontogénico,

pues, en los individuos juveniles el referido órgano describe la sección de un triángulo más regular mientras que en los adultos el triángulo tiene una de las caras mucho más ancha, tendiendo hacia la forma elíptica, cuya base está situada hacia la línea medial. Los dientes de los celidoterios juveniles tienen también una gran cavidad para la pulpa dental, pero ella se reducía con el crecimiento de la vasidentina que se operaba con el progresivo desarrollo del individuo. Por otra parte, es digno de hacer notar que en los órganos juveniles la capa de dentina estaba recubierta, a veces parcialmente, por una cutícula sumamente delgada de cemento, mientras que en los individuos adultos aumentaba hasta más de un milímetro de espesor.

IV

Crecimiento dental. — Sabido es también que los dientes de los desdentados extinguidos eran de crecimiento continuo, esto es, que tan pronto desgastaban su corona, la raíz reponía los elementos indispensables para mantener de ese modo el nivel adecuado a los efectos de la masticación.

En lcs megaterios, según Kraglievich, ese movimiento de trituración, desgaste mecánico y reposición dental, era muy grande, habiendo calculado que si en un megaterio se le hubiera desplazado un diente desde su primera edad y no se habría gastado nunca, ese órgano hubiese crecido indefinidamente hasta alcanzar varios metros de longitud.

En los celidoterios no debió ser tan grande ese crecimiento, pero es indudable que ha existido el referido fenómeno. En el ejemplar nº 1150, los dientes tienen una longitud que oscila entre 23 y 25 milímetros medidos por el lado externo; en el ejemplar 19 es de 44 a 50, y en los adultos alcanzaban más de 100 milímetros. Burmeister (1879, p. 327), ha dado las medidas de algunos ejemplares que según él « habían pasado apenas del primer año » de vida, y que la longitud de los dientes era de 2 $^1/_2$ pulgada (57 milímteros), lo que demuestra que tenían ellos más edad que el ejemplar nº 19 pero quizá comparable al nº 233, ya recordado más arriba.

De acuerdo a los cálculos efectuados sobre diferentes mandíbulas pertenecientes a individuos de distintas edades, he llegado a la conclusión que los celidoterios adultos para que sus dientes alcanzaran la forma y diámetro máximo tanto en la extremidad coronal como en la raíz, deben haber tenido un crecimiento de más de 50 centímetros, de los cuales, 40 centímetros han desaparecido con la mas-

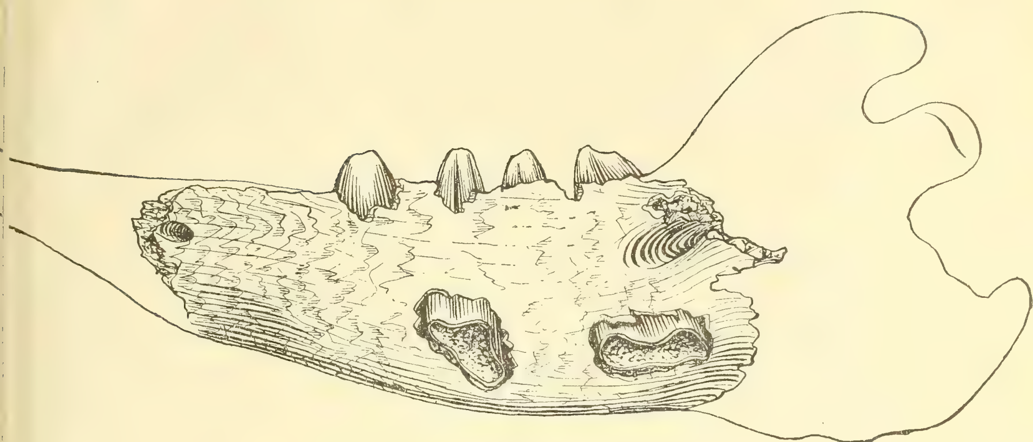


Fig. 2. — La misma mandíbula N° 1150, reconstruída en tam. nat.



Fig. 3. — Reconstrucción de la mandíbula de *Scelidotherium Bravardi*, ejemplar juvenil.
Fig. 4. — Reconstrucción de otra mandíbula de un individuo joven - adulto.
Fig. 5. — Mandíbula de un individuo adulto; todas reducidas a 1/3 del natural.

ticación. Tal magnitud implica, desde luego, una actividad extraordinaria en los órganos encargados de llevar los elementos indispensables a la formación de la dentina y vasidentina, motivada, sobre todo, por el continuado proceso masticatriz a que han sido sometidas las coronas durante la vida del animal.

V

Edad de los especímenes. — Un problema del que pocos se han preocupado es el que se refiere a la probable longevidad individual de nuestros desdentados extinguidos. Cierto es que todo cuanto se refiera a este punto siempre estará rodeado de conjeturas, quizá unas más viables que otras, y la edad que se le atribuye, aun cuando ella sea basada en otros términos de comparación, estará igualmente sujeta a simples cálculos sobre todos si los especímenes examinados muestran ya indicios evidentes del desgaste producido por la masticación, como es el caso de los ejemplares nº 19, fig. 4, y nº 233.

Muy distintamente ocurre con la pieza nº 1150; pues, examinando la punta de los dientes, se advierte un pequeño desgaste que no es horizontal a la dentadura sino dispuestos en distintos planos. Dicho detalle es muy visible en el último diente, que muestra dos superficies siendo una bastante cóncava. Y tales características unidas a la morfología dental me permiten adelantar también dos hipótesis, a saber:

1º Que la pieza nº 1150 puede haber pertenecido a un animal nonato, y que el desgaste coronal se habría operado en su vida intrauterina.

2º Que correspondería a un animal recién nacido, en estado de lactancia, y su desgaste se habría producido por simple frote durante los primeros tiempos de su vida extrauterina.

El primer caso implicaría suponer que el animal en su vida intrauterina realizaba ya movimientos de su mandíbula en sentido lateral y de adelante hacia atrás simplemente por presión de sus músculos correspondientes. Este fenómeno fisiomecánico se advierte con alguna frecuencia en diversos grupos de animales, en especial sobre aquellos cuyos dientes son de crecimiento continuo y que han llegado a un grado de especialización muy avanzado en el sentido de su rápida irrupción dental. Tales ejemplos se observan en nuestras cavias (*Cavia pamparum*, etc.); en los carpinchos (*Hydrochoerus hydro-*

choeris), etc., y sobre estos últimos he tenido oportunidad de seguir las modificaciones que sufre su serie molar habiéndome demostrado que los individuos nonatos o fetos a término, presentan ya un acentuado desgaste en los primeros y a veces hasta en el último diente tanto del maxilar como de la mandíbula, como tendré oportunidad de ocuparme sobre el particular oportunamente.

El segundo caso consistiría en suponer que los celidoterios comenzaban a desgastar la corona dental en los primeros tiempos del nacimiento y cuando se encontraban aún en período de lactancia, y a cuya hipótesis prefiero adherirme.

Sea como fuere, el hecho es que la mandíbula en cuestión tiene que haber pertenecido a un animal sumamente juvenil, y es uno de los más jóvenes individuos que he tenido oportunidad de examinar de los numerosos ejemplares pertenecientes a especies del pampeano inferior como del pampeano superior.

La pieza en cuestión ofrece, asimismo, interés con respecto a ciertos aspectos de la evolución ontogenética de los celidoterios y permite ser utilizada como término de comparación para conocer no sólo las diferencias volumétricas mandibulares y craneanas sino también el volumen del cuerpo en sus respectivos estadios.

Ahora bien, si un celidoterio adulto mide alrededor de los 3,50 metros de longitud desde el hocico a la punta de la cola, por 1,30 de altura en la cruz, entonces un recién nacido debió tener 1 metro de longitud por unos 35 centímetros de alto, aproximadamente, esto es, de un tamaño más o menos parecido al de un carpincho no muy bien desarrollado

Las reconstrucciones de las mandíbulas juveniles han sido basadas de acuerdo a la mandíbula de *Scelidotherium Bravardi* dada por Ameghino en 1889 (lám. XLVIII, fig. 2), debido a que es la especie más común en el piso ensenadense, y además, que las mandíbulas juveniles parecen corresponder también a esta especie. Demás estará decir que las partes reconstruídas tienen un valor relativo, y bien podría ocurrir que tanto la rama ascendente como su cóndilo hayan sido más bajos en los individuos jóvenes, pero que estos pequeños detalles no tienen para el caso mucha importancia desde el momento que la reconstrucción ha sido hecha con el objeto de ofrecer al lector una idea más clara con respecto a las proporciones entre un espécimen nonato (fig. 3) con otro joven-adulto (fig. 4) y con otro adulto (fig. 5).

Medida de las mandíbulas de *Scelidotherium Bravardi*, en milímetros

	Nº 1150 Col. Rusc.	Nº 19 Col. Rusc.	Nº 233 Col. Rusc.	Según Amegh.1889
Diámetro anteroposterior oblicuo del primer diente, en la superficie masticatoria	3,5	12,3	14	—
Longitud total (corona-raíz)	23	44, ap.	—	—
Diámetro anteroposterior del segundo diente	3,5	12	15	—
Longitud total (corona-raíz)	25	50	—	—
Diámetro anteroposterior del tercer diente	3	12	15,5	—
Longitud total (corona-raíz)	25	50	—	—
Diámetro anteroposterior del cuarto diente	6	17	19	—
Longitud total (corona-raíz)	26	48	—	—
Espacio ocupado por los cuatro dientes en la corona	38	60	64	100, ap.
Alto de la mandíbula al nivel del segundo diente	31	61	—	—
Espesor de la rama al mismo nivel . .	17	28	29	—
Longitud mandibular total (reconstruída).	155, ap.	290, ap.	—	400, ap.

Nota: ap., medida aproximada.

BIBLIOGRAFÍA

AMEGHINO, F. *Contribución al conocimiento de los mamíferos fósiles de la República Argentina*, en *Actas de la Academia Nacional de Ciencias en Córdoba*, vol. VI, Buenos Aires, 1889.

BURMEISTER, G. *Description Physique*, vol. III, Buenos Aires, 1879.

RUSCONI, C. *Distribución de los vertebrados fósiles del piso ensenadense*, en *Bol. de la Acad. Nac. de Ciencias en Córdoba*, vol. XXXIII, pp. 183-215, Buenos Aires, 1936.

RUSCONI, C. *Contribución al conocimiento de la geología de la ciudad de Buenos Aires y sus alrededores y referencia de su fauna*, en *Actas de la Academia Nacional de Ciencias en Córboba*, vol. X, pp. 177-384, Buenos Aires, 1937.

ALGUNOS APUNTES SOBRE LA PRODUCCIÓN DEL ANHIDRIDO CARBÓNICO ANTROPÓGENO

Por el Dr. WALTER KNOCHE
(De la Dirección de Meteorología)

Los datos que da al respecto V. M. Goldschmidt [1] son verdaderamente notables. Según éstos, existen en las plantas terrestres 0,2 gr. de CO_2, en la atmósfera 0,4 gr. y en el humus 1,4 gr. de CO_2 por unidad de peso. De manera que el humus contiene una séptupla del anhidrido carbónico de la vegetación y la triple o hasta la cuádruple del de la atmósfera.

Los incendios [2], ciertas formas de la agricultura, el pastoreo de los animales, en suma la acción del hombre, tienen una influencia destructora casi mayor sobre la capa de humus que la que ejercen sobre la vegetación. Esta influencia se intensifica aún más con la destrucción de bosques que de praderas. Maclagan Gorrie [3] estima en cuatro veces mayor el valor de la erosión del suelo por el agua, aunque se trate de una precipitación de igual fuerza, con relación a un terreno cubierto por un bosque de robles. Este valor aumenta de 3-4000 veces más en los desiertos y en los cultivos de algodón. En algunas chacras (Estados Unidos), la pérdida de terreno llegó por año a 25-30 t. por Ha.

El proceso de carbonización, sumamente lento y permanente, se transforma, por el hombre, en proceso repentino y temporario.

(En el humus se verifica, además, según Godschmidt, un enriquecimiento especial de elementos raros considerados hoy, fisiológicamente, muy importantes, como ciertos metales, el berilo, escandio, manganeso, níquel, cobalto, plomo, etc. Estos, concentrados, finalmente, son llevados en parte, después de una estadía temporaria en la atmósfera, como la mayoría de las suspensiones atmosféricas, al océano. No entramos aquí en detalles sobre las posibles consecuencias biológicas de tales intervenciones antropógenas).

En todo caso debe haber disminuído de un modo extraordinario la cantidad total del CO_2 contenida en las plantas campestres y en

el humus, después de haber entrado en actuación el « homo sapiens ».

Podemos suponer que al terminar la época glacial, toda la tierra, prácticamente, con excepción de las regiones polares y de la tundra subártica, como asimismo las regiones de los bosques más arriba del límite de altura sobre el nivel del mar, estaban cubiertas con selvas, las que se transformaban en parte en erófilas debido a la creciente sequía. Solamente en medida muy reducida, por causas climáticas planetarias, se efectuó una transformación del bosque en estepa. Sin duda fué el hombre quien tuvo la participación mayor en la destrucción de las selvas. También las pequeñas tribus, ya sea cazando y más tarde como nómades, contribuían a destruir la vegetación con incendios originados por descuido o por intención. Comparada con la que se registra en la estepa hay muy poca caza en los bosques. El cazador lo debe haber observado, y por eso contribuyó, seguramente en el principio de su actuación, por la destrucción de los árboles, a la multiplicación de los animales de caza, en cantidad superior a sus exigencias. Recién más tarde, en tiempos históricos relativamente cercanos, se observa un aumento enorme de los animales domésticos, paralelo a un aumento acelerado de la humanidad.

En todo caso, la Europa Central, Sud, Oeste y Este, tan pobre en bosques, representa un cuadro de esta transformación. Su destrucción en el último decenio ha hecho progresos inquietantes hasta en el Norte de Europa (Rusia Europea) comparados con la replantación. Casi toda la China estaba cubierta de bosques antes de ser habitada por el hombre, lo mismo la India y los Continentes de Norte y Sudamérica. Schmieder opina, y con razón, que la pampa argentina había estado cubierta con árboles que fueron destruídos por los indios; yo creo que el despoblado Matto Grosso (bosque espeso) se ha transformado recién en los últimos siglos en estepa debido a incendios intencionales ([4]). Del mismo modo puede explicarse la formación de los campos amazónicos.

Africa posee hoy en los bosques sobre las costas del oeste, como asimismo en el bosque virgen de la región central del Congo, solamente un pequeño porcentaje de su vegetación primitiva. Anualmente se extiende la sabana del Sudán en tres kilómetros desde el noreste y este, hacia la costa, mientras que del lado del Atlántico se aumenta más y más el terreno que ocupan las grandes haciendas industriales. De manera que aquí se produce una rápida disminución de la vegetación. Al mismo tiempo, no hay que olvidar que el Sudán

que constantemente está absorbido desde el norte por el Sahara es, en su mayor parte, obra del hombre (5).

Sin duda, éste ha destruído ya en regiones vastas la capa de humus, y por consiguiente su contenido de CO_2, igualmente que el CO_2 de la vegetación, el que con relación a los bosques, es mucho mayor que el de las praderas, campos, sabanas o estepas. Estas últimas se han transformado en parte (principalmente por procesos antropógenos) en estepas-desiertas o desiertos. Debe agregarse al contenido de CO_2 (o de C) de la vegetación total, su proceso de respiración. La masa asimilativa del CO_2 ha ido disminuyendo continuamente y de un modo extraordinario desde la aparición del « homo sapiens », y sigue constantemente en disminución, mientras que, por el contrario, la masa de CO_2 (en su mayoría antropógena) sigue aumentando. Muy interesante es la cuestión que se refiere a las cantidades de los distintos substratos que producen ácido carbónico:

1) La parte de CO_2 juvenil (20 millones de ton. por año) es insignificante en comparación con la producción antropógena (1/300-1/400). Es cierto que este proceso, que se realiza desde hace millones de años, desde la época terciaria, paulatinamente va en descenso.

2) El CO_2 producido por la actividad humana por orden de cantidad, proviene por año de 1 ½ mil millones de ton. de carbón de piedra consumido (industria, uso doméstico), y asciende a 4 mil millones de ton. de CO_2 que son llevados a la atmósfera. Esta cantidad corresponde a un resultado de carbonización equivalente a 400.000 años. Existen diferencias considerables en cuanto a la disposición geográfica y temporal de los incendios antropógenos. Las regiones industriales y las ciudades son, a igual que los volcanes, productores puntiformes de CO_2 (vapor de agua, hollín y ceniza) en comparación con las vastas regiones de incendios de vegetación. La combustión en la industria y la calefacción es un proceso continuo, mientras que la destrucción de la vegetación por el fuego ocurre solamente en tiempos de sequía, o, por lo menos, en periodos de sequía. Actualmente se encuentran los centros importantes de combustión industrial en regiones de precipitación repartidas con regularidad durante todo el año.

3) La cantidad adicional producida por la combustión de vegetación (bosque y estepa) puede valorarse por orden de cantidad, aparte de 30 a 40 millones de ton. de elementos sólidos y un millón de ton. de agua, en 3 o probablemente 4 mil millones de ton. de CO_2.

Se producen, pues, por año, por combustión antropógena, en números redondos, 8 mil millones de ton. de CO_2.

Debe observarse que en el curso de la historia humana, y en grado siempre ascendente, ha tenido mucha importancia desde hace 10 a 12 mil años la extirpación de los bosques por incendio, mientras que la combustión industrial casera, aumentando continuamente, cuenta con sólo 100 años. La extensión de los bosques desde hace 10.000 años, debe haberse reducido a una tercera parte.

Evidentemente, se presentan, de año en año, importantes fluctuaciones en la producción de los gases resultantes de la combustión y de las suspensiones de incendio (combustión casera, extirpación de bosques por el fuego).

4) A la participación en la producción del CO_2 se suma, gracias a la conquista de la superficie de la tierra por el hombre, el que es producido por la respiración de él mismo y sus animales domésticos. Desde la época glacial hasta hoy día ([6]), la cantidad de seres humanos aumentó de unos cientos de miles a 2100 millones, y de igual modo se multiplicaron sus animales domésticos. Y justamente este aumento del ganado es la causa de la *estepización.*

Si se calcula que el hombre que trabaja livianamente produce más o menos 1 kg. de CO_2, los animales domésticos, en su mitad ganado grande, m. o m. 2 kg. de CO_2 por cabeza en el mismo espacio de tiempo, resulta que casi el total de la producción es causada por el proceso de respiración de 2 a $2^1/_2$ mil millones de ton. de CO_2. No se incluye en este cálculo la respiración de las aves de corral y la fauna silvestre. El número de animales de caza ha disminuído fuertemente, en parte, pero en algunas regiones ha aumentado por influencia del hombre. Su proceso de vida no tiene importancia comparado con el de los animales domésticos.

En todo caso, sumando 2, 3 y 4 (sin contar la parte de la descomposición no valorizada del hombre, de los animales domésticos y de la vegetación cultivada), se realiza actualmente una producción de más de 10 mil millones de t. de CO_2 por año, producido por la actividad humana.

Si se tratara de sumar los valores de 2, 3 y 4, daría por orden de cantidad producida de CO_2, los siguientes valores: Si calculamos el promedio de la combustión industrial y doméstica de 100 años como $^1/_2$ mil millones de ton. de CO_2 por año, entonces resultaría un total de 50 mil millones de tno. de CO_2 producido industrialmente. Si calculamos por incendios de bosques y estepas un promedio anual de 1 mil millones de ton. en vez de los 4 mil millones de ton. de hoy, durante un espacio de tiempo de sólo 10.000 años, llegaríamos a un valor de 10 billones de ton. de CO_2. La suma total para 2 desaparece-

ría y con más razón la suma total para 3 (respiración humana y animal), aunque su participación es tan importante en los tiempos actuales.

El 98 % de estos 10 billones de ton. fueron llevados al océano: solamente el 2 % quedó en la atmósfera, es decir 200 mil millones de ton. El contenido de CO_2 en la atmósfera es de 2 billones de ton. Desde la aparición del « homo sapiens » debe haber entonces aumentado la cantidad del CO_2 en varios porcientos. Semejante transformación debe producir ciertos cambios climáticos (por ejemplo: alteración de la absorción actínica, aumento de calor, cambio del estado coloidal atmosférico). Este proceso del aumento del CO_2 en medida constantemente ascendente, formará progresivamente un cambio climático, aunque esto puede ser sobrepasado en sus consecuencias por influencias macroclimáticas (períodos climáticos atlánticos, continentales, calurosos, frescos, etc.); pero en todo caso existe.

Si volvemos atrás en la historia terrestre se presenta el siguiente proceso: En la época terciaria hay grandiosas exhalaciones juveniles de CO_2 por una actividad volcánica muy viva, luego una disminución del CO_2 juvenil hasta un cierto minimum; y después, desde la terminación de la última época glacial resp. pluvial, la producción antropógena de CO_2 aumenta, en gran escala, en los últimos 100 años.

Naturalmente, se le quita, según v. Hoefft, una correspondiente cantidad de oxígeno a la atmósfera, la que es llevada al océano ([7]). Pero como toma en cuenta sólo la combustión industrial, llega a un total de menos de 100 % de la determinada por mí. La suma total de la descomposición de las plantas, resp. la carbonización, ha disminuído constantemente debido a la destrucción de los bosques, y sigue disminuyendo. Además, son igualmente llevadas al océano las masas de C contenido en el humus por erosión. Esto ocurre aún en las zonas templadas, y más allá, en las zonas subpolares (Canadá).

Resumen total: Aumento de los océanos y disminución de la atmósfera y sus correspondientes consecuencias en un grado nada despreciable. La respiración de oxígeno de la bioesfera presenta una marcada disminución a causa de la vegetación destruída desde la aparición del « homo sapiens ».

Se puede hasta discutir « cum grano salis » si el hombre, ante todo el hombre fáustico, no priva lentamente a la tierra de su atmósfera, atmósfera formada, según Berg ([8]), en millones de años por la misma vida orgánica.

BIBLIOGRAFÍA

(1) V. M. GOLDESCHMIDT. *Drei Vortraege ueber Geochemie, Geologiska Föreningen,* Mai-Oktober 1934, p. 415-416.

(2) WALTER KNOCHE. *Der Einfluss von Vegetationsbränden auf die Witterung.* Met. Ztschr. H. 7. 1937, p. 244.

(3) B. MACLAGAN GORRIE. *The use and misuse of land.* Oxford Forestry Memoirs nº 19. Oxford Clarendon Press, 1935.

(4) W. KNOCHE. *Der Parana als Scheide zwischen Urwald und Savanne.* Ztschr. d. Ges. f. Erdk. z. Berlin. H. 7/8, 1928.

(5) WALTER KNOCHE. *Zur Entstehung der Wueste Sahara.* Forsch. u. Fortschr. 10. I. 1936, p. 24.

(6) E. FELS. *Der Mensch als Gestalter der Erde.* Leipzig, 1935.

(7) F. v. HOEFFT. *Zur Geochemie des Kohlenstoffs. Verh. d. geologischen Bundesanstalt.* Wien, 1936. Nr. 11, p. 722.

(8) *Zur Frage des Klimabegriffs. Meteorología i Hidrología.* Nr. 7, 1936, Moscú, p. 69. *Bespr. Ann d. Hydrogr.,* H. III, 1938, p. 142.

COTEJOS ECONÓMICOS Y SELECCION ECONÓMICA

POR EL ING. MAURICIO DURRIEU

(*Conclusión*)

89. — EL MONTO DE OPERACIONES O TRANSACCIONES. — Visible es que en el ejercicio de una empresa de hacienda y de capital dados, pueden ocurrir y ocurren de ordinario *transacciones* u *operaciones*, es decir, conmutaciones de valores con el mundo exterior, cuyo monto reunido difiere del caudal y del capital expresados. Es esto así, porque dentro de un período de tiempo renuévanse con frecuencia múltiples operaciones en las cuales se empeña parcialmente el caudal.

Dejando a un lado la acepción amplia de la expresión, que referiríase a operaciones tanto de compra como de venta, aceptaremos en lo sucesivo que el *monto de operaciones* o *transacciones* aluda exclusivamente a la cantidad pecuniaria a que ascienda la totalidad de las ventas (volumen de ventas) de productos efectuadas en determinado período (generalmente, anual).

No debe confundirse ese monto con el valor de la producción, porque de éste ocurre descartar la producción parcialmente retenida en fábrica u obrador o absorbida por necesidades de la empresa.

Por otra parte, y previa la exacta discriminación de las operaciones razonablemente computables, la determinación del monto de transacciones *neto* es la que interesa en materia de equiparaciones de ejercicios. Significa esto que no sólo debe computarse precisamente toda operación encuadrada en los fines corrientes de cada empresa, y que ocurre dentro del plazo de comparación, sino que se desestimarán todas aquellas operaciones accesorias que por versar sobre mercaderías u objetos que no sean *productos*, o circunstanciales que puedan no estar contenidas en los términos de otros valores de cotejo, constituirían factores de confusión o desigualdad.

Con bastante detalle y aclaración gráfica, explica el ingeniero Dr. Zeidler (op. cit., pág. 29) la formación del monto de operaciones que conviene considerar en los cotejos.

Son elementos aditivos:

a) Todas las operaciones de productos computadas con salidas efectuadas o de entrega postergada, y sus rectificaciones;

b) El monto total de productos utilizados por la propia empresa en su fábrica o talleres.

Elementos sustractivos, son:

c) Las ventas accesorias de mercaderías que no constituyen propiamente productos (combustible, víveres, etc., que sean partes de las existencias de la fábrica);

d) Los créditos correspondientes a diferencias de precios y cantidades y reservas, por rebajas de precios (exceptuadas las pérdidas extraordinarias, que han de asentarse en partidas especiales) y asimismo los fletes, derechos aduaneros e impuestos a la empresa;

e) Las comisiones, el impuesto sobre el monto de los negocios.

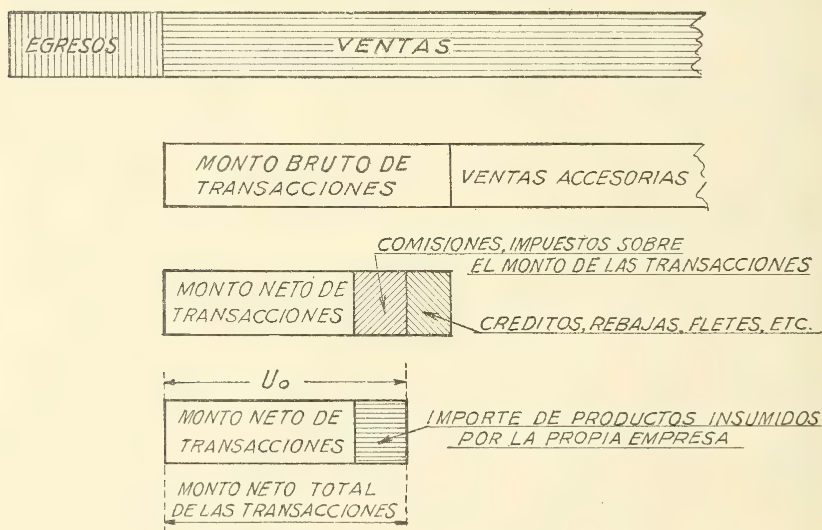


Fig. 2.

Restado (fig. 2) del importe total de *a*) el de *c*), queda el *monto bruto de transacciones.*

Deducidos de éste los importes reunidos correspondientes a *e*) y *d*), obtiénese el *monto neto de las transacciones*; mas, en rigor, a este monto neto débese incorporar el importe de *b*) para determinar

el *monto neto total de las transacciones* (1). A este último, le llamaremos U_0.

No se incluyen en el monto de transacciones los provechos accesorios y las ventas que no importan transacciones, como los provechos de valores de las instalaciones y de la administración, de ventas de recortes y desperdicios (por el contrario, hay un monto de operaciones en productos accesorios), y tampoco los ingresos por alquileres, negocio de las cantinas de los obradores, intereses por anticipos de fondos.

90. — Cifra de evoluciones o coeficiente de circulación. — La medida de la magnitud y celeridad con que empéñase el caudal activo de una empresa en las operaciones a que ésta se dedica, hállase dada mediante una *cifra de relación* que denominaremos *cifra de evoluciones*, u (2). Llamada H_e la hacienda de explotación, la relación

$$u = \frac{U_0}{H_e} \qquad [95]$$

significa evidentemente el número de veces que el caudal de explotación interviene en el monto neto de las operaciones de la industria.

Importa una calificación *unitaria* de las operaciones de la empresa (3) y brinda, a la vez que un elemento importantísimo de apreciación directa de la actividad de dicha empresa, un criterio que coadyuva en los arreglos de cuentas, el establecimiento de participaciones en las utilidades de cada ejercicio, la prevención del monto de transacciones, etc.

91. — Cotejos de relación global. — I. *Concepto de rendición: Rendición específica; cifras conexas.* — El valor determinante de un proceso económico en la industria privada, es su *rendición o utilidad específica*, cuya expresión general es

$$\text{Rendición específica} = \frac{\text{Ganancia}}{\text{Capital}} = R \qquad [96]$$

(1) Los alemanes desígnanle con las expresiones *der Gesamt-Netto-Umsatz* y *der Erlös.*

(2) En alemán *die Umschlagziffer.*

(3) Porque se refiere la totalidad líquida de operaciones a la unidad de caudal de explotación.

Cabe determinar los montos del numerador y del denominador del segundo miembro de manera bastante distinta, computando en ellos elementos y resultados del proceso económico que sin apartarse del concepto buscado de rendición, no significan lo mismo ni suministran, por relación, una invariable noción de la economía considerada.

El ingeniero Dr. Zeidler (op. et loc. cit.) indica tres maneras de expresión de la rendición específica.

Al darlas a conocer y explicarlas, ocurre aclarar conceptos relativos a la ganancia.

La *ganancia neta o líquida* (« der Reingewinn », en alemán) de una empresa industrial, derivada de su actividad completa, es consiguiente del mayor monto que ofrece el *producto general* o total (1) realizado en determinado plazo (un año, p. ej.) referido al gasto (2) total habido durante el mismo plazo. Esta ganancia incluye la parte accesoria en operaciones que no corresponden a la actividad propia de la empresa. Constituye la ganancia líquida así originada, un elemento que es relacionado corrientemente con el *capital nominal* (capital en acciones) de la empresa, con el propósito de conocer la *rendición financiera* (3) de ese capital, base usual de su empleo. Escribiremos de consiguiente, en primer lugar

$$\text{Rendición financiera} = R_1 = \frac{\text{Beneficio líquido anual}}{\text{Capital nominal}} \qquad [97]$$

cifra que podrá asimismo expresarse por ciento.

En otro orden de ideas, cuando nos interese averiguar la rendición específica de la empresa contemplando únicamente su *actividad propia*, estableceremos el *monto neto total de operaciones* y deduciremos de él la totalidad de los *costos* de elaboración (*costos objetivos de obtención* o más sencillamente *costos de obtención* (4), incluídos los montos de amortización de instalaciones e intereses), para hallar la ganancia del *fondo o monto de transacciones*. Dividiendo esta ganancia por el caudal total de explotación, obtendremos una nueva cifra de relación, a saber, la *rendición específica de explotación económica* (5):

$$R_2 = \frac{U_0 - S}{H_e} \qquad [98]$$

(1) En alemán, *der Ertrag*.
(2) » » , *der Aufwand*.
(3) » » , *die finanzielle Rentabilität*.
(4) » » , *die Selbstkosten*.
(5) » » , *die Betriebswirtschaftliche Rentabilität*.

Finalmente, cuando relacionemos la misma ganancia del monto de transacciones con el monto neto total de las transacciones, estableceremos una referencia *unitaria* de dicha ganancia, que prestará servicios en la equiparación de ejercicios. La fórmula será:

$$R_3 = \frac{U_0 - S}{U_0} = 1 - \frac{S}{U_0}. \qquad [99]$$

92. — Volvamos a la expresión [98]. Por ciento, como

$$\frac{r_2}{100} = \frac{R_2}{1},$$

$$r_2 = \frac{100\,(U_0 - S)}{H_e} \qquad [100]$$

Discriminando:

$$r_2 = 100\,\frac{U_0}{H_e} - 100\,\frac{S}{H_e} \qquad [101]$$

Hemos llamado

$$u = \frac{U_0}{H_e} \qquad [95]$$

y llamaremos *coeficiente de costos, s,* a

$$s = \frac{S}{H_e} \qquad [102]$$

Luego,

$$r_2 = 100\,(u - s) \qquad [103]$$

Este valor r_2—, o también R_2—, es un elemento de relación que acusa la ventaja de una explotación industrial. Cabe parangonarlo con otros valores del mismo origen, establecidos para una misma explotación o dos o más distintas.

Por sí mismo, significa ya que una empresa privada trabaja en condiciones tanto más favorables cuanto más a menudo se renueva la inversión de su caudal efectivo (o sea cuanto más se eleva u) y más se reduce, en vez, la razón de los costos de elaboración y despacho a dicho caudal (vale decir, cuanto menor resulta s).

Dividamos la [95] por la [102]. Obtendremos

$$w = \frac{\text{Monto total neto de operaciones}}{\text{Costos totales de obtención}} . \qquad [104]$$

A esta relación, se le da el nombre de *rendimiento económico*. A diferencia de los rendimientos técnicos, que siempre son menores que la unidad, el económico de toda empresa que trabaja con utilidades es siempre mayor que uno. El coeficiente de « Cargas de venta », es el valor recíproco de w (Mellerowicz, p. 295).

Como, además,

$$w = \frac{u}{s} = \frac{\text{Cifra de evoluciones}}{\text{Coeficiente de costos}} , \qquad [105]$$

debemos recordar que u y s hállanse supeditadas a la clase de la actividad económica de que emergen (comercio o fabricación; clase de comercio o de fabricación) y difieren fundamentalmente para varias maneras de actividad; p. ej., para formas distintas de fabricación. En consecuencia, sus valores no serán equiparables sino para actividades económicas análogas, o para una misma y sola.

Por otra parte, este valor incluye visiblemente una relación de inversiones que derivan de la actividad de las instalaciones industriales, y constituye un medio de considerar el aprovechamiento de esas instalaciones.

Para destacar mejor los conceptos, sigamos a Schulz-Mehrin (1), quien atribuye en primer lugar a una empresa *comercial* los valores

$$H_e = 20.000 \text{ \$} \quad ; \quad U_0 = 100.000 \text{ \$} \quad ; \quad S = 98.000 \text{ \$}$$

Es decir que

$$u = 5 \qquad ; \qquad s = 4{,}9$$

y por la [103]

$$r_2 = 100\,(5 - 4{,}9) = 10$$

así como por las [104] y [105]

$$w = \frac{100.000}{98.000} = \frac{5}{4{,}9} = 1{,}02.$$

(1) Revista *Maschinenbau*, artículo « Betriebsvergleiche »; t. 6; cuad. 8º; pág. 397. Berlín, Abril de 1927.

Sean, asimismo, para una empresa *industrial*

$$H_e = 100.000\ \$ \quad ; \quad U_0 = 120.000\ \$ \quad ; \quad S = 110.000\ \$$$

Entonces,

$$u = 1{,}20 \qquad ; \qquad s = 1{,}10$$

$$r_2 = 100\,(1{,}20 - 1{,}10) = 10$$

$$w = \frac{120.000}{110.000} = 1{,}09\,.$$

Las utilidades específicas porcentuales son iguales en las dos empresas, a pesar de la notable diferencia de los caudales empeñados. La causa emerge de la comparación de los valores de u y s.

Si en otra fábrica de igual producción que la precedente, obtiénense los siguientes valores:

$$H_e = 100.000\ \$ \ ; \ U_0 = 118.000\ \$ \ ; \ S = 105.000\ \$$$

$$u = 1{,}18 \qquad ; \qquad s = 1{,}05$$

$$r_2 = 100\,(1{,}18 - 1{,}05) = 13$$

$$w = \frac{118.000}{105.000} = 1{,}12\,.$$

A pesar de su menor monto de operaciones, la segunda fábrica rinde más que la primera, en razón de sus menores costos de producción. Los rendimientos económicos poco difieren, si bien es igualmente mayor el de la segunda empresa.

Las causas de estas diferencias son investigadas tras la obtención de las mismas, y podrán hallarse, v. gr., en una economía mayor de los costos de despacho en el segundo caso.

93. — Razonando acerca de la rendición o utilidad específica r_2, se observa que el requisito, acusado por las fórmulas [100] y [101], de que la prosperidad de una empresa se apoye en el mayor valor posible de u, tiene el mismo significado que el firme requisito moderno de alcanzar la *producción acelerada*, es decir, el apresuramiento mayor

posible de los suministros y de las elaboraciones, de una parte, y la salida (despacho o venta) pronta de los productos, sin recurrir a los acopios ni al almacenamiento. Estas dos condiciones no son igualmente fáciles de cumplir.

La aceleración de la producción está más en poder de la empresa que la del despacho, cuya marcha y desarrollo hallan un límite en la *capacidad de absorción* del mercado. Mas, contenida la salida de los productos, fuerza es regular por ella a la producción, puesto que los productos almacenados vinculan más capital a su producción y causan más costos por intereses que los productos en curso de elaboración. El aumento de H_e que con ello se origina (ver cuadro fig. 1) empequeñece el valor de u con más intensidad que la reducción de U_0 en la elaboración menos presurosa.

Denota asimismo claramente el primer término del segundo miembro de la [101], que el efecto antedicho prodúcese con la aceleración relativa a la hacienda total, y no cuando el apresuramiento pónese en la actividad que moviliza únicamente un caudal parcial: p. ej., el empeñado en la sola elaboración. Esta consideración no debe pasarse por alto.

94. — La rapidez o mejor *velocidad de la producción,* útil cifra de cotejo, exprésase mediante la relación

$$u_f = \frac{\text{Monto anual de los productos fabricados}}{\text{Caudal de elaboración}} \qquad [105\,a]$$

que introduce en el numerador la cantidad de los productos elaborados, en vez de toda la suma de valores contenidos en U_0. Esa cantidad es susceptible de dos apreciaciones:

una, en medida cuantitativa material, es decir, por pieza, kg, etc.;

otra, en dinero, que tiene sobre la primera la ventaja de hacer de u_f una cifra abstracta.

Para obtener el segundo resultado, serán aplicados a las cantidades en especie los costos de elaboración o ejecución; mas, si hubiese el propósito de equiparar la velocidad u_f con la cifra de evoluciones, u, la producción material anual será estimada por aplicación de los precios de venta, desde que en u, el monto de operaciones es igualmente contabilizado en precios de venta. Serán de estimarse, enton-

ces, los precios de venta que corresponderían a la parte de la producción no vendida aún al tiempo de realizar el cálculo.

Desde que u u u_f son cifras abstractas, cabe confrontarlas. Cuando a ello se procede y resulta

$$u < u_f ,$$

queda evidenciada una disparidad de marcha. Significa ésta que el despacho o salida de los productos no se desenvuelve en concordancia con la fabricación, y se buscarán los motivos que para ello existan, en procura de alcanzar la situación normal

$$u = u_f .$$

Como las economías en la elaboración y en la explotación, se fundamentan igualmente en la propiedad de los abastecimientos de materias primas y auxiliares y en el acierto de su manutención y distribución, cosas todas que deben hallarse reguladas en cuanto sea posible de antemano, esta consideración queda implícita en las precedentes. Puede modificar su manera de ser la perspectiva que alguna vez ocurre de alguna especulación con los materiales que no sean totalmente dedicados a la fabricación.

95. — El estudio relativo a la inversión de los materiales o materias de elaboración, puede también efectuarse separadamente. Conducirá, entonces, a una cifra característica de cotejo la relación que se establezca entre el valor de los materiales entregados a la elaboración y el capital insumido en la disponibilidad de los mismos.

El coeficiente valdrá

$$\frac{\text{Monto de los materiales en operación}}{\text{Capital invertido en la disponibilidad de materiales}} \qquad [106]$$

y evidentemente convendrá que resulte lo más grande posible.

96. — Como segunda exigencia principal para la prosperidad de una empresa, dedujimos que s debía ser mínimo. Concíbese que este resultado no puede derivar del aumento de H_e, porque esta cantidad es a la vez denominador de la [95], y u y s, entonces, disminuirían de consuno. Sólo cabrá, pues, reducir S, o sea los costos de obtención. Este resultado no se alcanzará discrecionalmente. Un

determinado monto de operaciones, señala una medida determinada para los costos, tanto para proveer los valores transmutados, o costos de producción (o explotación), como, por otra parte, para realizar el giro de los negocios, vale decir, para hacer frente a los costos del despacho. Ambos grupos de costos no pueden reducirse sino dentro de ciertos límites, en proporción al monto de operaciones.

Monto neto total de operaciones, entonces, caudal de explotación y costos de obtención, habrán de responder a las expresiones [100] y [101], y de relacionarse conforme a las mismas de manera que r_2, se torne máxima.

Señalado un monto para la hacienda H_e, la velocidad posible de la producción da la pauta del monto neto total anual de operaciones, U_0, y éste, a su vez, rige los costos, S.

Se advertirá que también el valor s, como antes lo manifestamos análogamente para w, expresa un aspecto de la actividad industrial en el que están contenidos los servicios prestados por las instalaciones, y suministra uno de los varios medios de apreciar la magnitud del aprovechamiento de éstas.

97. — La fórmula [101], pese al importante significado que asume en la economía industrial, no vincula sino tres factores fundamentales de ésta, que aun pueden resumirse a dos por sus caracteres, a saber; *hacienda; costos.* Nada destacan los términos de esa fórmula de las particularidades de esos factores en cada caso. Así, no consideran la relación entre los caudales fijo y circulante; ni la proporción en que se hallan, en los costos de obtención, los costos *de capital* y los *de elaboración* o *trabajo.*

Ya veremos, en lo sucesivo, que es posible obtener coeficientes de relación que contemplen estos y otros muchos aspectos de la economía de cada empresa, desdoblando en condición más amplia los términos de las expresiones [95] y [102].

98. — Ahora, y como una lógica prosecución del estudio general iniciado desde el número 91, ocupémonos de realzar la manera gráfica y analítica de considerar los cotejos económicos de relación de orden general, propiciada por el ingeniero Dr. F. Kreide, de Charlottemburgo (Maschinenbau, núm. cit.).

Cuando para una empresa industrial que cuente con más de un *ejercicio* de actividad, se construye (fig. 3) el gráfico que refiere los rendimientos económicos, w, a las cifras de evoluciones, u,

correspondientes, obtiénese una curva como la I, tan útil para la crítica de los propios y sucesivos ejercicios de aquella empresa, como para comparaciones con las similares de otras más. Esa curva, en efecto, contempla las variaciones que experimentan simultánea y

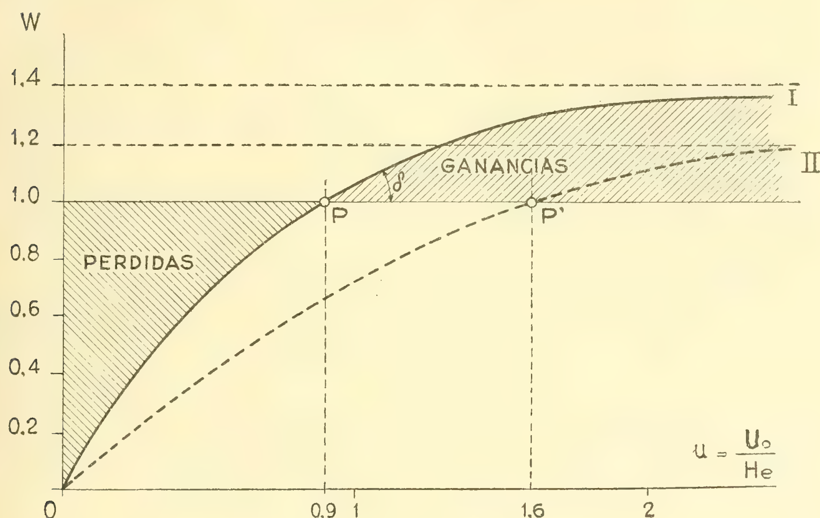


Fig. 3.

continuamente los valores de U_0, S y H_e, en atención a las relaciones que conocemos.

Desde que el valor

$$w = 1$$

establece el deslinde entre los ejercicios económicos con pérdidas y los que dan utilidades (n° 92), una curva como la I denota que la empresa a que se refiere entra en la zona de las ganancias cuando su cifra de evoluciones es

$$u = 0{,}9.$$

Las zonas de ganancias y de pérdidas, están rayadas en la figura. La posición del punto P constituye, pues, un elemento singular para la economía de aquella empresa.

Para otra empresa, se obtendrá por igual procedimiento la curva II, cuyo punto singular, P', corresponde a la abscisa $u = 1{,}6$. La empresa no opera visiblemente en condiciones económicas tan favorables como la anterior. Se averiguará a qué factores debe atribuirse esta situación.

Digno de notarse es que el cuociente diferencial

$$\frac{du}{dw} = \operatorname{cotg} \delta = \frac{\dfrac{U_0}{H_e}}{\dfrac{U_0}{S}} = \frac{S}{H_e} = s \qquad [107]$$

mide precisamente el coeficiente de costos, s.

El empino de la curva sobre el eje de las u, da rápido concepto y medida de la economía de la empresa, la que, en general, será tanto más favorable cuanto más pronto se eleve esa curva sobre dicho eje, y se aproxime a la vez al de las w.

La utilidad específica, a mérito de la [107], puede escribirse

$$R = u - s = u - \frac{du}{dw} \qquad [108]$$

expresión de la cual destácase otra vez que en la economía de toda empresa, tiene prioridad la cifra de evoluciones como factor respecto del coeficiente de costos, que deriva de la relación de los incrementos de la misma y del rendimiento económico.

99. — Cotejos de relación global. — II. — *Conceptos de organización y aplicación del capital.* — Las definiciones de hacienda o caudal y de capital que suministran el número 88 y la fig. 1, ponen de relieve la mayor amplitud del primer concepto y su significado con respecto al segundo. Atentas estas diferencias, compréndese que la marcha de una empresa y su cotejo con la de otras empresas, hallen útiles referencias en la consideración de inteligentes relaciones establecidas entre capital y hacienda y entre partes de la hacienda.

Para llegar a fundar estas relaciones, hace falta organizar la hacienda en rúbricas de la contabilidad, adoptando oportunos puntos de vista. El ingeniero Dr. Zeidler (op. et loc. cit.) indica como tales los siguientes:

I. — Objetivo, de acuerdo a las clases de caudal.

II. — Conforme a la pertinencia determinada, calculada o de lugar de las partes del caudal a las divisiones de la explotación o rubros.

III. — Según la *liquidabilidad* (1).

(1) En alemán, *die Liquidabilität.* La posibilidad mayor o menor de realizar o liquidar.

Desde el primer punto de vista, hállase esencialmente establecida la división del caudal de explotación (fig. 1) en

CAUDAL DE EXPLOTACIÓN = CAUDAL DE INSTALACIONES + CAUDAL CIRCULANTE.

El segundo punto de vista, ante todo, guía la clasificación del caudal activo total (fig. 1) en dos partes:

CAUDAL ACTIVO TOTAL = CAUDAL DE EXPLOTACIÓN + CAUDAL DE ADMINISTRACIÓN.

De lo relativo al tercer aspecto de la organización, trataremos en el número 100.

En atención a los principios que acabamos de exponer, indica el ingeniero Dr. Zeidler (op. cit., nº 40, « Betriebsvergleiche ») las siguientes relaciones que permiten hacer juicio de la organización y de la aplicación del capital:

$$C_1 = \frac{\text{Capital propio}}{\text{Capital ajeno}} \quad \text{(Coeficiente de adeudos; Mellerovicz, p. 295)} \qquad [109]$$

$$c_h = \frac{\text{Capital propio}}{\text{Caudal de explotación}} \qquad [110]$$

$$h_i = \frac{\text{Caudal fijo (de instalaciones)}}{\text{Caudal de explotación}} \qquad [111]$$

$$h_c = \frac{\text{Caudal circulante}}{\text{Caudal de explotación}} \qquad [112]$$

Tan explícitas por su objeto y su naturaleza preséntanse estas relaciones, que no nos detendremos a aclararlas.

100. — COTEJOS DE RELACIÓN GLOBAL. — III. — *Concepto de liquidabilidad o fluidez.* — La organización del caudal con arreglo a la naturaleza de sus partes constitutivas, a que se refiriera el primer concepto antes mencionado, puede en alguna circunstancia vincularse con el concepto de liquidabilidad. Es ello así cuando se separan en el caudal de explotación la parte empeñada efectivamente y la que temporalmente permanece inactiva [1], pues esta situación fácil-

[1] En el caudal de instalaciones, puede haber edificios, locales, maquinarias que no presten momentáneamente servicio; en el caudal circulante, personal y rezagos de almacenes inactivos, créditos estancados, etc.

mente lleva a realizar los medios de actividad estancados, o a operaciones de movilización de créditos o de disolución de compromisos de trabajo.

Por lo demás, toda empresa contiene un margen de riesgo, y éste es tanto más ceñido cuanto más fáciles de reducir a dinero son las partes del caudal empeñadas en operaciones.

Dentro de la dificultad que ofrece la clasificación de las partes de la hacienda según la comodidad y presteza con que se presten ellas o no a ser realizadas, pueden suministrarse algunas indicaciones que siquiera guían el criterio respectivo. En general, son difícilmente realizables algunas materias brutas de comercio poco difundido; los productos inconclusos; las mercaderías en elaboración, los modelos, los rezagos o residuos de fabricación. De la misma condición son los créditos dudosos, en atención a la situación económica, los terrenos, los edificios, las instalaciones.

En cambio, suelen prestarse a una pronta y cómoda realización las materias primas usuales en el comercio (tanto principales como accesorias); los productos elaborados corrientes; los títulos.

Las deudas que son partes del pasivo, igualmente deben clasificarse por su favorable o desfavorable condición para ser liquidadas. Se las divide al efecto en *deudas a corto plazo*, exigibles o resolubles con prontitud, y las *deudas a largo plazo*, que no se liquidan con tanta presteza. Del primer género son las letras de cambio y las deudas por mercaderías; del segundo, las obligaciones y otros empréstitos.

El detalle de todas estas partes se concreta en las cuentas de la contabilidad.

Señala el ingeniero Zeidler tres relaciones que contemplan las circunstancias de facilidad para liquidar una empresa, a saber:

$$l_1 = \frac{\text{Fondos disponibles} + \text{Créditos}}{\text{Compromisos a corto plazo}} \qquad [113]$$

$$l_2 = \frac{\text{Caudal circulante}}{\text{Compromisos a corto plazo}} \qquad [114]$$

$$l_3 = \frac{\text{Compromisos a corto plazo}}{\text{Compromisos totales}} \qquad [115]$$

También estas cifras de relación son lo suficientemente explícitas.

101. — COTEJOS DE RELACIÓN GLOBAL. — IV. — *Concepto de velocidad de conmutación de valores.* — En verdad, el concepto relativo a la rapidez o velocidad con que ocurren las conmutaciones de valores en una industria, tanto puede abarcar la totalidad de las operaciones en esa industria como una parte determinada de las mismas.

A la condición global responden, entre otros, los coeficientes de relación siguientes:

$$v_1 = \frac{\text{Monto total neto anual de transacciones}}{\text{Capital propio}} = \frac{U_0}{C} \quad [116]$$

$$u = \frac{\text{Monto total neto anual de transacciones}}{\text{Caudal de explotación}} = \frac{U_0}{H_e} \quad [95]$$

cifra de evoluciones, esta última, cuyo objeto e importancia ya conocemos (nº 90).

De concepto análogo, pero más restringido, son las dos cifras de relación que señala el ingeniero Dr. Zeidler (op. et loc. cit.).

$$v_2 = \frac{U_0}{\text{Existencias medias de productos}} \quad [117]$$

(Coeficiente de salidas; frecuencia de giro. Mellerowicz, p.215).

$$\text{y} \quad v_3 = \frac{U_0}{\text{Monto medio de créditos}} \quad [118]$$

102. — COTEJOS DE RELACIÓN PARCIAL. — *Concepto del aprovechamiento de las instalaciones.* — Este concepto, en la industria, tiene una significación importante. El aprovechamiento de las instalaciones, a más de importar una medida de la conveniencia y de la utilidad de las mismas, señala aspectos particulares de sumo interés para regir la aplicación.

Hemos indicado anteriormente, al pasar, dos cifras de relación (fórmulas [102] y [104]) que incluyen el concepto a que nos referimos.

Además, prestan oficio de carácter particular con análogo fin las siguientes, que indica Zeidler (op. et loc. cit.)

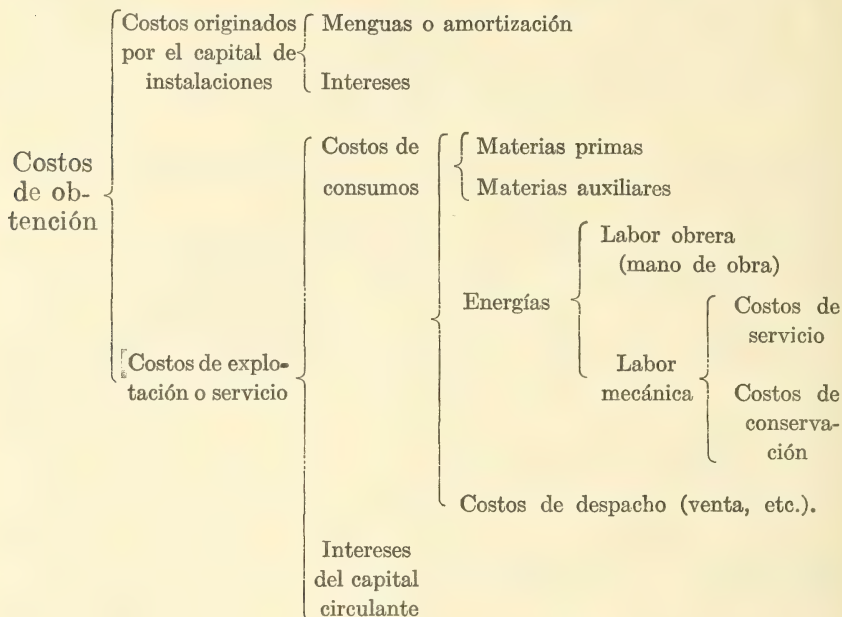
$$a_1 = \frac{U_0}{\text{Caudal de instalaciones}} \quad [119]$$

$$a_2 = \frac{\text{Costos comunes por tiempo}}{U_0} \quad [120]$$

$$a_3 = \frac{\text{Costos de despacho}}{U_0} \quad [121]$$

103. — Cotejos de relación parcial. — *Concepto de los costos de obtención.* — El estudio de los costos de obtención (1) constituye el objeto capital de la Contabilidad de la explotación industrial.

Para exponer más sintética y claramente los lineamientos que toman en cuenta las equiparaciones de relación en materia de costos de obtención, presentamos un cuadro de formación de estos, en el caso general.



De esta organización general, escoge Schulz-Mehrin (en Maschinenbau, número de Abril 21 de 1927) los tres rubros de costos de consumos que dispone en grupos parciales, a saber:

Costos de materias
Costos de elaboración (transformación de materias en productos).
Costos de despacho (venta, etc. de los productos).

104. — La operación de equiparar costos de materias, bien se lleve a cabo directamente o por relación, presenta un interés económico subordinado en tanto gire alrededor de los precios de adquisición, pues considerados bajo el aspecto de la economía de la explo-

(1) En alemán, *die Selbstkosten.*

tación, son esos precios de naturaleza eventual. Dependen, p. ej., de la constitución y de la forma de ejecución del producto, así como de la elección que se haga de la clase de la materia.

Hay, no obstante, interés para la economía de la explotación en cotejar los costos ordinarios de materias, vale decir, los de compra, almacenamiento y administración de materias, como son los sueldos, salarios, amortizaciones, intereses, etc. Conviene referir estos costos a los de adquisición, estableciendo una cifra de relación.

$$\frac{\text{Costos ordinarios de materias}}{\text{Precio de compra de materias}} \qquad [122]$$

Asimismo, pueden referirse los costos ordinarios de materias a la unidad de cantidad o de peso de esas materias, obteniendo respectivamente el costo ordinario de materias por kilogramo, pieza, metro cuadrado, etc.

105. — Mucho más importante es la comparación de los costos de elaboración, que abarcan los

$$\text{Costos de elaboración} \left\{ \begin{array}{l} \text{Costos de la mano de obra} \\ \text{Costos de instalaciones} \end{array} \right\}$$

A los costos de mano de obra pertenecen todos los sueldos, salarios y costos auxiliares de personal. (Seguros del personal; expensas de atención sanitaria; subsidios de vacaciones y traslados, etc.).

Este grupo involucra, además, las partes de costos dependientes en forma prevaleciente de los de mano de obra, tales en particular como los intereses del capital circulante invertido en salarios, sueldos y costos accesorios de personal, mientras dichos salarios, sueldos y costos correspondan a los productos total o parcialmente elaborados.

Los costos de instalaciones incluyen ante todo las amortizaciones y los intereses del capital de instalaciones. A estos valores súmanse los de seguros de instalaciones, costos del material de explotación como carbón, energía, máquinas y herramientas, correas, materias de lubricación y calafateo, material de reparaciones.

Los costos de trabajo y las instalaciones, y más particularmente los salarios y sueldos por un lado y las amortizaciones y los intereses del capital de instalaciones, por el otro, ejercen entre sí en cierta medida una acción recíproca. Deriva ello de que especialmente los costos de mano de obra y con más precisión los salarios, son tanto

más reducidos cuanto más amplio y mejor es la obra de la maquinaria; de consiguiente, esos salarios bajos corresponden a costos de instalaciones más elevados. Y recíprocamente.

Cuanto menor es la suma de los costos de mano de obra e instalaciones, en tanto más favorable condición trabaja la industria. Este aspecto directo no es el único que evidencia tal condición. Las cifras de relación ya conocidas por las [101] y [102], tienen desde luego que ver con la misma; mas, aún falta sentar otra más particularizada, que da el cuociente

$$\frac{\textit{Costos de elaboración}\ \text{(trabajo + instalaciones)}}{\textit{Caudal empeñado en la elaboración}} \qquad [123]$$

Ha de tratarse de que esta cifra de relación, a la que puede llamarse *coeficiente relativo de los costos de elaboración*, se torne mínima en la explotación. El interés primario de este aspecto, no necesita explicación.

Schulz-Mehrin (op. et loc. cit.) propone asimismo la formación de un coeficiente similar *simplificado*, sentando la relación

$$\frac{\textit{Salarios} + \textit{Sueldos} + \text{[(Amortizaciones + Intereses) de instalac.]}}{\textit{Capital de instalaciones}} \qquad [124]$$

Fundamenta este criterio en el hecho corriente de que los salarios y los sueldos son las rúbricas esenciales de los costos de trabajo, a los cuales puede tenerse por proporcionales los costos por sueldos y salarios empleados en los productos en curso de elaboración o terminados; y de idéntica manera, cabe admitir la proporcionalidad a los costos principales de amortización e intereses de las instalaciones, de los costos accesorios a que dan éstas lugar, como los de seguros y materias de explotación.

En los costos de instalaciones, intervienen para:

Terrenos: Los intereses del capital que se invierte en ellos;
Edificios: Lo propio y amortización;
Maquinaria y otros elementos: Lo propio y amortización.

Estas partes no pueden englobarse en cifras medias, porque varían mucho de uno a otro caso.

106. — *Los costos de despacho*, dependen del monto de las transacciones, y conviene de consiguiente establecer la cifra de relación

que expresa el importe de aquéllos por unidad del monto U_0. Tenemos, así, el valor de a_3, fórmula [121].

Mas, también es útil sentar la relación

$$\frac{\textit{Costos de despacho}}{\textit{Costos totales de obtención}} \qquad [125]$$

107. — La equiparación aislada de los costos de materias, de elaboración y de despacho, observa Schulz-Mehrin, es consecutiva de la separación con que estos grupos de costos son considerados en la contabilidad industrial. Es razonable, entonces, que también contenga cada grupo con peculiaridad los costos generales atinentes, a cuyo efecto ha de realizarse de la partida conjunta una repartición fundada. A manera de ejemplo, dice el citado autor, deben los sueldos del constructor, en las fábricas de maquinaria, ser atribuídos a la elaboración en tanto constituyen la retribución pertinente a la construcción de productos para venta y de aparatos; mas, cuando recaigan en diseños de proyectos o para ofertas, pasarán a gravitar entre las cargas del despacho.

Las amortizaciones de las instalaciones, también deben distribuirse conforme a su natural significación, vez por vez.

En cambio, los impuestos, los gastos de correspondencia (franqueos), las costas judiciales y otras análogas, serán integramente cargadas al despacho.

La corrección, con todo, de estas reparticiones, ha de ser más uniforme que absoluta.

Estos mismos principios, son aplicables a los rubros diversos comprendidos en las tres secciones antes consideradas.

Cuando, por otra parte, la Contabilidad no haya logrado la uniformidad distributiva, los solos cotejos viables serán los que consideren el conjunto de los costos.

Los cotejos de costos por clases: sueldos, salarios, material auxiliar, amortizaciones, etc., son de ordinario factibles porque existe concordancia acerca del concepto y del cómputo de los mismos.

La comparación, bien puede efectuarse directamente entre montos totales, o por referencia a los llamados *costos de terminación* (en alemán, « Veredlungskosten »), es decir, al conjunto de los costos con abstracción de los de adquisición de materias, o a una u otra clase particularmente característica de costos, como los salarios de elaboración, o también a un grupo de costos elementales, como son los de salarios y sueldos y la amortización e intereses del capital de instalaciones.

De entre estos varios rubros de referencia, los más utilizados han sido hasta el presente los *costos totales* y *los salarios de elaboración* (productivos). El empleo de los primeros no parece aconsejable, porque engloban los costos de materias, cuyo monto, como ya se adujo (nº 104), carece de significación importante para la conducción de la explotación. La relación a los salarios de elaboración, resulta aún menos aconsejable. Es posible establecerla para las distintas clases de costos (« Kostenarten »), en el decurso de la actividad de una misma empresa, siempre que a la vez quede debidamente contemplada la influencia correlativa del *grado de empeño*, de las alternativas de los precios y de otras circunstancias eventuales. Mas, entre empresas distintas, la validez de los cotejos de relación entre otras cifras, no es admisible sin más.

108. — Una correlación de concepto similar a la que viéramos (nº 105) entre salarios de elaboración y costos de instalaciones, existe entre aquellos salarios de una parte y los sueldos y salarios auxiliares, de otra parte. Observa Schulz-Mehrin que algunas labores antes pertinentes de los obreros, son abreviadas o aún substituídas en totalidad por las de empleados dedicados a la prevención de las tareas y a la organización científica de la explotación. Trae esto un crecimiento del monto de los sueldos y una rebaja del monto de la mano de obra.

Hechos similares influyen en los montos de los salarios auxiliares.

En suma, la relación entre sueldos, salarios auxiliares y otros costos a los salarios de elaboración, es muy variable y las cifras de relación no tienen segura propiedad para cotejos. Cuando se las empleare, ocurrirá tener presente el equipo de cada empresa y la organización de ésta, para salvar errores de consideración.

BREVE ENSAYO SOBRE DON PEDRO DE CIEZA DE LEÓN Y LOS CARACTERES DE LA CONQUISTA INCAICA

POR

ALBERTO M. SALAS

(Continuación)

Cieza, como todos los conquistadores, es un cristiano ferviente, casi un fanático, que en su época y en su patria, protegida celosamente por la Inquisición, era cosa corriente y natural. Posee, ya lo hemos dicho, alma grande y generosa, que al conmoverse y protestar por la destrucción del Imperio Incaico, adquiere así algunos matices de ese hombre que Blanco Fombona ha llamado «héroe moral» (1) que juzga a sus contemporáneos y procede dentro de su época guiado por principios espirituales que no pertenecen a ella. Pero es la primera condición, la de cristiano, quien contradice las amonestaciones que formula impulsado por su piedad artística, estremecido al ver sucumbir los bellos monumentos, la que nos hace pensar en lo anacrónico de estas censuras, no sólo de Cieza, del padre Las Casas y de otros muchos.

Véase como reacciona Cieza de León, ante la destrucción del *Sacsahuaman,* (que fué cantera pública hasta el año 1900) (2) la cicló-

(1) RUFINO BLANCO FOMBONA, «Psicología del Conquistador Español del Siglo XVI», X, 109 y 110, *Revista de Filosofía,* Bs. As., enero de 1921.

(2) LUIS E. VALCÁRCEL, «Sajsawaman (sic) Redescubierto». *Revista del Museo Nacional de Lima,* Tomo III, Nº 1-2, Lima, Perú.

Dice el autor refiriéndose a los baluartes superpuestos del Sacsahuaman: «Mucho se ha destruído la fábrica del fuerte en este sector; la facilidad de rodar las moles hacia el valle de Sapi lo explica. Todavía se puede ver en algunos monolitos las perforaciones para aplicar el explosivo. Hasta 1900 seguía siendo una cantera». Esto, sin embargo, no impidió que el autor dijera que: «Sajsawaman ha sido redescubierto. Cuatrocientos años después que la impía acción del conquistador lo sepultó, vuelve a la luz. Simbólica reaparición que se debe interpretar como secreto designio de la raza».

pea fortaleza cuzqueña: «..pues los españoles lo han ya desbaratado y parado tal, cual yo no quisiera ver la culpa grande de los que han gobernado, y que una cosa tan insigne se hobiera desbaratado y derribado, sin mirar los tiempos y sucesos que pueden venir y que fuera mejor tenerla en pie y con guarda» (1). Y aquí torna nuestro cronista a ser el hombre que se detiene ante los hechos sin tratar de comprenderlos ni de explicarlos, el que olvida de manera sorprendente las causas que movieron la destrucción española del *Sacsahuaman*: el temor de que los indígenas se ganasen en la fortaleza y repitieran la denodada resistencia de *Manco,* las fàbulas de tesoros escondidos en ella, y hasta el rumor muy generalizado que láminas de oro y plata cimentaban sus piedras. No queremos a nuestra vez olvidar que fueron muchos los sillares labrados con sus bloques monolíticos y empleados por los españoles en sus edificios; pero aparte de lo dicho anteriormente acerca del uso de estas piedras históricas del *Sacsahuaman* en épocas recientes, debemos hacer constar, en descargo del conquistador, que hasta hace muy pocos años, las ruinas de *Tiahuanaco* eran sistemáticamente explotadas por una empresa de construcciones. Quien tal cosa me testimoniara, el profesor Francisco de Aparicio, ha visto en la ciudad de la Paz, alguna casa construída con tan precioso material.

Aun apreciando en su justo valor la nota que Jiménez de la Espada dedica a estas manifestaciones, transcribiremos algunos párrafos que lícitamente podemos referir al *Sacsahuaman,* escritos por quien como el Inca Garcilaso sobrado derecho tenía a la indignación. « En muchas casas reales y templos del Sol echaron plomo derretido, plata y oro por mezcla. Pedro de Cieza, capítulo 94, lo dice también, que huelgo alegar los historiadores españoles para mi abono. Echábanlo para mayor majestad, lo cual fué la principal causa de la total destrucción de aquellos edificios, porque por haber hallado estos metales en algunos de ellos, los han derribado todos buscando oro y plata». (2) Más parecen estas palabras de español que desea justificar a sus compatriotas, que no de un mestizo, que ama y se enorgullece de la sangre india que late en sus venas, que debió sentir más profunda y sinceramente que Cieza el dolor de ver abatidos por los suelos los edificios que levantara el genio de sus mayores, lo cual no impide, he aquí la paradoja, que sea su juicio más ecuánime y atento a la verdad que el del hispano.

(1) Cieza, *ibíd.,* LI, 194.
(2) Garcilaso de la Vega, *ibíd.,* t. I, XXVIII, 188 y 190.

La destrucción del *Sacsahuaman* y de tantos otros edificios incaicos, verdaderos cíclopes de quienes hoy sólo queda la huella de las plantas, fué causada, sí, por el oro, por los sillares bien labrados, por el temor. ¿Puede ser éste un estigma irredimible para los conquistadores del Perú, para toda una nación? ¿Pretenderemos que ellos procedieran como arqueólogos del siglo XX? ¿Diremos acaso que es una falta gravísima, excepcional en la historia, deshacer las fuertes hiladas de piedra para construir las catedrales de aquella fe exaltada, para buscar en sus juntas el metal codiciado?

Pero esto no nos incumbe, dejemos que lo contesten quienes siguen juzgando al conquistador con despechos raciales, con la psicología anacrónica de este siglo.

Muy otra es la actitud de Cieza y su opinión ante la destrucción de cuanta « guaca » y templo incaico había en el Perú. Aquí es de nuevo el hombre de su siglo de intransigencias religiosas, aquí es donde olvidado de los bellos aparejos de piedra y bien acordados muros de adobe, canta un aleluia a la obra de la piqueta. Las protestas que levantara movido por la belleza de la fortaleza y por los atropellos hispánicos, las anula la alegría del cristiano. Veamos cómo se expresa: « Los templos antiguos, que generalmente llaman guacas, todos están ya derribados y profanados, y los ídolos quebrados, y el demonio, como malo, lanzado de aquellos lugares, a donde por los pecados de los hombres era tan estimado y reverenciado; y está puesta la cruz. En verdad, los españoles habíamos de dar siempre infinitas gracias a nuestro Señor Dios por ello » ([1]).

Expresiones semejantes a ésta, hija legítima de una época, no cansará el labio de decirlo, hasta que lo entiendan quienes se abroquelan en prejuicios y odios inconcebibles, podrán hallarse en muchos pasajes de la Crónica, pero ninguna como ella reflejará tan nítidamente la satisfacción del cristiano hincando la cruz allí donde señoreara la divinidad gentílica.

Cieza sólo supo de fe; las destrucciones que ella causaba no son para él destrucciones. Acaso *Pachacamac* y *Curicancha* no le impresionaran tanto como el *Sacsahuaman,* tal vez no reparara en lo que se hacía, cegado por el placer de exorcizar los demonios de aquellas piedras. En cambio, oprobio, iniquidad singular, es el destruir por oro, por sillares y temores. La poca experiencia histórica, las escasas lecturas, hicieron creer a Cieza y a muchos otros, que

([1]) Cieza, « La Crónica... », LVII, 190.

estos excesos podían haberse evitado, sin ocurrírseles pensar, que era la fe, arrasando templos, guacas y ortorios, la que humillaba y abatía una raza, más que despojándola de su oro, y derruyendo sus fortalezas. El hombre es siempre el mismo, acentuado en algunas pasiones, en algunos sentimientos, menguado en otros, según las épocas. El fanatismo y la codicia convivieron en el espíritu inquieto de aquellos conquistadores, muy osados de enviar, como un Aguirre, carta de desafío a su Rey. Justificar y comprender las ruinas que provocó el uno (¿acaso más moral?) es justificar y perdonar las que ocasionó la otra, pasión tan fuerte como aquella, más adherida al hombre, que le acompaña a través de la Historia, que fué capaz de vencer la fe y el respeto cristiano de los saqueadores de Roma.

Las críticas de Cieza, pues, son harto relativas, carentes de serenidad, de comprensión humana, de franqueza, de esa misma franqueza que hace decir a uno de nuestros investigadores: « Y si fuéramos a indagar en los tres o en los seis mil años anteriores (a nuestra era), en las tierras de chinos e indostánicos, judíos y fenicios, egipcios y caldeos, celtas y lapones, habríamos de conjugar los mismos verbos: invadir, saquear, someter, desmembrar, destruir, fundar...

Aceptemos, pues, la conclusión de que esas superposiciones de Imperios penosamente formados y dolorosamente deshechos, constituyen los ineludibles anales de nuestra bárbara, insensata y heroica Humanidad ». ([1])

Que gima, sí, desde la Historia, la amargura resabiada de una raza vencida en el choque inevitable de las civilizaciones.

([1]) Levillier, Roberto, *ibíd.* Libro II, 150.

SEGUNDA PARTE

LA CONQUISTA INCAICA

CAPITULO PRIMERO

A) Las Behetrías

Previo al estudio de los caracteres de la conquista incaica, se impone como imperativo ineludible, la consideración del estado cultural aborigen antes de la conquista y hegemonía de los incas.

De manera casi unánime afirman los cronistas, que con anterioridad a ella, los naturales que habitaban las tierras que constituirían el gran imperio, eran behetrías. Asegura Cieza a este respecto, « ..que todos vivían desordenadamente y que muchos andaban desnudos, hechos salvajes, sin tener casas ni otras moradas que cuevas de las muchas que vemos haber en riscos y grandes peñascos de donde salían a comer de lo que hallaban por los campos », (1) agregando a esto en otro pasaje, que «...eran muy bestiales y que comían carne humana » (2). La existencia de este estadio cultural, al cual no sin ciertas reservas, llamaremos « salvaje », dando a la palabra su significado vulgar, se ve ampliamente corroborado por las crónicas de Sarmiento, Pedro Pizarro, Bernabé Cobo, Acosta y Garcilaso, particularmente de este último, que en un todo de acuerdo con la descripción de Cieza, transcribe íntegramente el capítulo XXXVIII de la Crónica, donde trata este asunto (3). Pero la palabra behetría, o mejor dicho, el estado de behetrías, no tiene para los autores citados, significado idéntico. Mientras que para Pizarro, Cobo, Cieza y Garcilaso, es sinónimo de carencia de un orden político, social y hasta moral, o de una organización en pequeños estados, tribus, como quiere Acosta (4), para Sarmiento de Gamboa

(1) Cieza, « Segunda Parte...», VI, 2.
(2) Cieza, « La Crónica...», XXXVIII, 117.
(3) Garcilaso, *ibíd.*, t. I, XXXVI, 252 a 257.
(4) Joseph de Acosta, « Historia Natural y Moral de las Indias », t. 2º, 46, Madrid, 1894.

significa la ausencia de una autoridad política, sólida y permanente, acepción ésta, que atribuyendo a los individuos un estado de « simple libertad » hizo, a no dudarlo, más evidente la « tiranía » que los incas implantaron sobre estas behetrías, cosa que facilitó en mucho la demostración de su tesis. Vemos, pues, que mientras el interés de Sarmiento supone un estado cultural y social en el cual cada individuo goza de una libertad ideal, que destruirán los incas, el error y la deficiente información de los otros, que en Garcilaso puede ser tendenciosa, nos presentan a los incas civilizando y arrancando, *a todos* aquellos pueblos, de la barbarie en que se debatían. El error como acontece a menudo en estas materias, nace de la generalización. No todos los pueblos peruanos, anteriormente a los grandes conquistadores cuzqueños, fueron behetrías, ni salvajes, ni incultos, ya que, como lo demuestra la arqueología, no fué poco lo que asimilaron los incas de las culturas avasalladas; de las culturas de litorales, por ejemplo. Mucho costaría en verdad, concebir a la civilización incaica como una « ínsula cultural », perfectamente aislada y que no reconociera tributarismos de ninguna especie. Para desvanecer la opinión errónea de los que suponen la existencia de una behetría general, bastaría mencionar solo dos nombres, *Pachacamac* y *Tiahuanaco*.

Que en el Perú hubo behetrías es cosa tan innegable como el afirmar que existieron en territorio argentino, donde las culturas de la pampasia y del litoral, lo parecerían ante la del Noroeste, que a su vez, comparada por Cieza u otro cronista, con la incaica, recibiría de ellos idéntico calificativo.

La misma topografía peruana, pródiga de caracteres de aislamiento, permitiría la formación de centros demográficos nítidamente separados y el avecindamiento de culturas bien dispares y hasta de contrastes vigorosos. No se crea por esto que Cieza y otros cronistas, ignoraron la existencia de algunos pueblos poseedores de un patrimonio que mucho les acercaba a los incas; hasta el mismo Cieza nos ha dejado de los *Yuncas* una descripción que en nada los aviene con las behetrías. Además, ha conocido y admirado las ruínas de *Tiahuanaco*, confesando que ni los incas sabían dar razón de quienes habían sido sus constructores, y con seguridad que no pensaría Cieza que gentes sin arreglo ni gobierno fueran capaces de elevar un recinto como el de *Calasassaya*, tallar una Puerta de Sol, o arrancar los monolitos de *Accapana*. Con todo, estos conocimientos son circunstanciales, y nada concluyeron de ellos, tímidos ante la conje-

tura. Ignoraron, cuando menos en su antigüedad, a la extinta cultura Protochimu, no conocieron el arte de sus maravillosos vasos retratos, ni dedujeron cómo se ha hecho en la actualidad, de la decorada cerámica, su vida y sus costumbres; tampoco pusieron en duda cômo la moderna arqueología, que *Sacsahuaman* ni *Ollantay Tambo* fueron construídos, siquiera por *Manco Capac*, el más antiguo de los reyes Incas. En fin, que hijos de su siglo, creyeron en la aparición espontánea de una cultura como la incaica en medio de un páramo; una flor de loto nacida en el fango. Aun olvidàndonos de los argumentos intangibles que proporciona la arqueología, las behetrías que describen algunos cronistas, Cieza, v. gr. refiriéndose a los *Yuncas* y diciéndonos que eran sus «... señores amigos de regocijos, andaban a hombros de sus vasallos, tenían muchas mujeres, eran ricos de oro y plata...» (1), y el mismo Sarmiento de Gamboa, manifestándose ambiguamente sobre la autoridad temporal o permanente de los *cinches,* capitanes de guerra, son harto contradictorias para que admitamos su difusión general. Cuidaremos mucho, pues, de afirmar que los Incas lucharon y conquistaron para imponer cultura y orden a esas behetrías (Sarmiento dirá lo contrario) sino, su cultura, sobreponiéndola a las que hallaron, que por insuficientes o enervadas, no pudieron resistir su empuje.

B) Causas y métodos de la conquista incaica

El encabezamiento de este acápite encierra pretensiones de tal magnitud, que es necesario delimitar las nuestras con claridad.

Sabido es, que entre los móviles de una conquista, la economía, la religión, las ideas políticas, las pasiones humanas, las más de las veces inconfesas, tienen una importancia y juegan en los hechos un papel, que no siempre se puede distinguir con facilidad, o que por lo menos, puede ser controvertido. No es este el estudio que nos roponemos, sí en cambio, uno más modesto, el de averiguar las causas de la expansión incaica, tal como la supieron los cronistas, sin querer meternos en un estudio filosófico o psicológico, para lo cual, sin embargo sería difícil hallar otras fuentes.

La ambición y la codicia de señorío, pasiones de todos los hombres y de todas las épocas, sin distinción de razas ni de culturas, deben haber sido la causa y el objeto mismo de la mayor parte de las conquistas incaicas; la religión, como dice Prescott, y como nos atre-

(1) Cieza, «Segunda Parte...», LVIII, 219.

vemos a afirmar, un poco contagiados de su materialismo, si es posible llamarle así, era sólo un pretexto y como veremos más adelante, un execelente medio para consolidarla (1). Hemos dicho que la mayor parte de ellas obedecerían a esas causas, entendiendo por ambición en este caso, a la expansión que satisface antes que necesidades materiales a los sentimientos del hombre o del pueblo que la ordena y que la impone. Pero es indudable que esta pasión, que parece tan extraña e inútil a un espíritu moderado y hasta diríamos normal, no ha sido la única causa que movió la guerra incaica. Existió lo que llamaríamos, no sin ciertos temores, la ambición y la codicia de lo útil, de lo imperiosamente necesario.

Paréceme indudable que las primeras conquistas que emprendió la pequeña tribu incaica que señoreaba en el valle del *Cuzco*, serían impulsadas por el logro de tierras fértiles en que hacer sus sementeras. La misma conquista del *Cuzco*, según la relata Sarmiento de Gamboa y Betanzos, o la pacífica instalación de *Manco Capac* y sus hermanos, como refieren Cieza y Garcilazo deberíase en buena parte a esa misma causa.

No hemos hallado en la crónica de Cieza una sola palabra sobre los motivos de esta política imperialista. El padre Cobo afirma que, «...el título de religión fué nno de los más principales con que guerreaban otras gentes...» (2), lo cual tal vez no estuviera alejado de la verdad, o cuando menos de sus apariencias. Si en este mismo sentido algo podemos deducir lícitamente de la crónica de Garcilaso, es que conquistaron el Perú movidos por el generoso propósito de arrancar a los naturales de sus behetrías. Será difícil hallar en toda la Historia, otro pueblo que desempeñe semejante función civilizadora, como único motivo de conquista, ni tan acabada materialización de sabiduría patriarcal como la que hallamos en su *Manco Capac* y *Mama Oello* poniendo en buena orden y cordura a los naturales del *Cuzco*. La opinión de su antípoda, Sarmiento de Gamboa, es una nueva manifestación de su empeño en hacer de los incas, no solo una casta de tiranos, sino también de ladrones y asesinos. Extraemos de cuantas citas acumulamos en este sentido, y no son pocas, una muy ejemplarizante. « De esta respuesta — de la negativa de prestar obediencia al Inca — se holgaron Topa Inga y los suyos, porque no querían sino hallar ocasión de llevarlo todo a las puña-

(1) Prescott, *ibíd.*, Libro 1º, 83.
(2) Bernabé Cobo, « Historia del Nuevo Mundo », t. 3º, XII, 221, Sevilla, 1892.

das, por poder robar, que era su principal intento» ([1]). Podría pensarse que esto ocurre sólo con la conquista de *Topa Inga,* pero en iguales términos comenta las que emprendió *Viracocha* (58), *Inca Yupanqui* (74), *Pachacutic* (71), y así de otros que es ocioso mencionar. La visión es desoladora, dijérase que estos incas del cosmógrafo de Toledo, son tigres sanguinarios antes que hombres, y que sólo los mueve a la conquista, el crimen y el pillaje. Refiriéndose a ella Sarmiento Gamboa, es el único de los cronistas españoles que lo hace en términos semejantes.

Si el ansia de dominio o sus credos religiosos, era lo que les impulsaba a avasallar pueblos, ni lo uno ni lo otro priva que los nuevos territorios fueran reorganizados integralmente según los usos y costumbres de los nuevos amos.

Métodos de conquista

Si persiguiéramos, pura y exclusivamente la exposición de un aspecto de la cultura incaica, sin preocuparnos mayormente del valor testimonial de las fuentes, en este tema enunciado, no tendríamos mucho que glosar, puesto que en los métodos de la conquista incaica, nada hay, absolutamente nada de original. Procuraban realizarla ganándose los ánimos y enflaqueciendo la resistencia de los naturales con regalos y promesas, y así «... entraron —dice Cieza— en muchas tierras sin guerra, en las cuales mandaban a la gente de guerra que no hiciesen daño ni injuria ninguna, ni robo ni fuerza» ([2]). En idéntico sentido se expresa Garcilaso diciendo: «...y antes que moviesen la guerra requerían a los enemigos una, dos y tres veces» ([3]). Y Cabello de Balboa, quien dice de Inca Yupanqui: «Jamás hizo la guerra a una nación sin hacerle antes dos o tres veces proposiciones de paz, sólo cuando se las rechazaban tomaba las armas...» ([4]). La primera etapa de la conquista incaica era, pues, de índole pacífica; se trataba de persuadir al presunto vasallo con promesas y dádivas, y más aún, con la amenaza de un ejército poderoso y bien pertrechado, que ya sobre las fronteras

([1]) Sarmiento de Gamboa, «Segunda parte de la Historia general llamada Indica...», 89, Berlín, 1906.

([2]) Cieza, *ibíd.*, XVII, 60 y 61.

([3]) Garcilaso, *ibíd.*, t. 3º, XII, 77.

([4]) Miguel Cabello de Balboa, «Historia del Perú bajo la dominación de los Incas», 35, Lima, 1926.

aguardaba listo para entrar en acción si fracasaban las artes pacíficas.

Cuando la conquista se llevaba por la violencia de las armas, procuraban los Incas, según testimonia Cieza, «...que en los mantenimientos y casas de los enemigos, se hiciese poco daño, diciéndoles el Señor: presto serán estos nuestros como los que ya lo son. Como esto tenían conocido, procuraban que la guerra fuese la más liviana que ser pudiese, no embargante que en muchos lugares se dieron grandes batallas...» (1). Nosotros, por buena lógica, creemos en la veracidad de estas palabras. Aun olvidando alegar en nuestro favor algunas expresiones de Garcilaso, cuyo valor probatorio en este aspecto juzgamos poco valedero, ¿podemos creer que el Inca sistemáticamente destruya y lleve a sangre y fuego todo lo que había de ser suyo? ¿podemos suponer que desvastase y pillase lo que ya constituía su propio patrimonio?

En Sarmiento de Gamboa, el relato de la expansión incaica se desarrolla dentro de un marco de monótona y abrumadora crueldad, « Con esta expedición y mandato partió *Cápac Yupanqui* del Cuzco e iba arruinando todas las provincias que de su voluntad no se le daban » (2). Y así, sin que varíe en un ápice el matiz de su adjetivación, los capitanes cuzqueños emprenden y llevan a término sus conquistas, destruyendo con muertes y con fuego cuando se les hace resistencia, robando y saqueando cuando se les avasallan de voluntad.

« No embargante que en muchos lugares se dieron grandes batallas...», dice Cieza demostrando así lo imparcial y ecuánime de su juicio. Derecho sobrado nos asistiría de sopechar de su testimonio si en su crónica la conquista se desenvolviera en los suaves términos de Garcilaso. Muy al contrario, los incas de Cieza, saben a las veces, ser crueles y despiadados, pero no lo son todos ni siempre.

Bien cruenta es la conquista que realizó *Inca Yupanqui* para meter bajo su señorío a los de *Ayavire*, «...donde dicen que no queriendo venir los naturales dél en coformidad, tuvo cuenta como, tomándolos descuidados, mató a todos sus vecinos, hombres y mujeres, haciendo lo mismo de los de *Copacopa;* y la destrucción de *Ayavire* fué tanta, que todos los más perecieron, que no quedaron sino algunos que después quedaban asombrados de tan grande maldad y como locos furiosos por las sementeras, llamando a los mayores su-

(1) Cieza, *ibíd.*, XVII, 61 y 62.
(2) Sarmiento de Gamboa, *ibíd.*, 58.

yos con grandes aullidos y palabras temerosas» (1). Como se advierte, no todas las conquistas que relata Cieza, se logran mediante dones y palabras, sino que algunas se realizan de manera sangrienta y enconada, y que el cronista no tiene la más pequeña intención de silenciar. Conquista no menos cruel, es la que realizó *Tupac Inca* para reducir a los de *Huarco,* que refugiados en una fortaleza, le resistieron durante varios años, hasta que, seducidos por falsas promesas, se desampararon de ella, y fueron exterminados implacablemente (2).

Sintetizando, pensamos en todo de acuerdo con Cieza, que si la crueldad fué empleada en la conquista incaica, lo fué como otro elemento cualquiera de dominio y de intimidación, procedimiento que no es ni fué extraño a ningún conquistador, y no como puede deducirse de la crónica de Sarmiento, la satisfacción de bajos instintos. La conquista así concebida, nunca hubiera llevado a los señoretes del *Cuzco* a ser los amos e Incas del enorme imperio que se extendía desde Quito hasta el Maule.

El conquistador no se contentaba con avasallar pueblos, su obra no se detenía en el campo de batalla, ni satisfacía sus ambiciones en el haber del vencido, Recién aquí comienza la verdadera conquista, la organización de todo orden de cosas de acuerdo a sus principios, la unificación política, social y económica, que imponían quienes se aprestaban a ser los señores definitivos de las nuevas tierras. Vulgares salteadores no se hubieran ocupado en fundar colonias, mover mitimaes, construir carreteras, y en levantar *tambos* y depósitos a su vera. Creer esto sería dudar de la conquista romana, acabado modelo en su género, con la cual hallaremos más de una similitud.

CAPITULO SEGUNDO

La organización política y económica de la conquista

Debimos haber manifestado en la Advertencia, que no aplicaríamos en mucho nuestra atención a la organización política de la conquista, como así también a la económica, porque son estos, temas que requieren más grave y extenso tratamiento y porque, al ser idénticas al de todo el imperio, no son propias ni características de la

(1) Cieza, *ibíd.*, LII, 197.
(2) Cieza, *ibíd.*, LIX, 226.

conquista. Dentro del tema, lo que para nuestros propósitos adquiere mayor trascendencia, es el respeto que observaba el conquistador hacia la autoridad del Señor dominado. « Los señoríos nunca los tiraban a los naturales... » (1), afirma Cieza; expresión que en términos semejantes itera en muchas partes de la obra. Aparte de Garcilaso (2), el padre Bernabé Cobo confirma tal noticia diciendo que «..desde los *Hunus* para abajo eran los Señores y caciques que los Incas hallaron en las provincias cuando las conquistaron ». (3)

Por su parte Sarmiento de Gamboa, fuerza es referirnos nuevamente a él, y para impugnarle, dice que el conquistador acababa con los señores naturales o *cinches,* para imponer sus *curacas* y tiranizar más a su albedrío (4).

No han de ser nuestras palabras las que exalten y pongan de relieve la habilidad política que trasunta esta medida, sino la de Cieza, a cuya penetración no escapó la verdadera eficacia de esta actitud de concordia entre vencedor y vencido. « Y tuvieron —dice — otro aviso para no ser aborrecidos de los naturales: que nunca quitaron el señorío a los que les venía de herencia y eran naturales. Y si por ventura alguno cometía delicto o se hallaba culpado de tal manera que mereciese ser privado del señorío que tenía, daban y encomendaban el cacicazgo a sus hijos y hermanos... » (5).

Esta última noticia sobre la herencia del señorío, confírmala Garcilaso, la cual recojemos con ciertas reservas, por no ser muy explícita, no así con la del padre Cobo que dice muy claramente: « En la sucesión de los cacicazgos y Señoríos guardaba el Inca este orden: que si el hijo mayor era hábil y capaz para el cacicazgo de su padre, lo nombraban en él... y si el mayor no era hábil y lo era el segundo, se le daba a éste; y faltando hijos hábiles de edad sucedía el hermano del muerto y tenía el señorío mientras vivía » (6).

Sobre estos jerarcas naturales, imponía el Inca la autoridad de sus gobernadores, virreyes y la suya propia.

Renunciamos desde ya a analizar el grado de autoridad efectiva de estos señores naturales, o si eran tan sólo pasivos instrumentos de gobierno, manejados a voluntad por estos incas que ya se nos

(1) CIEZA, *ibíd.*, XVII, 62.
(2) GARCILASO, *ibíd.*, t. 3º, XII, 78.
(3) BERNABÉ COBO, *ibíd.*, t. 3º, XXV, 235.
(4) SARMIENTO DE GAMBOA, *ibíd.*, 74.
(5) CIEZA, « La Crónica... », XLI, 131.
(6) COBO, *ibíd.*, t. 3º, XXV, 235.

muestran como muy hábiles políticos. Inútil será hurgar la crónica de Cieza en busca de algo concreto sobre la naturaleza y grado de subordinación de unas autoridades a las otras, como tampoco se hallará nada que satisfaga sobre las decurias, centurias, etc., en que se dividía toda la población del antiguo Perú, divisiones que sólo menciona hablando de la organización del ejército incaico.

Aunque es nuestro propósito dar una visión lo más exacta posible, según la describe Cieza, nos vemos obligados, para salvar las lagunas que presenta su información, y por dar a este capítulo una cierta unidad, a transcribir algunos párrafos del padre Cobo, que en pocas palabras resume lo que en Garcilaso lleva un capítulo. « Entre estos gobernadores y caciques había muy grande subordinación, porque los cinco decuriones de a diez sùbditos estaban sujetos al de cincuenta , y dos destos al de ciento y por esta orden los menores a los mayores hasta el más principal e inmediato al Rey » (1).

En cuanto a los gobernadores que imponía el Inca como autoridad suprema en las tierras conquistadas, eran todos orejones «...los más sabios, entendidos y esforzados que hallarse podían y ninguno tan mancebo que ya no estuviese en el postrer tercio de su edad ». (2) Su poder era casi absoluto y tenía facultad para levantar ejércitos y castigar cualquiera sublevación. Los *mitimaes* guerreros, de quienes hablaremos más tarde, dependían de él, y a no dudarlo, serían un arma preciosa en sus manos, a fuer de aguerrida y disciplinada. En punto a la fidelidad de estos gobernadores, diremos que estaba garantida por su hacienda y tal vez por la vida de sus familiares, que residían en el *Cuzco* o en lugares aledaños. Esto, aunque no lo dice el cronista de manera expresa, creemos deducirlo de una cláusula incompleta cuyo sentido reconstruímos. El párrafo en cuestión, es el siguiente: «...porque estos gobernadores que se ponían eran de gran confianza y todos orejones y que los màs de ellos tenían sus chácaras, que son heredades, en la comarca del Cuzco, y sus casas y parientes; y si alguno no sabía bastante para gobernar lo que tenía a su cargo, luego le era quitado el mando y puesto otro en su lugar » (3). Nosotros conjeturamos, con todas las reservas que imponen la carencia de noticias que confirmen nuestra suposisión, que resultaría ocioso el mencionar que tenían sus casas y familias en el *Cuzco,* si el autor no hubiera querido significar con ello que

(1) Cobo, *ibíd.*, t. 3º, XXV, 233.
(2) Cieza, « Segunda Parte...», XIII, 45.
(3) Cieza, *ibíd.*, XX, 75.

esa era una de las circunstancias por la cual se acendraría la fidelidad y celo de los gobernantes hacia el Inca [1].

Impuesto así en los nuevos territorios su orden político, en todo idéntico al que ya imperaba en el reino, atendíase a su organización económica. Como la consideración de este tema, recuérdese que sólo tratamos la conquista incaica en lo que ella tiene de particular, nos obligaría a comentar asuntos de tanto interés y tan debatidos como la propiedad, los tributos, las cargas personales, y en un plano más amplio, su organización comunista, optamos por dar de ellos una fugaz reseña, procurando que por incompleta no resulte falsa.

El eje del nuevo orden económico, íntimamente ligado al social por razones genéticas, común a todo el imperio y a todos los individuos, excepción hecha de la clase dominante u orejones y de los dignatarios, eran los censos, cuyos guarismos se asentaban en los *quipos*, el maravilloso elemento del mundo incaico. El censo o empadronamiento de la población era una de las primeras providencias que obligaba el conquistador, cuando menos así lo afirma el padre Blas Valera, según cita que extraemos de Garcilaso, « Demás desto mandaban que todos los naturales y moradores de la tal provincia se contasen y empadronasen hasta los niños por sus edades, linajes, oficios, haciendas, familias, que todo se notase y asentase como por escrito en los hilos de diversos colores; para que después conforme a aquellas condiciones se les impusiese la carga del tributo y las demás obligaciones que a las cosas y obras públicas tenían ». [2] Merced a esta cita no escapará a la percepción de nadie la importancia que adquiere el censo dentro de la economía incaica, ni se nos tachará de atrevidos al constituirle en su mismo eje.

Todos estos y otros muchos oficios de los *quipos* conoció Cieza. Supo de su utilidad en el reclutamiento del ejército, en la cuenta de los ganados, de las minas, de los mineros, sin olvidar su tan decantada utilidad histórica; y en fin, que conoció y supo que por ellos se llevaba cuenta ajustada y fiel de cuantos recursos naturales exisítian en las provincias del *Tahuantinsuyu.*

(Continuará)

(1) Hemos afirmado más arriba que carecíamos de noticias que confirmaran nuestra conjetura, pero creemos que mucho nos precipitamos, olvidando que el mismo Garcilaso (*ibíd.*, t. 2º, XXXIII, 274) afirma que el castigo a los traidores y al violador de las vírgenes del Sol, se extendía hasta su parentela y aún a todo el pueblo al cual pertenecía.

(2) Garcilaso, *ibíd.*, t. 3º, XIII, 85 y 86

SOCIOS ACTIVOS

Aguilar, Félix
Albizzatti, Carlos M.
Alvarez, Raúl J.
Alvarez de Toledo, Belisario
Allende Lezama, Luciano P.
Anastasi, Camilo
Anchorena, Juan E.
André, Enrique de
Andrioletti, Juan Luis
Añón Suárez, Vicente
Aparicio, Francisco de
Aráoz Alfaro, Gregorio
Arce, Manuel J.
Arditi Thompson, H.
Armani, Aquiles
Arnaudo, Silvio J.
Avila Méndez, Delfín
Aztiria, Ignacio
Bado, Atilio A.
Bachmann, Enesto
Baglietto, Eduardo E.
Balbiani, Atilio
Bancalari, Agustín
Barabino Amadeo, S.
Barbieri, Antonio
Bargna, Juan L.
Barilari, Mariano J.
Barral Souto, José
Barrancos, Leónidas A.
Becke, Alejandro von der
Berrino, Juan B.
Bertino, José Carlos
Besio Moreno, Nicolás
Bianchi Lischetti, A.
Biggeri, Carlos
Blaquier, Juan
Boaglio, Santiago
Bolognini, Héctor
Bonanni, Cayetano A.
Bontempi, Luis
Bordenave, Pablo E.
Borruat, Luis
Borzi, Ana María
Bosch, Gonzalo
Bosisio, Anecto J.
Bottaro, Juan C.
Bozzini, Luis (h.)
Briano, Juan A.
Bunge, Juan C.
Buontempo, Guillermo
Butty, Enrique
Buzzo, Alfredo
Buzzo, Eduardo B.
Caillet Bois, Teodoro
Calandra, Raúl E.
Camus, Nicolás
Canale, Humberto
Carabelli, Juan José
Carbia, Rómulo D.
Carbone, Esteban
Carbonell, José J.
Cárcova, Enrique de la
Carelli, Antonio
Carelli, Humberto H.
Caride Massini, Pedro
Carman, Ernesto
Carrea, Juan Ubaldo
Casacuberta, Antonio
Castellanos, Alberto
Castello, Manuel F.
Castiñeiras, Julio R.
Celasco, Juan L.
Cock, Guillermo E.
Coni Bazán, F. A.
Curti, Orlando P.
Curutchet, Luis
Chanourdie, Enrique
Chizzini Melo, Aníbal F.
D'Ascoli, Lucio
Dassen, Claro C.
Dasso, Héctor
Dasso, Ricardo L.
De Cesare, Elías A.
De Fina, Armando L.
De la Ini, Juan E.
Dellepiane, Luis J.
Deulofeu, Venancio
Díaz, Emilio C.
Dieulefait, Carlos E.
Doello-Jurado, Martín
Dobranich, Jorge W.
Domínguez, Juan A.
Dubecq, Raúl E.
Dueñas, José
Duhau, Luis
Dupont, Enrique
Durañona y Vedia, A.
Durrieu, Mauricio
Edelberg, Benjamín
Escudero, Antonio
Escudero, Pedro
Faré, Santo S.
Fernández, Alberto J.
Fernández Díaz, A.
Fernández Long, S.
Figini, Angel
Figuerero, Hernando W.
Fischer, Gustavo Juan
Flores, Emilio M.
Floriani, Luis
Florit Carlos J.
Forn, Carlos J.
Fossa Mancini, E.
Franceschi, Alfredo
Fürnkorn, Divico A.
Gadda, Carlos Manuel
Galmarini, Alfredo G.
Gando, Alfredo R.
Gandolfi Herrero, Augusto
Gandolfo, José S.
Gascón, Alberto
Gaspar, Fernando L.
Géneau, Carlos E.
Gerardi, Donato
Ghigliazza, Sebastián
Giagnoni, Bartolomé E.
Giannone, José
Gradín, Carlos
Grieben, Arturo
Gutiérrez, Ricardo J.
Haussler, Emilio
Herbin, Luis A.
Hermitte, Enrique
Herrera Vegas, M.
Herzer, Bernardo
Hickethier, Carlos F.
Hofmann, Herbert
Hortal, José Angel
Houssay, Bernardo A.
Hoyo, Arturo
Igartúa, Luis María
Irigoyen, Luis H.
Isetta, José
Ivanissevich, Ludovico
Jorge, José M.
Jakob, Cristofredo
King, Diarmid O.
Kinkelin Pelletán, J. C. de
Knoche, Walter
Kraglievich, Nicolás T.
Krapf, Eduardo
Labarthe, Julio
Lagunas, Simón
La Menza, Francisco
Laporte, Luis B.
Larco, Esteban
Lasso, Alfredo L.
Latzina, Eduardo
Ligniéres, Roberto
Lizer y Trelles, C. A.
Lombardi, Alberto
Loyarte, Ramón G.
Lugones, Arturo M.
Llauró, José
Mac Donagh, E. J.
Magnin, Félix J.
Mognin, Jorge
Mainini, Carlos
Mallol, Emilio
Mamberto, Benito
Marcó del Pont, E.
Marchionatto, Juan B.
Maresca, Antonio J.
Marini, Tomás L.
Martignone, Eduardo
Marotta, F. Pedro
Marotta, R. Armando
Mata, Leopoldo
Méndez, Julio
Meoli, Gabriel
Meoli, Humberto
Mercau, Agustín
Mermoz, Francisco A.
Molfino, José F.
Molina Carranza, L.
Molle, Clotilde C.
Montes, Vicente E.
Moreno, Evaristo V.
Nágera, Juan José
Natale, Alfredo
Natale, Ernesto
Negrete, Lucía
Negri, Mario L.
Nelson, Ernesto
Nielsen, Juan
Oliveri, Alfredo B.
Ortega Belgrano, Raúl
Ortiz, Aníbal A.
Ortiz de Rosas, Jorge
Otamendi, Gustavo
Ottonello, Héctor
Páez, José María
Page, Franklin Nelson
Paitoví y Oliveras, A.
Paquet, Carlos
Parodi, Edumndo
Parodi, Lorenzo R.
Pasman, Raúl G.
Pasman, Rodolfo E.
Pastore, Franco
Paz Anchorena, José M.
Pérez Hernández, A.
Perrone, Cayetano
Pestalardo, Agustín
Pini, Aldo S.
Platz, Hubert
Podestá, Juan Carlos
Polti, Modesto
Posadas, Carlos
Quinos, José Luis
Quinterno, Bruno F.
Quiroga, Pedro R.
Raimondi, Alejandro
Raffo, Bartolomé M.
Ramaccioni, Danilo
Ramallo, Carlos M.
Ratto, Héctor R.
Rebuelto, Antonio
Rabuelto, Emilio
Reoce, William Asher
Repetto, Blas Angel
Repossini, José
Ringuelet, Emilio J.
Rissotto, Atilio A.
Rivarola, Rodolfo
Robles, Angel A.
Rodríguez Aravena, S.
Rodríguez, Germinal
Roffo, Angel H.
Roffo, Juan
Roldán, Raimundo
Romero Brest, Enrique
Rokotnitz, Otto

Rospide, Juan
Rossell Soler, Pedro
Ruata, Luis E.
Ruíz Moreno, Isidoro
Ruiz Moreno, Adrián
Rumi, Tomás J.
Sabaria, Enrique
Sagastume Berra, A. E.
Salomón, Hugo
Sánchez, José Ricardo
Sánchez, Gregorio L.
Sánchez Díaz, Abel
Sánchez Sorondo, M. G.
Sanromán, Iberio
Santángelo, Rodolfo
Sarhy, Juan F.
Sarrabayrouse, Eugenio
Savon, Marcos A.
Schnack, Benno J.
Schmidt, Max
Schulz, Guillermo
Selva, Domingo
Selzer, Samuel
Sesma,, Angel
Sheahan, Juan F.
Silva, Leónidas L.
Simonoff, Miguel
Simons, Hellmut
Siri, Luis
Sobral, Arturo
Solari, Emilio F.
Solari, Miguel A.
Soler, Frank L.
Sordelli, Alfredo
Spinetto, David J.
Spota, Víctor J.
Storni, Segundo R.
Suárez, Angel
Talana, Alberto F.
Talana, Jorge
Tarragona, José
Tedeschi, Virgilio
Tello, Eugenio
Torre Bertucci, Pedro
Torello, Pablo
Tossini, Luis
Trelles, Rogelio A.
Trucco, Sixto E.
Valeiras, Antonio
Valentini, Argentino
Valentinuzzi, Máximo
Vallebella, Colón B.
Vanossi, Reinaldo
Varela, Rufino
Vecchi, Arístides de
Vela Huergo, Julio
Veyga, Francisco de
Vidal, Eduardo
Villalobos D., C.
Vignaux, Juan C.
Vinardell, Alberto
Volpatti, Eduardo
Wainer, Jacobo
White, Guillermo J.
Wauters, Carlos
Wysztelewski, W. de
Zamboni, Agustín
Zappi, Enrique V.
Zavalla, Carlos M.
Zuloaga, Angel M.

SOCIOS ADHERENTES

Bazzanella, José
Devoto, Carlos Alberto
Ferramola, Raúl
Folcini, Martín L. G.
García, Eduardo D.
Glücksmann, Carlos E.
Goyena, Ricardo J.
Laclau, Juan Pedro
Magne de la Croix, P. A.
Mailhos, Luis E.
Milesi, Emilio Angel
Quevedo Capdevila, Eduardo A.
Recoder, Roberto F.
Repetto, Cayetano
Rusconi, Carlos
Somonte, Eduardo
Wechsler, Wolf

CASAS ADHERENTES

Angel Estrada y Cía.
Benvenuto y Cía.
Lutz, Ferrando y Cía.
Hijos de Atilio Massone
Otto Hess, S. A.
T. Gr. "Tomás Palumbo"
Jacobo Peuser, S. A. Ltda.

SOCIO VITALICIO

Huergo, Eduardo María

MIEMBROS PROTECTORES DE LA ORGANIZACION DIDACTICA DE BUENOS AIRES

Anchorena, Juan E.
Besio Moreno, Nicolás
Tornquist, E. y Cía. (Lda.)

SECCION CORDOBA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Juan Olsacher; Vice-presidente, Dr. Miguel Fernández; Vice-presidente, Ing. Daniel A. García; Secretario de actas, Dr. Guillermo V. Stuckert; Secretario de correspondencia, Prof. Tulio Mácola; Tesorero, Sr. Bernardo Pilotto; Pro-tesorero, Dr. Carlos C. Hosseus; Vocales: Ing. Clodoveo Pascualini; Ing. Jorge E. Bobone; Ing. Luis Chechi; Ing. Ambrosio L. Taravella; Dr. Federico Padula; Dr. José Carlomagno; Dr. Meade L. Zimmer; Sr. Enrique Sparn.

SOCIOS ACTIVOS

Aguiar, Henoch D.
Bobone, Jorge E.
Brandan, Ramón A.
Broglia, Alberto A.
Buteler, Jesús E.
Camilloni, Carlos
Carlomagno, José
Chaudet, Enrique
Checchi, Luis
Deheza, Eduardo
Del Viso, Jacinto
Devoto, Heraclio A.
Esteban, Fernando
Fernández, Miguel
Fontana, Lorenzo P.
García, Daniel
Godoy, Salvador A.
Gómez, Calixto A.
Gordillo, Pedro N.
Hosseus, Carlos Curt
Lofayette Zimmer, M.
Larrauri, Agustín C.
Lutzow Holm, Olaf.
Mácola, Berardo A.
Mácola, Tulio
Mirizzi, Pablo Luis
Ninci, Raúl T.
Olsacher, Juan

- Padula, Federico
- Pasqualini, Clodoveo
- Peláez J. Gambastiani de
- Pilotto, Bernardo
- Rothlin, Edwin
- Schmiedecke, Augusto
- Sigal, Moisés
- Sparn, Enrique
- Stuckert, Guillermo V.
- Taravella, Ambrosio L.
- Tarragó, Emeterio
- Trebino, Natalio
- Urciolo, Victorio
- Vanni, Alberto
- Vercello, Carlos
- Yadarola, Mauricio L.

SECCION SANTA FE

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Gustavo A. Fester; Vice-presidente, Dr. José Piazza; Secretario de correspondencia, Ing. Quím. Francisco A. Bertuzzi; Secretario de actas, Ing. Quím. José Cruellas; Tesorero, Ing. Quím. Enrique Virasoro; Vocal 1º, Ing. José Babini; Vocal 2º, Prof. Rolando Hereñú; Vocal suplente 1º, Prof. Julio Salaber; Vocal suplente 2, Ing. Quím. Guillermo Berraz; Encargado de Biblioteca y Canje, Ing. Quím. Rodolfo Rouzaut; Encargado de Publicaciones, Ing. José Babini.

SOCIOS ACTIVOS

- Anadón, Leónidas
- Ariotti, Juan Carlos
- Babini, José
- Benet, Pedro José
- Berraz, Guillermo
- Bertuzzi, Francisco A.
- Bonazzola, César J.
- Borruat, Luis (hijo)
- Borzone, Rodolfo
- Bossi, Celestino
- Caballero, Martín A.
- Camo, José María
- Cerana, Miguel
- Claus, Guillermo
- Courault, Pablo
- Crouzeilles, A. L. de
- Cruellas, José
- Christen, Carlos
- Christen, Rodolfo G.
- Damianovich, Horacio
- Falco, Federico
- Fester, Gustavo A.
- Frenguelli, Joaquín
- Gollán, Josué (h.)
- Gschwind, Eduardo P.
- Guinle, Hugo José
- Hereñú, Rolando
- Hotschewer, Curto
- Juliá, Tolrá Antonio
- Kleer, Gregorio
- Mai, Carlos
- Mántaras, Fernando
- Marelli, Hipólito
- Martino, Antonio E.
- Montpellier, Luis Marcos
- Mounier, Celestino
- Muzzio, Enrique
- Nigro, Angel
- Niklison, Carlos A.
- Oliva, José
- Peresutti, Luis
- Piazza, José
- Piñero, Rodolfo
- Pozzo, Hiram J.
- Ragonese, Arturo E.
- Reinares, Sergio
- Rouzaut, Rodolfo
- Salaber, Julio
- Salgado, José
- Santini, Bruno L. P.
- Schivazappa, Mario
- Simonutti, Atilio A.
- Tissembaum, Mariano
- Urondo, Francisco E.
- Virasoro, Enrique

SECCION MENDOZA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Juan B. Lara; Vice-presidente, Ing. Agr. José Raúl Ponce; Secretario, Ing. Agr. Julio Tolosa (h); Tesorero, Ing. Cayetano C. Piccione; Bibliotecario, Sr. Adrián Ruíz Leal; Vocales: Dr. Eduardo Carette; Dr. Mario Bidone; Ing. Alfredo Rosenthal; Sr. Manuel Tellechea; Ing. Agr. Rafael E. Pontis.

SOCIOS ACTIVOS

- Alurralde, Juan Carlos
- Anzorena, Jacinto
- Ayala Castagnino, G.
- Basso, Germinal
- Benegas, Raúl
- Bidone, Mario
- Borsani, Carlos Pablo
- Burgoa, Pedro A.
- Carette, Eduardo
- Croce, Francisco M.
- Espinosa, Norberto A.
- Flor Alvarado, José M.
- Gabrielli, Francisco J.
- Galeano, Edgardo
- García, José Federico
- Godoy Vergelin, G.
- Gomensoro, José N.
- Granzella, Sinibaldo
- Guiard, Ricardo
- Jofré, Alberto L.
- Lara, Juan B.
- Lucero, Braulio G.
- Lugones, Manuel G.
- Magistretti, Guillermo
- Maneschi, Ernesto
- Maroso, José Angel
- Maveroff, Aquiles
- Mayorga, Santiago C.
- Miyara, Salomón
- Paganotto, Juan P.
- Pelaia, Dante
- Piccione, Cayetano C.
- Ponce, José Raúl
- Pontis, Rafael E.
- Rosales, Ranulfo S.
- Rosenthal, Alfrado
- Ruíz, Aníbal
- Ruíz Leal, Adrián
- Silvestre, Tomás
- Stura, Angel C.
- Tellechea, Manuel
- Tolosa, Julio (h)
- Toso, Juan F.
- Villanueva, Miguel Angel

SECCION LA PLATA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Carlos A. Sagastume; Secretario, Ing. Adolfo P. Grissi; Tesorero, Dr. Carlos Teobaldo; Vocales: Dr. Hilario Magliano, Dra. Juana Cortelezzi; Ing. Juan Sabato; Dr. Federico E. Christmann.

SOCIOS ACTIVOS

Alsina Fuertes, Fidel
Angli, Jerónimo
Arroyo Basaldúa, Víctor M.
Bonet, Luis A.
Cortelezzi, Juana
Crespi Gherzi, Rodolfo A.
Christmann, Federico E
Daló, Héctor R.
Ferrari, Obdulio J. F.
Gascón, Jorge
Gershánik, Simón
Giovambattista, Humberto
Grisi, Adolfo P.
Mc Loughlin, Rogelio P.
Magliano, Hilario
Méndez, José D.
Micheletti, Luis A.
Nico, Raúl
Oliva, Virgilio
Paternosto, Pedro G.
Platzceck, Ricardo P.
Sabato, Ernesto R.
Sabato, Juan
Sáez, Francisco A.
Sagastume, Carlos A.
Teobaldo, Carlos
Toranzos, Fausto L.
Trejo, César A.
Vucetich, Danilo C.
Wilkens, Alejandro

SOCIOS CORRESPONDIENTES

Aguilar y Santillán, R.	México
Amaral, Afranio de	San Pablo (Br.)
Avendaño, Leónidas	Lima
Alvarez, Antenor	Sgo. del Estero
Bonarelli, Guido	Gubbio ((It.)
Borel, Emile	París
Bachmann, Carlos J.	Lima
Bragg, William Henry	Londres
Bolívar, Ignacio	Madrid
Bruch, Carlos	Olivos (B. A.)
Cabrera, Blás	Madrid
Campos Porto, Pablo	Río de Janeiro
Carabajal, Melitón M.	Lima
Darmois, Georges	París
Dávila, Rubén	Santiago (Ch.)
Dabbene, Roberto	La Plata
Escomel Edmundo	Arequipa (P.)
Fiebrig, Carlos	Munich (Al.)
Fontecilla Larrain, Arturo	Santiago (Ch.)
Fort, Michel	Lima
González del Riego, Felipe	Lima
Greve, Germán	Santiago (Ch.)
Guinier, Philibert	Nancy (Fr.)
Hadamard, Jacques	París
Hauman, Luciano	Bruselas
Hernández, Juvenal	Santiago (Ch.)
Hijar y Haro, Luis	México
Janet, Pierre	París
Jiménez de Asúa, Luis	Madrid
Keiper, Guillermo	Berlín
Kinart, Fernando	Amberes
Lahille, Fernando	Tarn (Fr.)
Langevin, Paul	París
Levi Civita, Tulio	Roma
Lobo, Bruno	Río de Janeiro
Mardones, Francisco	Santiago (Ch.)
Molina, Enrique	Concepc. (Ch.)
Monjaráz, Jesús E.	México
Moretti, Gaetano	Milán
Oliver Schneider, Carlos	Santiago (Ch.)
Pereira d'Andrade, Lencastre	Nova Goa (I. P.)
Perrin, Tomás G.	México
Porter, Carlos E.	Santiago (Ch.)
Pi y Suñer, Augusto	Barcelona
Reyes Cox, Eduardo	Santiago (Ch.)
Rospigliosi y Vigil, Carlos	Lima
Rowe, Leo S.	New York
Shepperd, William R.	Wáshington
Tello, Julio C.	Lima
Villarán, Manuel V.	Lima
Vélez, Daniel M.	México
Valle, Rafael H.	México
Vitoria, Eduardo	Barcelona
Volterra, Vito	Roma



ANALES
DE LA
SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

ADOPTADOS PARA SUS PUBLICACIONES POR LA

ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

DIRECTOR: EMILIO REBUELTO

AGOSTO 1938. — ENTREGA II. — TOMO CXXVI

SUMARIO

BUENOS AIRES
CALLE SANTA FE 1145

1938

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

ADVERTENCIA. — Los colaboradores de los Anales son personalmente responsables de la tesis sustentada en sus escrito. Tienen derecho a la corrección de do pruebas. Los que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos, deben solicitarla por escrito. Los manuscritos, correspondencia, etc. se enviarán a la sede social, **Santa Fe 1145.**

Impreso en los Talleres Gráficos "TOMAS PALUMBO" - La Madrid 321-325 - Buenos Aires

SEXAGESIMO SEXTO ANIVERSARIO

DE LA

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

Para celebrar este aniversario de su fundación, el 30 de julio realizóse un almuerzo en el salón de su Biblioteca, al que concurrió crecido número de socios y varios invitados de honor.

Ocuparon la cabecera conjuntamente con los miembros de la Junta Directiva: el señor Presidente de la Comisión de Presupuesto y Hacienda de la Cámara de Diputados, Doctor Raúl Godoy; el Presidente de la Comisión Protectora de Bibliotecas Populares, Doctor Juan Pablo Echagüe, y el señor Director General de Administrativa del Ministerio de Relaciones Exteriores y Culto, Doctor Dívico A. Fürnkorn.

Al finalizar este ágape que se desarrolló en un ambiente de franca camaradería, conversándose de los temas más variados, el señor Presidente, Ingeniero Jorge W. Dobranich pronunció las palabras que transcribimos. Acto seguido, el doctor Raúl Godoy destacó, en una breve y elocuente improvisación, la obra que la Sociedad Científica venía realizando en pro de la cultura científica en nuestro país, comprometiéndose, desde su elevado cargo, a apoyar decididamente una mejora en la exigua subvención que le había acordado el Gobierno Nacional. Terminó su oportuna improvisación con las mismas palabras con que brindó el señor Presidente, que fueron celebradas por los concurrentes con una nutrida salva de aplausos.

Después de haberse retirado los invitados de honor, se realizó la Asamblea de socios, los cuales habían sido convocados con la debida anticipación, para tratar la reforma de los Estatutos, quedando aprobados por 51 votos sobre un total de 58 presentes.

Discurso del señor Presidente Ing. J. W. DOBRANICH

La Sociedad Científica Argentina acaba de cumplir 66 años de existencia desde su fundación en 1872, cuando la ciencia argentina no existía y el número de hombres que la cultivaban era asaz reducido.

De un grupo de jóvenes estudiantes de la incipiente Facultad de Ciencias Exactas, desprovistos de literatura técnica y científica, ante la escasez de libros en castellano y el costo privativo de aquellos escritos en otros idiomas, — también muy escasos — surgieron dos: Santiago Barabino y Luis Valiente Noailles, quienes habían de echar las bases de una asociación que reuniera a profesores y estudiantes con los propósitos siguientes:

« Formar una biblioteca de obras científicas, teóricas y aplicadas a la construcción en general, para uso de los estudiantes de nuestra Facultad;

« Dar cursos de repetición de las materias en estudio, como complemento de las lecciones de clase;

« Compilar los apuntes de las lecciones impartidas en sus aulas por los profesores ».

Aceptada la idea por sus condiscípulos, uno de ellos, Estanislao S. Zeballos asume la dirección y con amplias miras se propone transformar la proyectada asociación en *Academia Científica*: presenta las bases que, estudiadas por una Comisión designada con tal finalidad, las aprueba en la forma siguiente:

1º - Fomentar especialmente el estudio de las Ciencias matemáticas, físicas y naturales, con sus aplicaciones a las artes, a la industria y a las necesidades de la vida social.

2º - Estudiar las publicaciones, inventos o mejoras científicas, y especialmente las que tengan una aplicación práctica en la República Argentina.

3º - Reunir para este objeto a los ingenieros argentinos y extranjeros, a los estudiantes de ciencias exactas y a las demás personas cuya ilustración científica responda a los fines de esta corporación.

Al nombre de « Academia Científica de Buenos Aires o Argentina » le sucedió el de « Estímulo Científico », para sustituirse el 14 de julio de 1872 por el que hoy ostenta.

Después de tres reuniones preparatorias que presidió el ingeniero don Emilio Rosetti, tiene lugar el 28 del mismo mes de julio, la Asamblea en que queda solemnemente instalada la Sociedad Científica Argentina. Nómbrase la primera Junta Directiva para el ejercicio del año social 1872-73, recayendo la presidencia en el decano de los ingenieros argentinos, don Luis A. Huergo.

Largo e inoportuno sería enumerar en este ágape la obra que nuestra benemérita Sociedad ha realizado durante su larga y fecunda existencia. Me limitaré tan solo a echar una mirada retrospectiva para así poder apreciar el camino recorrido desde sus primeros balbuceos en la época de la organización nacional hasta este momento de plena evolución cultural.

Sin que el cariño pueda, a manera de cristal de aumento, hacernos ver agrandada la participación que la Sociedad Científica ha tenido en el progreso general de la cultura en nuestro país, justo es reconocer su valioso aporte, colaborando con estudios, iniciativas y trabajos; organizando exploraciones del suelo argentino; propulsando nuestra industria naciente; convirtiéndose en hogar intelectual para sapientes y hombres de estudio; engendrando nuevas sociedades que desplegaron una acción conjunta en beneficio de la República; organizando Congresos y concursos científicos que facilitaron un mejor conocimiento de nuestro país en el exterior; difundiendo sus ANALES y convirtiendo, finalmente, su bien dotada biblioteca en Biblioteca Popular.

Y ya que a ésta me he referido, permitidme que aproveche la circunstancia de acompañarnos el Sr. Presidente de la Comisión Protectora de Bibliotecas Populares, Dr. JUAN PABLO ECHAGÜE, honrándonos con su presencia, para expresarle nuestra gratitud, rogándole la haga llegar a sus dignos colaboradores.

La Junta Directiva actual, alentada por el ejemplo de sus beneméritos antecesores, no mezquina esfuerzos para responder a la confianza que en sus componentes depositaron sus asociados y pese a las dificultades de orden económico con que siempre se ha tropezado, sigue con todo empeño tratando de convertir en realidad diversas iniciativas surgidas del seno de la misma.

Tales han sido, entre otras: la creación del Comité de Bibliotecarios — ya en plena labor — destinado a coordinar la suscripción y canje de revistas de carácter científico, técnico y profesional, para mejor conocer el material bibliográfico y aumentarlo, tratando de evitar las superposiciones en la mayoría de los casos.

Con igual tesón, la Junta Directiva se ocupa actualmente de or-

ganizar una Exposición de Instrumental Científico, con el propósito de dar a conocer toda la producción moderna de aquellos países que a su fabricación se dedican, excluyendo los instrumentos que solo pueden revestir un interés histórico.

Esta iniciativa cuenta con el apoyo moral del Ministerio de Justicia e Instrucción Pública, interesándose también por ellas las Embajadas extranjeras, así como los represenfes de fábricas de reconocida fama mundial.

Estamos a la espera de una solución favorable de la parte prosaica de proyecto, la relativa a los fondos necesarios, solicitados al Superior Gobierno, para llevar a la práctica esta feliz iniciativa del Dr. Reinaldo Vanossi, vocal de la Junta Directiva.

El interés que ella ha despertado, la trascendencia de la misma, los beneficios que reportará para estudiosos, gabinetes, laboratorios y Reparticiones Públicas; la posibilidad de conocer y apreciar las últimas conquistas en materia de instrumental técnico y científico, y la no menos importante de poderlo adquirir con mejor y más amplia información que aquélla que nos brindan catálogos y prospectos, nos permite abrigar la esperanza de ver convertido en realidad este proyecto, tanto más cuanto que contamos entre nuestros consocios, al Dr. Fürnkorn, quien, compenetrado del alcance del mismo, está dispuesto a apoyar, con su autorizada opinión, esta demanda, desde el alto cargo que ocupa.

Señores:

Brindo por la prosperidad de la Sociedad Científica Argentina para honra de nuestra patria, y por vuestra ventura personal ».

SECCIÓN OFICIAL

DE LA

SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA

SECCIÓN "SANTA FÉ"

Sesión de comunicaciones del 21 de Junio de 1938

En una de las aulas de la Facultad de Química, y bajo la presidencia del Presidente, Dr. Gustavo A. Fester, se realizó el 21 de Junio, a las 18, una sesión de comunicaciones científicas, considerándose las comunicaciones cuyos resúmenes se publican a continuación:

DETERMINACIÓN DE LA CAPACIDAD DE ADSORCIÓN Y BASES INTERCAMBIABLES EN LOS SUELOS

POR J. GOLLAN (H.) Y O. MALLEA

En esta comunicación los autores proponen un nuevo método para la determinación de los valores de la máxima capacidad de adsorción, del estado de saturación y del estado de insaturación en los suelos.

LÍMITE LÍQUIDO EN SUELO. - COMPARACIÓN

POR VICTOR S. NICOLLIER

En esta comunicación el autor estudia comparativamente los métodos para la determinación de esa constante física utilizada para la clasificación de los suelos de subrasantes o de caminos de tierra.

Describe el método americano a mano, el método con el carrito Gollan y el dispositivo americano del Public Roads, comparando este último dispositivo con el carrito Gollan.

ALGUNAS ROCAS DE TIERRA DEL FUEGO

Por GREGORIO KLEER

En esta comunicación el autor estudia algunas rocas provenientes de Tierra del Fuego y facilitadas por el Dr. Gustavo A. Fester. Dichas rocas han sido recogidas: *a*) en la bahía Garibaldi (1); *b*) en Navidad (2) y su naturaleza petrográfica es:

a) Es una roca semi compacta de color verde claro y textura pizarrosa bien visible a simple vista.

Una lámina delgada en corte normal a la pizarrosidad, observada en el microscopio polarizante, en luz natural, deja ver laminillas de mica color verdoso amarillento, que generalmente se consideran como una variedad de muscovita alcalina, dispuestas paralelamente y con la dirección general de la esquistosidad de todos los demás componentes de la roca; y además escasos y pequeños gránulos de mineral de hierro opaco, probablemente pírita, algunos de contorno del peritoedro, intercalados en las capas de los demás componentes.

Entre nícoles cruzados se percibe nítidamente la textura pizarrosa pórfido y lepidoblástica de sus componentes minerales. Estos están dispuestos en varias capas en cada una de las cuales predomina un elemento, capas que en su mayor parte están separadas por otras más delgadas de muscovita verde amarillenta.

Así notamos unas diez capas en que hay láminas relativamente grandes de microclina casi sin alterar, algunas resquebrajadas con su textura de enrejado o tablero de ajedrez, intercaladas entre gran cantidad de granos de cuarzo yuxtapuestos como los de una cuarcita con extinción ondulante (dinamometamorfismo), entre los que se encuentran muchas laminillas de biotita y muscovita dispuestas en capitas delgadas desgajadas. Cada capa está separada de la anterior por una de mica; en todas predomina el cuarzo en granos grandes y chicos en contacto completo entre si, con feldespato microclina principalmente, algunas láminas de plagiolasa, ortosa y micas.

Este predominio de la microclina entre los feldespatos indica que la roca ha estado sometida a procesos cataclásticos predominantes.

Por la abundancia de cuarzo y manera de estar dispuestos sus gra-

(1) Ver G. A. Fester, *La Cordillera Alvear y el valle de Tierra Mayor*, en Revista Minera. Año 1934, pág. 49.

(2) Ver G. A. Fester, *Observaciones en la cordillera fueguina*. (Anales de la Sociedad Científica Argentina. Tomo 119, pág. 180).

nos podría considerarse esta roca como una cuarcita; pero dada la cantidad de microclina que posee además de la muscovita, debemos considerarla como un gneis rico en cuarzo, mineralógicamente ácido, o sea un *Gneis cuarcítico*.

b) Es una roca verdosa con manchas blancas, muy alterada. Al microscopio polarizante en luz natural, es una masa de color verdoso muy resquebrajada y alterada en la que se observa distribuídos algunos cristales de mineral de hierro (¿pirita?). Entre nícoles cruzados, no se observa ningún grano de cuarzo en toda la preparación. Hay grandes láminas de feldespatos totalmente alterados en sericita y caolín. Láminas de mica verde claro, variedad de muscovita, hornblenda, y piroxeno. Todos estos caracteres corresponden a una diorita de textura porfírica, muy alterada, antigua, o sea una *Porfirita*.

LA CORDILLERA DARWIN

POR GUSTAVO A. FESTER

Desde la época de Charles Darwin está en discusión, si la roca metamórfica de la Cordillera Fueguina es de edad mesozóica o paleozóica. Por lo pronto, el material poco metamorfoseado de la Gobernación Nacional: pizarras filíticas, lo consideran hoy día la mayor parte de las autores como jurásico-cretáceo, quedando en duda solamente la edad de la roca del « techo » del batolito de la Cordillera Darwin, en la parte este del Canal de Beagle.

En varias oportunidades fueron visitados algunos puntos de la costa, pero recién mis compañeros de viaje de 1937 escalaron algunas cumbres elevadas, como el Monte Italia (2300 m), trayéndome muestras de rocas de las alturas, que permitieron agregar un cierto complemento a las observaciones de Lovisato, Quensel y Kranck, efectuadas en las zonas bajas.

Además, una visita a la Bahía Júpiter, en el Fjord Negri, me permitió delimitar la zona de las granodioritas, que constituyen casi toda la Península Brecknock, contra la roca metamórfica del techo del batolito granítico. Algunos años antes visité la Bahía Garibaldi, donde estamos en la zona de la roca altamente metamórfica, cerca del contacto con el granito (se observó el gneis, estudiado por el Ing. Kleer, una cuarcita o un granito alterado, más compacto, un esquisto cristalino verde « Grünschiefer »), mientras que el material menos metamorfoseado (la formación Buckland-Yahgen de Kranck) se

nota recién del otro lado del canal, en la Bahía Tres Brazos. Sin embargo, entre toda esta roca « ortometamórfica » de Bahía Garibaldi, se observa también algo de aparentemente « parametamórfica » o sea una filita, pero más metamorfoseada que la de Bahía Tres Brazos y la de la zona de Ushuaia.

Esta observación ya permite interpretarse de tal manera, que la roca de la Cordillera Darwin se distinga solamente por el grado de metamorfismo y no por la edad geológica, de la roca mesozóica del sur y este de la montaña fueguina. Ha sido ya observada por Quensel una transición muy paulatina desde el jurásico normal de Tekenika hacia las filitas poco metamorfoseadas y nada impide suponer, que agentes dinámicos más fuertes hayan producido un grado todavía mayor de metamórfosis, sin intervención del factor tiempo.

Esta suposición ha sido confirmada todavía por las muestras traídas del interior de la Cordillera Darwin. Por lo pronto, un esquisto sericítico del glaciar de Yendegaia tiene un parecido sumamente grande con el material observado por Kranck y el autor en las Cordilleras Sorondo y Alvear (zona de Ushuaia) y que resulta un pórfido cuarcífero, de edad probablemente suprajurásica, alterado por el dinamometamorfismo de los sobreescurrimientos. Igualmente importantes parecen las muestras que provienen de las cumbres mismas de la Cordillera Darwin. Fuera de una cuarcita, que constituye en parte la cresta central de la cordillera, parece que el material principal de esta y de la cresta sur es otra vez una filita obscura, fuertemente metamorfoseada, como lo prueba especialmente una muestra tomada de la cumbre del Monte Italia. Creemos entonces muy probable, que la roca de la Cordillera Darwin y la de Ushuaia sean de la misma edad y ambas de la época mesozóica. Este concepto, que en el fondo no es otro que el del gran naturalista inglés, concuerda también con las observaciones de Feruglio en los Lagos Argentinos y Viedma, encontrándose un tránsito muy paulatino desde los sedimentos jurásicos-cretáceos a la roca metamórfica y faltando formaciones de mayor edad que el pórfido cuarcífero suprajurásico.

DOSAJE DEL MANGANESO CON LA FORMALDOXINA

POR JOSE CRUELLAS Y R. VALETTO

Las dificultades que presenta el dosaje del manganeso en forma de MnO_4K, con el fotómetro de Pulfrich para concentraciones inferiores a 0,001 % de Mn, debido a la distinta tonalidad que adquiere, y que origina diferentes valores del coeficiente $K = \frac{\text{Concentración}}{\text{Lectura}}$ se eliminan aplicando este método.

La reacción del manganeso con la formaldoxina (CH_2NOH) presenta la ventaja de ser muy sensible, de producir con el manganeso cualquiera que sea su grado de oxidación, en medio alcalino una coloración anaranjada, por la formación del complejo siguiente: $Mn(CH_2NO)_3 . 2H_2O$, según Hofman y Ehrhart; que es estable a la temperatura ambiente y en el b.m hirviente durante 15 minutos, y que se presta para la colorimetría; en efecto la coloración desarrollada con el manganeso evoluciona hacia un límite que se alcanza después de 30 minutos.

El Fe que da una reacción análoga en las mismas condiciones puede ser eliminado según Kahane, por medio del $Zn(OH)_2$; este precipita el Fe trivalente sin tocar el Mn bivalente.

Por adición de 1 cm^3 de una solución de CNNa al 12 ‰ alcalinizada con 5 ‰ de Na(OH) se inhibe la coloración de la formaldoxina con los cationes Ni y Co a la concentración de 6 gr ‰ y del Cu a la concentración de 2,5 gr ‰, según M. Saraví.

Reactivo: *Formaldoxina*. — Se disuelven 2 gr de clorhidrato de hidroxilamina y 1 cm^3 de formol al 40 % en 50 cm^3 de agua destilada.

Hidrato de zinc. — Para prepararlo se trata una solución de 50 gr de sulfato de zinc en un litro de agua con un ligero exceso de amoníaco. El precipitado lavado por decantación con agua destilada es diluído en 500 cm^3 de agua. El $Zn(OH)_2$ es conservado así bajo forma de una pasta fluida que sirve para la separación del Fe.

El líquido estudiado es llevado cerca de la neutralidad por medio del carbonato de sodio o de amonio. Se coloca en un tubo de centrífuga y se le adiciona una cantidad conveniente (de 3 a 4 cm^3) de

pasta de hidrato de zinc; agitando 1 ó 2 minutos. Se centrifuga y decanta el líquido límpido. Se lava el resíduo con unos cm[3] de agua destilada y centrifuga nuevamente (con dos lavajes es suficiente). En estas condiciones el Fe y el Mn se separan cuantitativamente y el dosaje colorimétrico del Mn no es perturbado. Al líquido se lo alcaliniza y luego se agregan 2 gotas de reactivo (formaldoxima) dejando transcurrir unos 30 minutos para la observación y completando previamente a un volumen dterminado.

Preparación de la solución tipo de sulfato de manganeso para las determinaciones con el fotómetro de Pulfrich. — Según P. Pascal la pérdida dé agua de cristalización del $SO_4Mn.4H_2O$ se verifica de la siguiente manera: Por calefacción del $SO_4Mn.4H_2O$ a 98°→ da $SO_4Mn.2H_2O$.

Por calefacción prolongada del $SO_4Mn.2H_2O$ → da $SO_4Hn.1H_2O$.

Y el $SO_4Mn.1H_2O$ recién a 280° - 300° pasa a → SO_4Mn..

Para obtener una solución tipo calentamos en estufa a 100° durante 48 horas el $SO_4Mn.4H_2O$, y lo consideramos totalmente transformado en $SO_4Mn.1H_2O$. Lo que luego se constató por el dosaje del Mn de la misma, en forma de P_2O_7Mn (según Treadwell).

Determinación del coeficiente $K = \frac{\text{Concentración}}{\text{Lectura}}$ *con el fotómetro de Pulfrich.* — Se efectuaron determinaciones variando las concentraciones de la solución tipo y el color del vidrio interpuesto para espesores de 10 mm de solución.

Las condiciones máe favorables para efectuar las lecturas son para concentraciones comprendidas entre 0,000104 y 0,0006 gr de Mn % en el líquido. Para el vidrio Nº 2 (azul) el coeficiente resultó igual a 0,0000568 y para el vidrio Nº 4 (amarillo) igual a 0,000071.

Ingluencia del tiempo en el desarrollo de la coloración. — Se hicieron lecturas con el fotómetro a medida que iba transcurriendo el tiempo, observándose que el valor máximo corresponde a los 30 minutos de iniciada la reacción y que se mantiene constante aún al día siguiente.

Influencia de la cantidad de $Zn(OH)_2$ *agregada.* — Las determinaciones efectuadas variando la cantidad de hidrato de zinc agregada a una misma cantidad de solución tipo y a un líquido conteniendo 1,57 % de Fe muestran que un agregado de 3 ó 4 cm[3] de pasta

de hidrato de zinc prácticamente no retienen con un solo lavaje; Mn en el residuo de la decantación, y que el líquido límpido no acusa reacción de Fe.

Influencia del número de lavajes. — Los ensayos efectuados con la solución tipo en varias concentraciones y con un agregado de 10 cm^3 de hidrato de zinc, pusieron de manifiesto que el tercer lavaje por centrifugación, prácticamente había arrastrado todo el manganeso existente.

Ciclo de conferencias

QUÉ SON Y PARA QUÉ SIRVEN LAS DIATOMEAS

CONFERENCIA DEL DR. JOAQUIN FRENGUELLI

El 1º de julio tuvo lugar en el salón de la Facultad de Química Industrial y Agrícola de Santa Fe la conferencia organizada por la Sección Santa Fe de la Sociedad Científica Argentina, a cargo del Director del Museo de La Plata, Dr. Joaquín Frenguelli, sobre el tema: « Qué son y para qué sirven las Diatomeas ».

Dicha conferencia fué ilustrada con proyecciones luminosas y se realizó bajo los auspicios del Instituto Social de la Universidad Nacional del Litoral.

Después de exponer brevemente las principales nociones acerca de la morfología, la biología y los criterios taxonómicos en que se funda la clasificación de las Diatomeas, mostrando con dibujos y excelentes microfotografías ejemplares típicos de estos microorganismos, el doctor Frenguelli explicó con las siguientes palabras para qué sirven la Diatomeas:

PARA QUÉ SIRVEN LAS DIATOMEAS

A pesar de que estas Algas microscópicas son poco conocidas hasta para muchos naturalistas, las diatomeas forman una clase de microorganismos de suma importancia por su extraordinaria difusión y por el papel que desempeñan en la economía de la Naturaleza. Al

estado viviente y fósil ellas encuentran, además, una aplicación amplia en la Ciencia, en el Arte, en la Técnica, en la Industria y en la Economía humana.

En la Ciencia, su estudio, bajo el nombre de Diatomología, constituye una rama del humano saber, que es necesario cultivar para el conocimiento integral de la Naturaleza que nos rodea.

Proporciona, además, nociones subsidiarias, pero importantes, para otras ramas de la Ciencia y especialmente para la Geología. La acumulación de los despojos diatómicos en mares y cuencas continentales en varias épocas (particularmente durante el Mioceno y el Pleistoceno) fué tan intensa que llegó a formar depósitos y luego rocas (« tierra de infusorios », trípoli o *Kieselguhr*) de grandiosa extensión vertical y horizontal.

Especialmente conocidos son los de California, de las Antillas, de Nueva Zelandia, España, Grecia, Italia y Africa septentrional, incluso el depósito de la ciudad de Trípoli que, por ser explotado desde la remota antigüedad clásica, dió uno de sus nombres a la roca.

Estos depósitos, formados por cantidades enormes de los pequeños frústulos silíceos, se acumularon de la misma manera como hoy se sedimentan los « limos de Diatomeas » que, según cálculos de Murray y Renard, cubren el fondo de los mares peripolares (especialmente periantárticos) por una extensión de 10 millones de km^2.

Diseminados en las demás rocas sedimentarias, los diminutos frústulos diatómicos constituyen elementos paleontológicos (microfósiles) importantes para determinaciones estratigráficas y cronológicas, sobre todo ahí donde, como ocurre a menudo, falta el subsidio de los macrofósiles: en estos casos, es difícil que en los sedimentos, convenientemente preparados, el microscopio no descubra algunos (a veces muchos) frústulos capaces de subsanar la falta de otro elemento paleontológico y de orientarnos en la solución de nuestros problemas.

Pero, donde más resulta valioso el subsidio diatomológico es en la investigación genética de los sedimentos y en la reconstrucción del ambiente físico y biológico de su acumulación. Las Diatomeas en efecto, constituyen los reactivos más sensibles a las condiciones y a las modificaciones del medio ambiente; no tanto las especies examinadas separadamente como sus poblaciones, sus conjuntos de formas, constituyendo ordinariamente sinecias numerosas y propias para las diferentes condiciones mesológicas, variables y variantes, en relación con sus exigencias ecológicas, y con las evoluciones del medio en el espacio y en el tiempo. Es así que se constituyen sinecias

entre sí muy diferentes en la costa y en la masa de los Océanos, en la superficie y en el fondo de los mares, en los estuarios, en las lagunas, en los charcos, en los pantanos, en las turberas, en las surgentes y en la rocas húmedas, en las aguas dulces y en las de diferente grado de salobredad, en las aguas frías y en las cálidas, en las llanuras y en las montañas, en las fuentes termales y en las aguas de deshielo de calotas polares y ventisqueros.

En Geología, recientemente, las Diatomeas sirvieron también para ensayar teorías acerca del tan debatido origen del petróleo. Se consideró que la acumulación de las gotitas que existen en el protoplasto diatómico (2 a 10 por cada célula, representando desde 5 hasta el 50 % del contenido citoplástico), pudo haber proporcionado la materia prima para los depósitos petrolíferos de California, asociados a grandes acumulaciones tripoláceas.

Las Diatomeas, al estado viviente, proporcionan elementos subsidiarios valiosos para muchos problemas propios de la oceanografía; particularmente para el estudio del recorrido y del alcance de las corrientes marinas, problema de solución difícil con todos los demás medios hasta ahora ensayados. Su extrema sensibilidad a las diferencias de contenido salino y de la temperatura de las aguas, determina apreciables diversidades de formas en la masa oceánica y en las aguas de las corrientes que forman corredores en el seno de la masa misma. Es así que el predominio de *Campylodiscus striatus* pudo definir el recorrido de la « corriente del Golfo ». De la misma manera, la presencia de *Biddulphia sinensis* en el océano frente a Mar del Plata, me permitió afirmar que la « corriente del Brasil », desde el mar Caribe, frente a la costa de las Guayanas (donde la diatomea mencionada forma un centro endémico bien conocido) en épocas favorables puede alcanzar nuestras costas atlánticas; así como también la presencia de *Corethron criophilum* en la Bahía de San Blas, me reveló con certeza que la « corriente de las Malvinas », desde las aguas frías periantárticas (donde el mencionado *Corethron* vive en ambiente propio y exclusivo) logra alcanzar, acaso en invierno, las costas australes de la provincia de Buenos Aires.

En fin, como elemento subsidiario, los frústulos diatómicos sirven a las ciencias médicas, para provocar sólidos coágulos venosos, como estimulante de la mucosa gastro-intestinal (de la misma manera que el caolín u otros polvos inertes) y para el estudio del origen y de la evolución de algunos tumores malignos: así, por ejemplo, el sarcoma de Rous, cuyos fibrobastos atípicos e invasores pudieron ser reproducidos en los músculos de la gallina, por Poduwissosky en Europa, por Tello, Brachetto - Brian, entre nosotros.

En el Arte, los admirables y variados adornos de las valvas diatómicas pueden proporcionar una fuente inagotable de motivos ornamentales.

En la Técnica fué el frústulo de las diatomeas que determinó el notable perfeccionamiento del microscopio moderno. El afán de los diatomólogos en resolver cada vez más y mejor la finísima estructura de la valva diatómica los obligó a buscar medios ópticos cada vez más poderosos y perfectos. Y especialmente al diatomólogo belga Henry van Heurck debemos los más grandes progresos en este sentido, progresos que no sólo beneficiaron a la Diatomología, sino también a la Medicina y a todas las ramas de la Ciencia que se valen del microscopio para sus investigaciones.

En las diferentes ramas de la Industria, las diatomeas hallan una aplicación amplia, especialmente en su estado fósil, esto es como trípoli: como polvo para limpiar metales, consiguiéndose con el trípoli el mejor lustre que puede conseguirse con frotación;

para fabricar pastas y polvos dentífricos, de acción eficaz, pero poco recomendables porque su uso prolongado desgasta el esmalte dentario;

para fabricar ciertos vidrios, porcelanas y objetos refractarios, muy resistibles al calor, debido a la indestructibilidad de la sílice del frústulo diatómico frente a las más altas temperaturas;

para fabricar ciertos filtros, como los que se usan para sueros, vacunas y toxinas bactéricas, muy eficaces por la extrema finura de la estructura de las valvas diatómicas y por su elevada resistencia a los ácalis y a los ácidos;

para substituir el amianto en el revestimiento de tubos para vapor, en tubos de aparatos de refrigeración, y en todos los casos en que se necesita un material no combustible ni conductor;

en la fabricación de la dinamita (sistema Nobel), en la cual las microscópicas celdillas de los frústulos diatómicos desmenuzan la nitroglicerina en sus poros infinitamente pequeños y, transformándola prácticamente en sólido, la hacen de fácil conservación y resistente, sin explotar, al choque y a las temperaturas ordinarias.

En la Economía humana, puede recordarse que especialmente los depósitos de las diatomeas dieron alimento de los geófagos prehistóricos y lo dan hoy a los geófagos salvajes actuales. Posiblemente la substancia alimenticia de los trípolis está constituída por los restos del endocromo que forma una parte considerable del contenido citoplástico de la célula diatómica, muy resistente al desecamiento y a la descomposición por putrefacción. Pero, en vista del escaso va-

lor alimenticio de los restos endocrómicos, cabe pensar que, más que un alimento, los geófagos buscan en el trípoli un oportuno estimulante de la mucosa gastro-intestinal.

Mucho más importantes, desde el punto de vista económico, son las Diatomeas para la industria de la pesca y la piscicultura. Para comprenderlo, debemos pensar en que las Diatomeas forman el alimento fundamental, directa o indirectamente, de todos los seres acuátiles. En efecto, de ellas se nutren la mayor parte de los organismos fitófagos que, a su vez, alimentan a los carnívoros. Entre los fitófagos de valor económico que se sirven de las diatomeas como alimento exclusivo recordaré, por ejemplo, las ostras, las almejas y los pequeños peces, entre los cuales las sardinas. Recordaré también los copépodos, pequeños crustáceos, de que se alimentan exclusivamente una gran cantidad de especies diferentes de peces y otros seres acuáticos comestibles.

La importancia de las Diatomeas desde este punto de vista es tan grande que bien pudo afirmarse que ellas, en todas las aguas, representan los que las hierbas y los pastos son en la superficie de los continentes.

No será posible fundar sobre bases racionales las leyes que regulan la pesca y no será posible resolver de una forma científica y provechosa los diferentes problemas de la piscicultura, si antes no estudiaremos las Diatomeas que pueblan nuestras aguas, su distribución, sus migraciones, así como también las relaciones que existen entre las diferentes especies de Diatomeas y los diversos seres, especialmente los de valor económico, que se alimentan de ellas.

Es por eso que todas las naciones que traen de la pesca y de la piscicultura la fuente principal de su alimentación y de sus recursos económicos han intensificado el estudio de las Diatomeas y han fundado un sinnúmero de estaciones hidrobiológicas principalmente destinadas al mismo fin.

En efecto, la presencia o la ausencia, permanente o estacional, en determinados mares y en determinadas costas, las migraciones de especies ictiológicas y de enjambres, la posibilidad o imposibilided de realizar la cría de peces y de moluscos en determinadas lagunas y en determinadas costas marinas, más que de los factores ecológicos ordinariamente apreciados, dependen principalmente de la presencia o la ausencia de Diatomeas, o, mejor, de ciertas Diatomeas, y de sus desplazamientos verticales y horizontales, determinados por las corrientes, por las actividades biológicas de las Diatomeas mismas o por cambios mesológicos (ecológicos y fenológicos). Y, si bien estos

hechos en gran parte están condicionados por situaciones estables o variables del medio ambiente, el estudio de las Diatomeas ofrece el índice más sensible y prácticamente más certero para revelar y apreciar estas condiciones, por su calidad y cantidad, por su extrema sensibilidad a los caracteres del medio físico y a las variaciones de los factores ecológicos, muchos de los cuales escapan a nuestra apreciación, a nuestros análisis realizados con los medios ordinariamente provistos por la física y la química.

Y repetiré con el diatomólogo norteamericano Alberto Mann: « El valor de las diatomeas en este sentido sólo recientemente ha comenzado a apreciarse. Es muy extraño que el estudio de este importante argumento haya sido tan largamente diferido; tan extraño como si los agricultores hubieran persistentemente descuidado el estudio del cultivo de aquellos forrajes de los cuales depende el bienestar de su ganado. El enorme valor, para los habitantes de todos los países, de las pesquerías en el mundo, da la medida de la importancia del estudio de estos diminutos organismos, íntimamente vinculados al problema de la alimentación de los peces. Cuando la flora diatómica de nuestras costas y de nuestros mares abiertos será suficiente conocida, recién entonces estaremos en condiciones de comprender mejor cietros problemas, como la migración de los peces y la preponderancia de ciertas especies en determinadas aguas; y no es improbable que entonces podrán descubrirse medios adecuados para aumentar el alimento de los peces y mejorarlo, de la misma manera como la agrostología trabaja para el mejoramiento de la industria del ganado ».

SERIES SIMPLES Y DOBLES DE DIRICHLET Y DE FACULTAD ASINTÓTICAS

Por J. C. VIGNAUX

Se debe a H. Poincaré (1) la importante y fecunda teoría de las *series de potencias asintóticas*, la cual permite representar asintóticamente una función $f(z)$ real o compleja, mediante una serie de potencias del tipo

$$\sum_0^\infty \frac{a_m}{z^n}$$

convergente o divergente. Esta teoría ha dado lugar a varios trabajos fundamentales y a numerosas aplicaciones en el dominio de la matemática pura y aplicada.

Su extensión a las series dobles de potencias del tipo

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty \frac{a_{m,n}}{x^m y^n}$$

así como sus aplicaciones a la *transformada doble de Laplace* y a las funciones *cuasianalíticas de dos variables*, cuestiones íntimamente ligadas con la teoría de los *momentos dobles.*, nos hemos ocupado ya anteriormente (2).

En la presente memoria propongo algunas generalizaciones y extensiones con la introducción de la representación asintótica de las funciones de una y de dos variables, mediante series de Dirichlet y series de facultad.

(1) H. Poincare, *Acta Mat.* t. 8 (1886).

(2) J. C. Vignaux, *Series doble asintóticas,* «Anales de la Soc. Cient. Argentina». En esta nota damos la bibliografía sobre las series asintóticas.

El trabajo comprende tres capítulos. En el primero, después de definir la correspondencia asintótica mediante series de Dirichlet del tipo

$$[2] \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z} \quad \text{y} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{m,n}}{m^z\, n^w} \qquad [3]$$

y de dar la extensión correspondiente del método de Stieljes, se prueban cuáles son las operaciones fundamentales que se pueden efectuar sobre tales desarrollos.

Luego se extienden todos estos resultados a las series dobles del tipo [3].

En el II Capítulo generalizaremos estos resultados a las series simples y dobles de Dirichlet del tipo

$$\sum_{0}^{\infty} a_n\, e^{-\lambda_n z} \quad , \quad \sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} a_{m,n}\, e^{-\lambda_m x - \mu_n y}$$

En el último capítulo, se estudian las series asintóticas de facultad simples y dobles.

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{a_n\, n!}{z(z+1)\ldots(z+n)} \, ,$$

$$\sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} \frac{a_{m,n}\, n!\, m!}{z(z+1)\ldots(z+n)w(w+1)\ldots(w+m)}$$

CAPITULO I

I. — SERIES SIMPLES DE DIRICHLET

DEFINICIONES. — Dada la serie

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{a_n}{n^z} \qquad [1]$$

de la variable compleja $z = x + i\,y$, definida en el semiplano $R(z) > 0$, diremos que la $f(z)$ tiene por *desarrollo asintótico* (D) la serie [1] si la expresión

$$\varepsilon_n(z) = n^z \left(f(z) - \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i^z} \right) \longrightarrow 0 \qquad [2]$$

cuando $z \longrightarrow \infty$ y $n = 1, 2, 3, \ldots$

De la [2] resulta la igualdad

$$f(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i^z} + \frac{\varepsilon_n(z)}{n^z} \qquad \begin{cases} \varepsilon_n(z) \longrightarrow 0 \\ n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases} \qquad [3]$$

y recíprocamente.

Esta correspondencia se indicará con la notación

$$f(z) \sim \sum_{0}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$$

TEOREMA I. — *Si una función admite un desarrollo asintótico* (D), *este es único.*

En efecto; supongamos que

$$f(z) \sim \sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$$

y

$$f(z) \sim \sum_{1}^{\infty} \frac{b_n}{n^z}$$

se tiene entonces

$$f(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i^z} + \frac{\varepsilon_n(z)}{n^z} \qquad \varepsilon_n(z) \longrightarrow 0$$

$$f(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{i^z} + \frac{\delta_n(z)}{n^z} \qquad \delta_n(z) \longrightarrow 0 .$$

De aquí resulta

$$0 = \frac{a_1 - b_1}{1^z} + \frac{a_2 - b_2}{2^z} + \ldots + \frac{a_n - b_n}{n^z} + \frac{\varepsilon_n(z) - \delta_n(z)}{n^z} ,$$

la cual para $z \longrightarrow \infty$, nos da

$$a_1 = b_1 .$$

Reemplazando este valor en la anterior y multiplicando ambos miembros por 2^z, se tiene

$$0 = a_2 - b_2 + \ldots + (a_n - b_n)\left(\frac{2}{n}\right)^z + [\varepsilon(z) - \delta(z)]\left(\frac{2}{n}\right)^z$$

de la cual para $z \longrightarrow \infty$ se deduce

$$a_2 = b_2 ,$$

y continuando de este modo resulta sucesivamente

$$a_3 = b_3 \ldots \quad a_n = b_n .$$

Desarrollo en serie asintotica (D). — El desarrollo de una función en serie asintótica (D), se puede obtener del siguiente modo:

Sea $f(z)$ una función tal que

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = a_1 \qquad (a_1 \text{ finito})$$

y supongamos además

$$\lim 2^z [f(z) - a_1] = a_2 \qquad \text{es decir} \quad 2^z \left[f(z) - a_1 - \frac{a_2}{a_3} \right] \longrightarrow 0$$

$$\lim 3^z \left[f(z) - a_1 - \frac{a_2}{2^z} \right] = a_2 \qquad \text{»} \qquad 3^z \left[f(z) - a_1 - \frac{a_2}{2^z} - \frac{a_3}{3^z} \right] \longrightarrow 0$$

y en general

$$\lim n^z \left[f(z) - a_1 - \frac{a_1}{2^z} - \ldots \frac{a_{n-1}}{n^z} \right] = a_n .$$

Este proceso nos conduce al desarrollo asintótico (D)

$$f(z) \sim \sum_{0}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$$

y constituye, por tanto la extensión del algoritmo de Stieljes.

2. Operaciones fundamentales. — Una vez definida la correspondencia entre una función y su desarrollo asintótico del tipo anterior, probaremos que dicha correspondencia se conserva en las operaciones fundamentales.

Suma. — *Si las funciones $f(z)$, $g(z)$ tienen por desarrollos asintóticos (D) respectivamente*

$$f(z) \sim \sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}, \quad g(z) \sim \sum_{1}^{\infty} \frac{b_n}{n^z}$$

resulta entonces

$$f(z) \pm g(z) \sim \sum_{1}^{\infty} \frac{a_n \pm b_n}{n^z}.$$

En efecto, por hipótesis es

$$f(z) = \sum_{1}^{n} \frac{a_p}{p^z} + \frac{\varepsilon_n(z)}{n^z} \qquad \varepsilon_n(z) \longrightarrow 0$$

y

$$g(z) = \sum_{1}^{n} \frac{b_p}{p^z} + \frac{\delta_n(z)}{n^z} \qquad \delta_n(z) \longrightarrow 0$$

Por tanto

$$f(z) \pm g(z) = \sum_{1}^{n} \frac{a_p \pm b_p}{p^z} + \frac{\eta_n(z)}{n^z}$$

donde

$$\eta_n(z) = \varepsilon_n(z) \pm \delta_n(z).$$

Puesto que

$$\lim_{z \to \infty} \eta_n(z) = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

la relación anterior prueba el teorema.

PRODUCTO. — *Si las funciones* $f(z)$ y $g(z)$ *tienen por desarrollo asintótico* (*D*) *a*

$$f(z) \sim \sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z} \quad , \quad g(z) \sim \sum_{1}^{\infty} \frac{b_n}{n^z} \qquad [1]$$

se tiene entonces

$$f(z) \cdot g(z) \sim \sum_{1}^{\infty} \frac{c_n}{n^z}$$

donde el segundo miembro es la serie producto (Dirichlet)(¹) *de las series* [1] *y* [2].

Por hipótesis

$$f(z) = \sum_{1}^{n} \frac{a_p}{p^z} + \frac{\varepsilon_n(z)}{n^z} = f_n + \frac{\varepsilon_n(z)}{n^z} \qquad \varepsilon_n(z) \longrightarrow 0$$

$$g(z) = \sum_{1}^{n} \frac{b_p}{p^z} + \frac{\delta_n(z)}{n^z} = g_n + \frac{\delta_n(z)}{n^z} \qquad \delta_n(z) \longrightarrow 0$$

cuando $z \longrightarrow \infty$. De aquí resulta

$$f(z) \cdot g(z) = f_n\, g_n + f_n \frac{\delta_n}{n^z} + g_n \frac{\varepsilon_n}{n^z} + \frac{\varepsilon_n \cdot \delta_n}{n^{2z}} . \qquad [1]$$

(¹) Dadas las dos series $\sum_{1}^{\infty} u_n$ y $\sum_{1}^{\infty} v_n$ se llama serie producto en el sentido de Dirichlet, a la serie

$$u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_1) + (u_1 v_3 + v_3 u_1) + \dots$$

cuyos términos se obtienen asociando los factores $u_r v_s$ de modo que el producto $r\,s$ de sus índices sea 1, luego en el cual el producto de los mismos sea 2, y así sucesivamente; el término de rango p es, por tanto,

$$c_p = \sum_{rs=p} u_r v_s .$$

Haciendo el producto *formal* de las dos series de Dirichlet

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{u_n}{n^x} \quad , \quad \sum_{1}^{\infty} \frac{v_n}{n^x}$$

con la regla anterior resulta una serie de Dirichlet del mismo tipo.

Los teoremas de Cauchy, Mertens, Abel, Hardy, relativos a la multiplicación con la *regla de Cauchy*, tienen sus análogos para el producto según la regla anterior.

G. H. HARDY y M. RIEZ, *The General Theory of Dirichlet Series.*

H. HARDY, *On the multip. of Dirichlet series,* Proc. Lind. Math. Soc., 1912.

Además

$$
\begin{aligned}
f_n\, g_n = \; & a_1\, b_1 + \frac{a_2\, b_1}{2^x} + \frac{a_3\, b_1}{3^x} + \dots + \frac{a_n\, b_1}{n^x} \\
& + \frac{a_1\, b_2}{2^x} + \frac{a_2\, b_2}{2^x . 2^x} + \dots \qquad + \frac{a_n\, b_2}{n^x . 2^x} \\
& + \frac{a_1\, b_3}{3^x} + \frac{a_2\, b_3}{2^x . 3^x} + \dots \qquad + \frac{a_n\, b_3}{n^x . 3^x} \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \dots\dots \\
& + \frac{a_1\, b_n}{n^z} + \dots \qquad\qquad + \frac{a_n\, b_n}{n^z . n^x} ,
\end{aligned}
$$

e indicando con

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{c_p}{p^z}$$

la suma de los n primeros términos de la serie producto (D) y con $P(z)$ el polinomio formado con la suma de los restantes términos del cuadro anterior; se tiene

$$f_n \cdot g_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{c_p}{p^z} + P(z) .$$

La igualdad [1] resulta

$$n^z \left[f(z) \cdot g(z) - \sum_{p=1}^{n} \frac{c_p}{p^z} \right] = f_n\, \delta_n + g_n\, \varepsilon_n + \frac{f_n \cdot g_n}{n^z} + P(z)\, n^z$$

Puesto que:

$$\lim f(z) = a_1 \quad , \quad \lim g(z) = b_1 \quad \text{y} \quad \lim P(z)\, n^z \longrightarrow 0$$

resulta entonces

$$\lim_{z \to \infty} n^z \left[f(z)\, g(z) - \sum_{p=1}^{n} \frac{c_p}{p^z} \right] = 0$$

lo cual prueba el teorema.

DIVISION. — *Si*

$$f(z) \sim \sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z} \quad , \quad g(z) \sim \sum_{1}^{\infty} \frac{b_n}{n^z}, \quad (b_1 \neq 0)$$

son los desarrollos asintóticos (D) respectivamente de $f(z)$ *y* $g(z)$*; se tiene entonces*

$$\frac{f(z)}{g(z)} \sim \sum_{1}^{\infty} \frac{d_n}{n^z}$$

donde los coeficientes d_n *se determinan mediante las ecuaciones*

$$a_1 = b_1 d_1$$

$$a_2 = b_1 d_2 + b_2 d_1$$

$$a_3 = b_1 d_3 + b_3 d_1$$

$$a_4 = b_1 d_4 + b_2 d_2 + b_4 d_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Por hipótesis

$$f(z) = \sum_{p=1}^{n} \frac{a_p}{p^z} + \frac{\varepsilon_n(z)}{n^z} = f_n + \frac{\varepsilon_n}{n^z}, \qquad \varepsilon_n(z) \longrightarrow 0$$

$$g(z) = \sum_{p=1}^{n} \frac{b_p}{p^z} + \frac{\delta_n(z)}{n^z} = g_n + \frac{\delta_n}{n^z}, \qquad \delta_n(z) \longrightarrow 0.$$

De aquí se deduce

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f_n}{g_n} + \eta_n(z) \quad , \quad \eta_n(z) = \frac{\dfrac{\varepsilon_n}{n^z} - \dfrac{f_n}{g_n}\dfrac{\delta_n}{n^z}}{g_n + \dfrac{\delta_n}{n^z}} \qquad [1]$$

y puesto que

$$f_n \longrightarrow a_1 \quad , \quad g_n \longrightarrow b_1 \neq 0 \quad , \quad z \longrightarrow \infty$$

resulta

$$\eta_n(z) \longrightarrow 0 .$$

Consideremos ahora el producto

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{b_p}{p^z} \cdot \sum_{p=1}^{n} \frac{d_p}{p^z} =$$

$$= b_1 d_1 + \frac{d_2 b_1}{2^z} + \frac{d_3 b_1}{3^z} + \ldots + \frac{d_n b_1}{n^z}$$

$$+ \frac{d_1 b_2}{2^z} + \frac{d_2 b_2}{2^z . 2^z} + \ldots \qquad + \frac{d_n b_2}{n^z . 2^z}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{d_1 b_n}{n^z} + \ldots \qquad + \frac{d_n b_n}{n^{2z}}$$

de donde

$$a_1 = b_1 d_1$$

$$a_2 = b_1 d_2 + b_2 d_1$$

$$a_3 = b_1 d_3 + b_3 d_1$$

$$a_4 = b_1 d_4 + b_2 d_2 + b_4 b_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

los segundos miembros se forman con la regla del producto de Dirichlet; resultan entonces determinados los coeficientes d_n en función de a_n y b_n mediante las fórmulas de recurrencia

$$d_1 = \frac{a_1}{b_1} \qquad (b_1 \neq 0)$$

$$d_2 = \frac{a_2 - b_2 d_1}{b_1}$$

$$d_3 = \frac{a_3 - b_3 d_1}{b_1}$$

$$d_4 = \frac{a_4 - b_2 d_2 - b_4 d_1}{b_1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Por tanto, se tiene

$$\frac{f_n}{g_n} = \sum_{p=1}^{n} \frac{d_p}{p^z} + \frac{Q(z)}{g_n}$$

donde $Q(z)$ designa el polinomio formado con la suma de los restantes términos de este cuadro; y la relación [1] resulta

$$n^z \left(\frac{f(z)}{g(z)} - \sum_{p=1}^{n} \frac{d_p}{p^z} \right) = n^z \left(\frac{Q(z)}{g_n} + \eta_n(z) \right).$$

De aquí, teniendo presente que

$$\frac{n^z \,.\, Q(z)}{g_n} \longrightarrow 0 \quad , \quad n^z \,.\, \eta_n(z) \longrightarrow 0 \quad , \quad z \longrightarrow \infty$$

se tiene

$$\lim_{z \to \infty} n^z \left[\frac{f(z)}{g(z)} - \sum_{p=1}^{n} \frac{d_p}{p^z} \right] = 0$$

lo cual prueba el teorema.

INTEGRACIÓN. — *Si*

$$f(z) \sim \sum_{2}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$$

resulta entonces

$$\int_z^\infty f(z)\, dz \sim \sum_{2}^{\infty} a_n \int_z^\infty \frac{dz}{n^z} = \sum_{2}^{\infty} \frac{a_n}{lg\, n} \frac{1}{n^z}$$

la integral esta tomada sobre un semi-rayo de origen z situado en la región $R(z) > 0$.

En efecto; por hipótesis

$$f(z) = \sum_{p=2}^{n} \frac{a_p}{p^z} + \frac{\varepsilon_n(z)}{n^z}, \qquad \varepsilon(z) \longrightarrow 0$$

de donde

$$\int_z^\infty f(z)\, dz = \sum_{p=2}^{n} a_p \int_z^\infty p^{-z}\, dz + \int_z^\infty \varepsilon_n(z) \,.\, n^{-z}\, dz$$

luego

$$\int_z^\infty f(z)\, dz = \sum_{p=2}^{n} \frac{a_p}{lg\, p} \cdot \frac{1}{p^z} + \frac{\eta_n(z)}{n^z} \qquad [1]$$

donde

$$\eta_n(z) = n^z \int_z^\infty \varepsilon_n(z)\, n^{-z}\, dz\,.$$

De la condición $\varepsilon_n(z) \longrightarrow 0$, resulta que fijando un $\delta > 0$ arbitrario existe un $z(\delta)$, tal que

$$|\varepsilon_n(z)| < \delta \quad \text{para} \quad |z| > |z(\delta)|.$$

Entonces

$$|\eta_n(z)| < |n^z| \, \delta \int_z^\infty |n^{-z} \, dz|$$

Además

$$\int_z^\alpha \frac{|dz|}{|n^z|} = \left[- \frac{1}{lg\, n} \frac{1}{|n^z|} \right]_z^\alpha = \frac{1}{lg\, n \,.\, |n^z|} - \frac{1}{lg\, n \,.\, n^\alpha}$$

es decir

$$\int_z^\infty \frac{|dz|}{|n^z|} = \frac{1}{lg\, n} \cdot \frac{1}{|n^z|}$$

luego

$$|\eta_n(z)| < \frac{\delta}{lg\, n}, \quad \text{es decir} \quad \lim_{z \to \infty} \eta_n(z) = 0 \, ;$$

por tanto, teniendo presente la [1], el teorema queda demostrado.

Derivación. — *Si la función $f(z)$ y su derivada $f'(z)$ tienen respectivamente por desarrollo asintótico (D) a*

$$f(z) \sim \sum_2^\infty \frac{a_n}{n^z} \qquad [1]$$

y

$$f'(z) \sim \sum_2^\infty \frac{b_n}{n^z} \qquad [2]$$

entonces la serie [2] es la serie derivada de la [1].

En efecto; aplicando el teorema de la integración a la serie [2], resulta

$$-f(z) \sim \sum_2^\infty \frac{b_n}{lg\, n} \cdot \frac{1}{n^z} \, ; \qquad [3]$$

y por el teorema I y la condición [1] se tiene

$$a_n = - \frac{b_n}{lg\, n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

de donde

$$b_n = - a_n \, lg\, n \qquad [4]$$

La serie derivada de la [1] tiene la forma

$$- \sum_{2}^{\infty} a_n \lg n \, . \frac{1}{n^z} \, ,$$

por tanto, según [4], la serie [2] es la serie derivada de la [1].

Es necesario postular que, tanto la función $f(z)$ como su derivada $f'(z)$ tienen cada una representación asintótica determinada; pues de lo contrario el teorema no es cierto.

Así, la función

$$f(x) = e^{-x} \, . \operatorname{sen}(e^x)$$

x real y positiva tiene por desarrollo asintótico (D)

$$f(x) = e^{-x} \operatorname{sen}(e^x) \sim 0 + \frac{0}{2^x} + \frac{0}{3^x} + \dots$$

mientras que su derivada

$$f'(x) = e^{-x} \, . \operatorname{sen}(e^x) + \cos e^x$$

no tiene por desarrollo asintótico la derivada del desarrollo de $f(x)$, desde que el límite $f'(x)$ no existe.

II. — SERIES DOBLES DE DIRICHLET

3.—Las series dobles de Dirichlet han sido ampliamente estudiadas desde el punto de vista de la convergencia por Kojima (1), Leja (2) Adams (3) y Biggieri (4).

Los resultados expuestos para el caso de las series simples se pueden extender a las series dobles en la siguiente forma.

(1) *On the double Dirichet series*, Sc. Rep. of the Tohokn Imp. Univ., IX, (1915).

(2) F. Leja, *Sur les séries de Dirichlet doubles.* Comptes Rendus du I Congrés des Math. des Pays Slaves, 1929.

(3) C. R. Adams, *Note on multiple Dirichlet and multiple factorial series.* Ann. of Math., 33 (1932).

(4) C. Biggieri, *Tesis doctoral,* Facultad de Ciencias Exactas etc. de Buenos Aires, 1935.

Diremos que la serie doble de Dirichlet del tipo

$$\sum_{1}^{\infty} \sum_{1}^{\infty} \frac{a_{m,n}}{m^x \, n^y}, \qquad [1]$$

de dos variables complejas x e y, representa asintóticamente (D) a la función $f(x, y)$ en la región $\{R(x) > 0, \; R(y) > 0\}$ e indicaremos con la notación

$$f(x, y) \sim \sum_{1}^{\infty} \sum_{1}^{\infty} \frac{a_{m,n}}{m^x \, n^y},$$

si

$$\varepsilon_{m,n}(x, y) = m^x \, . \, n^y \left[f(x, y) - \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{n} \frac{a_{pq}}{p^x \, q^y} \right]$$

tiende a cero, cuando $(x, y) \longrightarrow \infty$, $(m, n = 1, 2 \ldots)$.

Esto equivale a poner

$$f(x, y) = \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{n} \frac{a_{pq}}{p^x \, q^y} + \frac{\varepsilon_{m,n}}{m^x \, n^y}$$

con

$$\varepsilon_{m,n}(x, y) \longrightarrow 0 \quad (x, y) \longrightarrow \infty .$$

Si la función $f(x, y)$ tiene un desarrollo asintótico (D), éste es único, en efecto; supongamos que se tenga a la vez

$$f(x, y) \sim \sum_{1}^{\infty} \sum_{1}^{\infty} \frac{a_{m,n}}{m^x \, n^y}$$

$$f(x, y) \sim \sum_{1}^{\infty} \sum_{1}^{\infty} \frac{b_{m,n}}{m^x \, n^y},$$

es decir

$$f(x, y) = \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{n} \frac{a_{pq}}{p^x \, q^y} + \frac{\varepsilon_{m,n}}{m^x \, n^y}, \quad \varepsilon_{m,n} \longrightarrow 0$$

$$f(x, y) = \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{n} \frac{b_{pq}}{p^x \, q^y} + \frac{\delta_{m,n}}{m^x \, n^y}, \quad \delta_{m,n} \longrightarrow 0$$

De aquí

$$0 = c_{11} + \frac{c_{12}}{2^y} + \frac{c_{13}}{3^y} + \ldots + \frac{c_{1n}}{n^y}$$

$$+ \frac{c_{21}}{2^x} + \frac{c_{22}}{2^x\, 2^y} + \frac{c_{23}}{2^x\, 3^y} + \ldots + \frac{c_{2n}}{2^x\, n^y}$$

$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$+ \frac{c_{n1}}{m^x} + \frac{c_{n2}}{m^x\, 2^y} + \ldots \qquad + \frac{c_{n,m}}{m^x\, n^y} + \frac{\varepsilon_{m,n} - \delta_{m,n}}{m^x\, n^y}$$

donde

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots) .$$

Si en esta relación se hace $(x, y) \longrightarrow \infty$ resulta

$$c_{11} = 0 \quad \text{es decir} \quad a_{11} = b_{11} .$$

Sustituyendo este valor en la relación anterior, multiplicando luego ambos miembros por 2^y y haciendo $(x, y) \longrightarrow \infty$, resulta

$$c_{12} = 0 \quad \text{es decir} \quad a_{12} = b_{12} ;$$

y continuando así, se deduce sucesivamente

$$a_{21} = b_{21} \;,\; a_{22} = b_{22} \;,\; \ldots \; a_{ij} = b_{ij} \ldots$$

Este desarrollo es, por tanto, único. La recíproca no tiene lugar necesariamente

Sea $f(x, y)$ una función tal que

$$\lim_{(x,y) \to \infty} f(x, y) = a_{11} ,$$

donde $R(x) > 0$, $R(y) > 0$; y además que se verifiquen las relaciones siguientes:

$$\lim_{(x,y) \to \infty} 2^x \left[f - a_{11} \right] = a_{21}, \qquad \text{o sea} \qquad 2^x \left[f - a_{11} - \frac{a_{21}}{2^x} \right] \longrightarrow 0$$

$$\lim 2^y \left[f - a_{11} - \frac{a_{21}}{2^x} \right] = a_{12} \quad \text{o sea} \quad 2^y \left[f - a_{11} - \frac{a_{12}}{2^y} - \frac{a_{21}}{2^x} \right] \longrightarrow 0$$

y así sucesivamente.

Este proceso nos conduce al desarrollo asintótico siguiente:

$$\begin{array}{llll} f(x, y) = & a_{11} + \dfrac{a_{12}}{2^y} + \ldots & + \dfrac{a_1}{n^y} + \ldots \\ & + \dfrac{a_{21}}{2^x} + \ldots & + \dfrac{a_{2n}}{2^x n^y} + \ldots \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ & + \dfrac{a_{m1}}{m^x} + \ldots & + \dfrac{a_{m,n}}{m^x n^y} + \ldots \end{array}$$

4.— Las operaciones fundamentales sobre tales desarrollos se conservan.

I. *Si*

$$f(x, y) \sim \sum_1^\infty \sum_1^\infty \frac{a_{m,n}}{m^x n^y}, \qquad [1]$$

$$g(x, y) \sim \sum_1^\infty \sum_1^\infty \frac{b_{m,n}}{m^x n^y}, \qquad [2]$$

resulta entonces

$$f(x, y) \pm g(z, y) \sim \sum_1^\infty \sum_1^\infty \frac{a_{m\,n} \pm b_{m\,n}}{m^x n^y}$$

La demostración se hace como en el caso de la serie simple.

II. *Si* $f(x, y)$ *y* $g(x, y)$ *admiten los desarrollos asintóticos* [1] *y* [2], *se tiene entonces*

$$f(x, y) \cdot g(x, y) \sim \sum_1^\infty \sum_1^\infty \frac{c_{m\,n}}{m^x n^y}$$

donde el segundo miembro es la serie producto (1) *de las series* [1 *y* [2].

(1) Dadas las dos series dobles de Dirichlet

$$\sum_1^\infty \sum_1^\infty \frac{a_{m\,n}}{m^x n^y} \quad [1] \quad , \quad \sum_1^\infty \sum_1^\infty \frac{b_{m\,n}}{m^x n^y} \qquad [2]$$

llamaremos serie producto en el sentido de Dirichlet a la serie doble de Dirichlet

$$\sum_1^\infty \sum_1^\infty \frac{c_{m\,n}}{m^x n^y} \qquad [3]$$

donde

$$c_{p,q} = \sum_{vs=p} \sum_{ij=q} a_{vi}\, b_{sj}$$

Haciendo el producto *formal* de las dos series [1] y [2] resulta una serie de

Por hipótesis

$$f(x, y) = \sum_1^m \sum_1^n \frac{a_{p,q}}{p^x q^y} + \frac{\varepsilon_{m,n}}{m^x n^y} = f_{m,n} + \frac{\varepsilon_{m,n}}{m^x n^y}$$

$$g(x, y) = \sum_1^m \sum_1^n \frac{b_{p,q}}{p^x q^y} + \frac{\delta_{m,n}}{m^x n^y} = g_{m,n} + \frac{\delta_{m,n}}{m^x n^y}$$

donde

$$\varepsilon_{m,n} \longrightarrow 0 \quad , \quad \delta_{m,n} \longrightarrow 0 \quad (x, y) \longrightarrow \infty .$$

De aquí

$$f(x,y) . g(x,y) = f_{mn} . g_{mn} + f_{mn} \frac{\delta_{mn}}{m^x n^y} + g_{mn} \frac{\varepsilon_{mn}}{m^x n^y} + \frac{\varepsilon_{mn} . \delta_{mn}}{m^{2x} . n^{2y}} .$$

Además

$$f_{m,n} . g_{m,n} = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n \frac{c_{pq}}{p^x q^y} + P(x, y)$$

donde

$$\sum_1^m \sum_1^m \frac{c_{pq}}{p^x q^y}$$

indica la suma de los $m . n$ primeros términos de la serie producto (Dirichlet) y $P(x, y)$ el polinomio formado con los términos restantes del rectángulo anterior; por tanto resulta

$$m^x n^y \left[f(x, y) . g(x,y) - \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n \frac{c_{pq}}{p^x q^y} \right] =$$

$$= f_{m,n} \delta_{m,n} + g_{m,n} \varepsilon_{m,n} + \frac{f_{m,n} g_{m,n}}{m^x n^y} + P(x, y) . m^x n^y$$

Dirichlet del mismo tipo desde que según la regla de multiplicación anterior, se tiene

$$c_{m,n} = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n a_{p,q} b_{\frac{m}{p}, \frac{n}{q}} \frac{1}{p^x q^y} . \frac{1}{\left(\frac{m}{p}\right)^x \left(\frac{x}{q}\right)^y}$$

$$= \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n a_{p,q} b_{\frac{m}{p}, \frac{n}{q}} \frac{1}{m^x n^y} .$$

Puesto que

$$\lim f(x, y) = a_{11} \quad , \quad \lim g(x, y) = b_{11} \quad , \quad \lim P(x, y)\, m^x n^y \longrightarrow 0 \,,$$

resulta finalmente

$$m^x n^y \left[f(x, y) \cdot g(x, y) - \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{n} \frac{c_{pq}}{p^x q^y} \right] \longrightarrow 0$$

para $(x, y) \longrightarrow \infty$.

III. *Si $f(x, y)$, $g(x, y)$ admiten los desarrollos asintóticos* [1] *y* [2] *y es $b_{11} \neq 0$ se tiene entonces*

$$\frac{f(x, y)}{g(x, y)} \sim \sum_{1}^{\infty} \sum_{1}^{\infty} \frac{d_{m,n}}{m^x n^y}$$

donde los coeficientes se determinan por la relación

$$a_{pq} = \sum_{rs=p} \sum_{ij=q} d_{sj}\, b_{ri} \,.$$

Conservando la notación del teorema anterior, se puede escribir

$$\frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{f_{m,n}}{g_{m,n}} + \eta$$

donde

$$\eta = \frac{\dfrac{\varepsilon_{m,n}}{m^x n^y} - \dfrac{f_{m,n}}{g_{m,n}} \dfrac{\delta_{m,n}}{m^x n^y}}{g_{m,n} + \dfrac{\delta_{m,n}}{m^x n^y}}$$

Teniendo en cuenta que

$$f_{m,n} \longrightarrow a_{11} \quad , \quad g_{m,n} \longrightarrow b_{11} \neq 0 \quad (z, y) \longrightarrow \infty$$

resulta

$$\eta(x, y) \longrightarrow 0 \,.$$

Además se tiene

$$\frac{f_{m,n}}{g_{m,n}} = \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{n} \frac{d_{p,q}}{p^x q^y} + \frac{Q(x, y)}{g_{m,n}}$$

donde los coeficientes d_{ij} del cociente se determinan por las relaciones

$$a_{12} = b_{11}\,d_{11} \quad , \quad a_{12} = b_{11}\,d_{12} + b_{12}\,d_{11} \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

y $Q\,(x, y)$ el polinomio formado con los términos restantes del rectángulo anterior.

Por tanto

$$m^x\,n^y\left[\frac{f\,(x, y)}{g\,(x, y)} - \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}\frac{d_{p\,q}}{p^x\,q^y}\right] = m^x\,n^y\left[\frac{Q\,(x, y)}{g_{m,n}} + \eta.(x, y)\right]$$

y teniendo presente que

$$\frac{m^x\,n^y\,Q\,(x, y)}{g_{,n}} \longrightarrow 0 \quad , \quad m^x\,n^y\,\eta\,(x, y) \longrightarrow 0$$

resulta entonces

$$\lim_{(x,y)\to\infty} m^x\,n^y\left[\frac{f\,(x, y)}{g\,(x, y)} - \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}\frac{d_{pq}}{p^x\,q^y}\right] = 0$$

lo cual prueba el teorema.

IV. — *Si*

$$f\,(x, y) \sim \sum_{2}^{\infty}\sum_{2}^{\infty}\frac{a_{m,n}}{m^x\,n^y}$$

resulta entonces

$$\int_x^{\infty}\int_y^{\infty} f\,(x, y)\,dx\,dy \sim \sum_{2}^{\infty}\sum_{2}^{\infty}\frac{a_{m,n}}{lgm.lgn}\,\frac{1}{m^x\,n^y}$$

Por hipótesis

$$f\,(x, y) = \sum_{p=2}^{m}\sum_{q=2}^{n}\frac{a_{p\,q}}{p^x\,q^y} + \frac{\varepsilon_{m,n}}{m^x\,n^y} \quad , \quad \varepsilon_{m,n} \longrightarrow 0$$

y considerando en los semiplanos $R\,(x) > 0$, $R\,(y) > 0$, dos semirayos que parten de los puntos x e y respectivamente, se tiene

$$\int_x^{\infty}\int_y^{\infty} f\,(x, y)\,dx\,dy = \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n} a_{pq}\int_x^{\infty}\int_y^{\infty} p^{-x}\,q^{-y}\,dx\,dy +$$
$$+ \int_x^{\infty}\int_y^{\infty}\frac{\varepsilon_{m,n}\,(x, y)}{m^x\,n^y}\,dx\,dy$$

luego

$$\int_x^\infty \int_y^\infty f(x,y)\, dx\, dy = \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{n} \frac{a_{pq}}{lg\, p \cdot lg\, q} \frac{1}{p^x\, q^y} + \frac{\eta_{m,n}}{m^x\, n^y}$$

donde

$$\eta_{m,n} = m^x\, n^y \int_x^\infty \int_y^\infty \varepsilon_{m,n} \cdot m^{-x}\, n^{-y}\, dx\, dy$$

De la condición $\varepsilon_{m,n}(x, y) \longrightarrow 0$, a todo $\delta > 0$ corresponde un X y un Y tal que

$$|\varepsilon_{m,n}(x, y)| < \delta$$

para

$$\{\, |x| > |X| \quad , \quad |y| > |Y| \,\} \; ;$$

luego

$$|\eta_{m,n}| < \frac{\delta}{lg\, m \,.\, lg\, n}$$

es decir

$$\lim_{x,y \to \infty} \eta_{m,n} = 0 \, ,$$

lo cual prueba el teorema.

V. *Si*

$$f(x, y) \sim \sum_1^\infty \sum_1^\infty \frac{a_{m,n}}{m^x\, n^y} \qquad [1]$$

$$f_x'(x, y) \sim \sum_1^\infty \sum_1^\infty \frac{b_{m,n}}{m^x\, n^y} \qquad [2]$$

$$f_y'(x, y) \sim \sum_1^\infty \sum_1^\infty \frac{c_{m,n}}{m^x\, n^y} \qquad [3]$$

entonces las series [2] *y* [3] *se obtienen derivando término a término la serie* [1].

Se prueba inmediatamente aplicando el teorema de la integración a las series [2] y [3] respectivamente, teniendo presente además el teorema I.

CAPITULO II

I. — SERIES ASINTOTICAS DEL TIPO (λ_n)

5. Definiciones. — Dada la serie de Dirichlet de la variable compleja z en el dominio $R(z) > 0$,

$$\sum_0^\infty a_n e^{-\lambda_n z} \qquad (\lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots ; \lambda_0 \geq 0) \qquad [1]$$

diremos que la [1] es el *desarrollo asintótico* (D, λ_n), de la función $f(z)$, si la expresión

$$\varepsilon_n(z) = e^{\lambda_n z} (f(z) - a_0 - a_1 e^{-\lambda_1 z} + \ldots - a_n e^{-\lambda_n z}) \longrightarrow 0 \qquad [2]$$

para $|z| \longrightarrow \infty$.

De la [2] resulta que

$$f(z) = a_0 + a_1 e^{-\lambda_1 z} + \ldots + a_n e^{-\lambda_n z} + \varepsilon_n(x) e^{-\lambda_n z}$$

con

$$\lim_{x \to \infty} \varepsilon_n(z) = 0, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

La correspondencia entre una función dada $f(z)$ y su desarrollo asintótico (D, λ_n) expresaremos del siguiente modo:

$$f(z) \sim a_0 + a_1 e^{-\lambda_1 z} + \ldots + a_n e^{-\lambda_n z} + \ldots$$

El desarrollo asintótico de Poincaré, corresponde al caso particular: $\lambda_n = n$, pues con la sustitución: $e^z = t$, resulta

$$f(z) = F(t) \sim a_0 + \frac{a_1}{t} + \frac{a_2}{t^2} + \ldots + \frac{a_n}{t^n} + \ldots$$

El desarrollo (D) que hemos definido en el capítulo anterior corresponde al caso: $\lambda_n = lg\, n$

Si una función $f(z)$ tiene un desarrollo asintótico (D, λ_n), éste es único, en virtud del siguiente

TEOREMA — I. *Si es*

$$f(z) \sim \sum_{0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$$

y

$$f(z) \sim \sum_{0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$$

resulta entonces:

$$a_n = b_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Por hipótesis

$$f(z) = a_0 + a_1 e^{-\lambda_1 z} + \ldots + a_n e^{-\lambda_n z} + \varepsilon_n(x) e^{-\lambda_n z}$$

y

$$f(z) = b_0 + b_1 e^{-\lambda_1 z} + \ldots + b_n e^{-\lambda_n z} + \delta_n(x) e^{-\lambda_n z}$$

$$\text{lím}\ \varepsilon_n(z) = \text{lím}\ \delta_n(z) = 0.$$

De aquí, resulta

$$0 = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1) e^{-\lambda_1 z} + \ldots + (a_n - b_n) e^{-\lambda_n z} + (\varepsilon_n - \delta_n) e^{-\lambda_n z}$$

Si en esta relación hacemos $x \longrightarrow \infty$, se tiene

$$a_0 = b_0.$$

Reemplacemos este valor en la anterior y multiplicando ambos miembros por $e^{+\lambda_1 z}$, se tiene

$$0 = (a_1 - b_1) + \ldots + (a_n - b_n) e^{-(\lambda_n - \lambda_1) z} + (\varepsilon_n - \delta_n) e^{-(\lambda_n - \lambda_1) z}$$

que para $x \longrightarrow \infty$, nos da

$$a_1 = b_1,$$

y así sucesivamente.

Este desarrollo es por tanto *único*. La recíproca no es cierta necesariamente.

El desarrollo de una función en serie asintótica (D, λ_n), se puede obtener del siguiente modo:

Sea $f(x)$ una función tal que

$$\text{lím} f(z) = a_0 \quad , \quad (a_0 \text{ finito})$$

este número da una aproximación de $f(x)$ para valores muy grandes de z.

Supongamos además que

$$\lim_{x \to \infty} e^{\lambda_1 z} [f(x) - a_0] = a_1 \quad \text{es decir} \quad e^{\lambda_1 z}\left[f(x) - a_0 - \frac{a_1}{e^{\lambda_1 z}}\right] \longrightarrow 0$$

$$\lim_{x \to \infty} e^{\lambda_2 z} [f(z) - a_0 - a_1 e^{-\lambda_1 z}] = a_2$$

esto es

$$e^{\lambda_2 z} [f(z) - a_0 - a_1 e^{-\lambda_1 z} - a_2 e^{-\lambda_2 z}] \longrightarrow 0$$

. . . .

$$\lim_{x \to \infty} e^{\lambda_n z} [f(z) - a_0 - a_1 e^{-\lambda_1 z} - \ldots - a_{n-1} e^{-\lambda_{n-1}}] = a_n .$$

Este proceso nos conduce al desarrollo asintótico (D, λ_n) de la $f(z)$ es decir

$$f(z) = a_0 + a_1 e^{-\lambda_1 z} + \ldots + a_n e^{-\lambda_n z} + \varepsilon_n(z) e^{-\lambda_n}$$

$$\varepsilon_n(x) \longrightarrow 0 \quad z \longrightarrow \infty .$$

6. Operaciones fundamentales. — Una vez definida la correspondencia entre una función y su desarrollo asintótico de tipo dado, probaremos que esta correspondencia se conserva en las operaciones fundamentales.

Suma y producto.— *Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen desarrollo asintótico del mismo tipo* (λ_n),

$$f(z) \sim \sum_0^\infty a_n e^{-\lambda_n z}$$

$$g(z) \sim \sum_0^\infty b_n e^{-\lambda_n z}$$

se tiene entonces

$$f(z) \pm g(z) \sim \sum_0^\infty (a_n \pm b_n) e^{-\lambda_n z}$$

En efecto; por hipótesis es

$$f(z) = \sum_{i=0}^n a_i e^{-\lambda_i z} + \varepsilon_n(x) e^{-\lambda_n z} \qquad \lim_{x \to \infty} \varepsilon_n(z) = 0$$

$$g(z) = \sum_{i=0}^n b_i e^{-\lambda_i z} + \delta_n(z) e^{-\lambda_n z} \qquad \lim_{x \to \infty} \delta_n(z) = 0$$

Por tanto

$$g(z) \pm f(z) = \sum_{i=0}^n (a_i \pm b_i) e^{-\lambda_i z} + \eta_n(x) e^{-\lambda_n z}$$

donde

$$\eta_n(z) = \varepsilon_n(z) + \delta_n(z) ,$$

Puesto que

$$\lim_{x \to \infty} \eta_n(z) \longrightarrow 0 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

el teorema queda demostrado.

Si las funciones $f(z)$ *y* $g(z)$ *tienen* (1) *y* (2) *por desarrollo asintoticas* (D, λ_n) *donde* $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$; $\lambda_{n+1} < n\,\lambda_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *se tiene entonces*

$$f(z) \cdot g(z) \sim \sum_{1}^{\infty} c_n\, e^{-\lambda_n z}$$

donde el segundo miembro es la serie producto (D, λ_n) *de las series* (1) *y* (2). Se prueba como en el caso: $\lambda_n = \log n$.

Integracion. — *Si la función* $f(z)$ *tiene por desarrollo asintótico* (D, λ_n)

$$f(x) \sim \sum_{0}^{\infty} a_n\, e^{-\lambda_n z}$$

entonces se puede integrar término a término, es decir

$$\int_x^{\infty} f(z)\, dz \sim \sum_{0}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n} e^{-\lambda_n z},$$

siempre que y $\lambda_n \neq 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Por hipótesis, se tiene

$$f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, e^{-\lambda_i z} + \varepsilon_n(x) \cdot e^{-\lambda_n z} \quad \text{con} \quad \varepsilon_n(z) \longrightarrow 0$$

de donde

$$\int_z^{\infty} f(z)\, dz = \sum_{i=0}^{n} a_i \int_z^{\infty} e^{-\lambda_i z}\, dz + \int_z^{\infty} \varepsilon_n(z)\, e^{-\lambda_n z}\, dz$$

luego

$$\int_z^{\infty} f(z)\, dz = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{\lambda_i} e^{-\lambda_i z} + \eta_n\, e^{-\lambda_n z}$$

habiendo puesto

$$\eta_n(z) = e^{\lambda_n z} \int_x^{\infty} \varepsilon_n(z)\, e^{-\lambda_n z}\, dz .$$

De la condición $\varepsilon_n(z) \longrightarrow 0$, resulta que fijado un $\delta > 0$ arbitrario, existe un $z(\lambda)$, tal que

$$|\varepsilon(z)| < \delta \quad \text{para} \quad z > z(\delta).$$

Entonces

$$|\eta(z)| \leq |e^{+\lambda_n z}.|\, \delta. \int_x^{\infty} |e^{-\lambda_n z}|\, dz$$

$$= e^{+\lambda_n x}\, \delta \frac{1}{\lambda_n} e^{-\lambda_n x} = \frac{\delta}{\lambda_n}$$

luego

$$\lim_{z \longrightarrow \infty} \eta_n(z) = 0,$$

y teniendo en cuenta la igualdad [1] el teorema queda demostrado.

Derivación. — *Si la función $f(z)$ y su derivada tienen por desarrollo asintótico (D, λ_n), respectivamente*

$$f(z) \sim \sum_0^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z} \qquad [1]$$

y

$$f'(z) \sim \sum_0^{\infty} b_n e^{-\lambda_n z} \qquad [2]$$

entonces la serie [2] *es la serie derivada de la serie* [1].

En efecto; aplicando el teorema de la integración de la serie [2] resulta

$$-f(z) \sim \sum_0^{\infty} \frac{b_n}{\lambda_n} e^{-\lambda_n z} \qquad [3]$$

y según el teorema I, deberá ser

$$-a_n = \frac{b_n}{\lambda_n} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad [4]$$

Por otra parte, la serie derivada de la [1] es

$$-\sum_0^{\infty} a_n \lambda_n e^{-\lambda_n z}$$

por tanto, según [4], la serie [2] es la derivada de la serie [1].

II.—SERIES DOBLES ASINTOTICAS DEL TIPO (λ_m, μ_n).

7. Los resultados anteriores se pueden extender a las series dobles, de la siguiente manera:

Diremos que la serie doble de Dirichlet, convergente o divergente

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{m,n}\, e^{-\lambda_m x - \mu_n y} \qquad \begin{cases} \lambda_i < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots \ ; \ \lambda_0 \geq 0 \\ \mu_i < \mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots \ ; \ \mu_0 \geq 0 \end{cases} \qquad [1]$$

representa *asintóticamente* (D, γ_m, μ_n) a la función $f(x, y)$ de dos variables complejas x e y en el dominio: $R(x) > 0$, $R(y) > 0$, e indicaremos con la notación

$$f(x, y) \sim \sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{m,n}\, e^{-\lambda_m x - \mu_n y},$$

si la expresión

$$\varepsilon_{m,n}(x, y) = e^{\lambda_m x + \mu_n y}\left[f(x, y) - \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij}\, e^{-\lambda_i x - \mu_j y}\right] \qquad [2]$$

tiende a cero, cuando $(x, y) \longrightarrow +\infty$, $(m, n = 1, 2, 3, \dots)$

La relación [2] se puede escribir

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij}\, e^{-\lambda_i x - \mu_j y} + \varepsilon_{m,n}\, e^{-\lambda_m x - \mu_n y} \qquad [3]$$

con

$$\varepsilon_{m,n}(x, y) \longrightarrow 0 \quad (x, y) \longrightarrow \infty .$$

El desarrollo asintótico doble de potencia corresponde al caso particular

$$\lambda_m = m \quad , \quad \mu_n = n$$

y

$$e^x = t \quad , \quad e^x = z$$

con lo cual la [1] se transforma en la serie doble de potencia

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty \frac{a_{m,n}}{t^m z^n}$$

de las variables

$$\frac{1}{t} \text{ y } \frac{1}{z}.$$

I. — *Si es*

$$f(x, y) \sim \sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{m,n} \, e^{-\lambda m x - \mu n y}$$

$$g(x, y) \sim \sum_0^\infty \sum_0^\infty b_{m,n} \, e^{-\lambda m x - n y}$$

se tiene entonces

$$f(x, y) \pm g(x, y) \sim \sum_0^\infty \sum_0^\infty (a_{m,n} \pm b_{m,n}) \, e^{-\lambda m x - \mu n \lambda}.$$

En efecto:

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{ij} \, e^{-\lambda i x - \mu j y} + \varepsilon_{m,n} \, e^{-\lambda m x - \mu n y}$$

$$g(x, y) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} b_{ij} \, e^{-\lambda i x - \mu j y} + \delta_{m,n} \, e^{-\lambda m x - \mu n y}$$

de donde

$$f(x, y) \pm g(x, y) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} (a_{ij} \pm b_{ij}) \, e^{-\lambda i x - \mu j y} + \eta_{m,n} \cdot e^{-\lambda n x - \mu n y}.$$

Puesto que

$$\eta_{m,n} = \varepsilon_{m,n} \pm \delta_{m,n} \longrightarrow 0 \quad (x, y) \longrightarrow \infty$$

la relación anterior prueba el teorema.

II. — *Si*

$$f(x, y) \sim \sum_1^\infty \sum_1^\infty a_{m,n} \, e^{-\lambda m x - \mu n y} \qquad \begin{cases} \lambda_m \neq 0 & m = 1, 2, \ldots \\ \mu_n \neq 0 & n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

resulta entonces

$$\int_x^\infty \int_y^\infty f(x, y) \, dx \, dy \sim \sum_1^\infty \sum_1^\infty \frac{a_{m,n}}{\lambda_m \mu_n} \, e^{-\lambda m x - \mu n y}$$

Por hipótesis, se tiene

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, e^{-\lambda i x - \mu j y} + \varepsilon_{m,n}(x, y) \, e^{-\lambda m x - \mu n y}; \quad \varepsilon_{m,n}(x, y) \longrightarrow 0$$

de donde

$$\int_x^\infty \int_y^\infty f(x, y)\, dx\, dy = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \int_x^\infty \int_y^\infty e^{-\lambda_i x - \mu_j y}\, dx\, dy +$$

$$+ \int_x^\infty \int_y^\infty \varepsilon_{m,n}(x, y)\, e^{-\lambda_m x - \mu_n y}\, dx\, dy\,,$$

luego

$$\int_x^\infty \int_y^\infty f(x, y)\, dx\, dy = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{\lambda_i\, \mu_j} e^{-\lambda_i x - \mu_j y} + \eta_{m,n}\, e^{\lambda m x + \mu n y}$$

donde

$$\eta_{m,n}(x, y) = e^{-\lambda m x - \mu n y} \int_x^\infty \int_y^\infty \varepsilon_{m,n}(x, y)\, e^{\lambda m x + \mu n y}\, dx\, dy\,.$$

De la condición

$$\varepsilon_{m,n}(x, y) \longrightarrow 0 \quad (x, y) \longrightarrow \infty$$

resulta que, fijando un δ arbitrario, existe un $x(\delta)$ y un $y(\delta)$, tal que

$$|\varepsilon(x, y)| < \delta \quad \text{para} \quad \begin{cases} x > x(\delta) \\ y > y(\delta) \end{cases}.$$

Entonces

$$|\eta_{m,n}(x, y)| \leq e^{-\lambda m x - \mu n y}\, \delta \int_x^\infty \int_y^\infty e^{-\lambda m x - \mu n y}\, dx\, dy$$

es decir

$$|\eta_{m,n}(x, y)| < \frac{\delta}{\lambda_m \cdot \mu_n} e^{-2\lambda m x - 2\mu n y}$$

luego

$$\lim_{(x, y) \to \infty} \eta_{m,n}(x, y) = 0$$

lo cual prueba el teorema.

CAPITULO III

SERIES DE FACULTAD ASINTOTICAS

8. En la parte I del presente capítulo vamos a estudiar la representación asintótica de una función $f(z)$, mediante series de factoriales

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{a_s\, s!}{z(z+1)\ldots(z+1)} \qquad (z = x + iy) \qquad [5]$$

convergentes o divergentes.

Las series factoriales de la forma [5] fueron estudiadas por Jensen, Nielsen, Schlomiech, Pindierle...; pero la verdadera base de una teoría ha dado Landau y Norlung, para los simples, y por Kojima y Adams para las series dobles.

Todos estos trabajos se refieren especialmente al estudio del dominio de convergencia (simple, absoluto y uniforme) y de las propiedades de las funciones $f(z)$ definidas por tales desarrollos en la hipótesis que ellos sean convergentes.

Representación asintótica de este tipo se han presentado por vez primera al desarrollar una función determinante

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{-xz}\, \varphi(x)\, dx$$

en series de factoriales (1); pero el problema fundamental de la representación asintótica de una función dada $f(z)$ cualquiera, mediante una serie de facultad, y el estudio de las propiedades de esta correspondencia aun no ha sido abordado. La limitación del espacio que disponemos nos permitirá solamente enunciar algunos resultados sin entrar en el detalle de sus desarrollos analíticos.

Definiciones. — Dada la serie de facultad

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_{s+1}\,(s+1)!}{z(z+1)\ldots(z+s)}, \quad z = x + iy \qquad [1]$$

(1) S. Pincherle, *R. della R. Accad. dei Lincei*, 15 maggio (1904) p. 513. N. Nielsen, *Ann. de l'École Normale*, t. XIX, p. 437.

convergente o divergente en el semi-plano: $R(z) \geq 0$, diremos que una función $f(z)$ tiene por *desarrollo asintótico* a dicha serie, si

$$\varepsilon_n(z) = z^{n+1}\left[f(z) - \sum_{s=0}^{n} \frac{a_{s+1}(s+1)!}{z(z+1)\ldots(z+s)}\right] \longrightarrow 0 \qquad [2]$$

cuando $z \longrightarrow \infty$ en el semi-plano antes definido.

De la [2] resulta entonces

$$f(z) = \sum_{s=0}^{n} \frac{a_{s+1}(s+1)!}{z(z+1)\ldots(z+s)} + \frac{\varepsilon_n(z)}{z^{n+1}},$$

donde

$$\varepsilon_n(z) \longrightarrow 0 \quad , \quad z \longrightarrow 0 \quad , \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

La correspondencia así establecida, expresaremos con la notación

$$f(z) \sim \sum_{0}^{\infty} \frac{a_{s+1}(s+1)!}{z(z+1)\ldots(z+s)}.$$

Si una función $f(z)$ tiene un desarrollo asintótico en series de factoriales, éste es único en virtud del siguiente teorema:

I. — *Si es*

$$f(z) \sim a_0 + \frac{a_1\, 1!}{z} + \frac{a_2\, 2!}{z(z+1)} + \ldots$$

y

$$f(z) \sim b_0 + \frac{b_1\, 1!}{z} + \frac{b_2\, 2!}{z(z+1)} + \ldots$$

resulta entonces

$$a \equiv b \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Por hipótesis

$$f(z) = \sum_{s=0}^{n} \frac{a_{s+1}(s+1)!}{z(z+1)\ldots(z+s)} + \frac{\varepsilon_n(z)}{z^{n+1}}$$

$$f(z) = \sum_{s=0}^{n} \frac{b_{s+1}(s+1)!}{z(z+1)\ldots(z+s)} + \frac{\delta_n(z)}{z^{n+1}},$$

$$\lim \varepsilon_n(z) = \lim \delta_n(z) = 0.$$

De aquí resulta

$$0 = (a_0 - b_0) + \frac{(a_1 - b_1)\,1!}{z} + \frac{(a_2 - b_2)\,2!}{z\,(z+1)} + \ldots + \frac{\varepsilon_n - \delta_n}{z^{n+1}}$$

y haciendo $z \longrightarrow \infty$, se tiene

$$a_0 = b_0 \,.$$

Reemplacemos este valor en la relación anterior y multiplicando por z resulta

$$0 = (a_1 - b_1) + \frac{(a_2 - b_2)\,2!}{z+1} + \ldots + \frac{\varepsilon_n - \delta_n}{z^n} \,,$$

que para $r \longrightarrow \infty$ nos da

$$a_1 = b_1 \,.$$

Razonando del mismo modo se deduce sucesivamente que

$$a_2 = b_2 \quad , \quad a_3 = b_3 \ldots$$

Este desarrollo es por tanto único. La recíproca no se verifica necesariamente.

El algoritmo de Stieljes para obtener el desarrollo de una función en series de potencias asintóticas, se extiende también a las series de facultad. En efecto; sea $f\,(z)$ una función tal que

$$\lim_{z \to \infty} f\,(z) = a_0 \quad (a_0 \text{ finito}) \,,$$

en este caso a_0 da una aproximación de $f\,(z)$ para valores muy grandesde $|\,z\,|$.

Supongamos además que se verifiquen las relaciones sucesivas

$$\lim_{z \to \infty} z\,[f\,(z) - a_0] = a_1 \quad \text{es decir} \quad z\left[f\,(z) - a - \frac{a_1}{z}\right] \longrightarrow 0$$

$$\lim_{z \to \infty} (z+1)\left[z\left(f\,(z) - a_0 - \frac{a_1}{z}\right)\right] = a_2\,2\,!$$

es decir

$$(z+1)\left\{z\left[f\,(z) - a_0 - \frac{!a_1}{z}\right] - \frac{2!\,a_2}{z+1}\right\} \longrightarrow 0$$

y, así siguiendo, resulta un desarrollo de la forma

$$a_0 + \frac{a_1!}{z} + \frac{a_2\,2\,!}{z\,(z+1)} + \frac{a_3\,3\,!}{z\,(z+1)\,(z+2)} + \ldots$$

que representa asintóticamente la función $f\,(z)$ en una cierta región del plano z.

Sea la función

$$f(z) = e^{-x}$$

de la variable real $x > 0$.

Es

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} = 0 = a_0$$

$$\lim_{x \to \infty} x\,(e^{-x} - 0) = 0 = a_1$$

$$\lim\,(x + 1)\,[x\,(e^{-x} - 0) - 0] = 0 = a_2\,2\,!$$

por tanto

$$e^{-x} \sim 0 + \frac{0}{x} + \frac{0}{x\,(x+1)} + \frac{0}{x\,(x+1)\,(x+2)} + \ldots$$

9. La correspondencia entre una función y su desarrollo de facultad asintótica, se conserva en las operaciones algebraicas fundamentales.

Si se tiene

$$f(z) \sim \sum_{0}^{\infty} \frac{a_{s+1}\,(s+1)\,!}{z\,(z+1)\ldots(z+s)}$$

y

$$g(z) \sim \sum_{0}^{\infty} \frac{b_{s+1}\,(s+1)\,!}{z\,(z+1)\ldots(z+s)}$$

resulta entonces

$$f(z) \pm g(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a_{s+1} \pm b)\,(s+1)\,!}{z\,(z+1)\ldots(z+s)}\,.$$

En efecto; por hipotesis

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_{s+1}\,(s+1)\,!}{z\,(z+1)\ldots(z+s)} + \frac{\varepsilon_n(z)}{z^{n+1}}$$

$$g(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{b_{s+1}\,(s+1)\,!}{z\,(z+1)\ldots(z+s)} + \frac{\delta_n(z)}{z^{n+1}}$$

de donde

$$f(z) \pm g(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a_{s+1} \pm b_{s+1})\,(s+1)\,!}{z\,(z+1)\ldots(z+s)} + \frac{\eta_n(z)}{z^{n+1}}$$

con

$$\eta_n(z) = \varepsilon_n(z) \pm \delta_n(z)\,.$$

Puesto que $\eta_n(z) \longrightarrow 0$, $z \longrightarrow \infty$, el teorema queda demostrado.

El teorema I nos prueba que *una función no puede tener más de un desarrollo de facultad asintótica*; en cambio, funciones distintas pueden dar el mismo desarrollo de facultad asintótica.

En efecto; si

$$f(x) \sim a_0 + \frac{a_1 !}{x} + \frac{a_2 \, 2!}{x(x+1)} + \ldots$$

para x real y positivo la función

$$f(x) + e^{-x}$$

tiene este mismo desarrollo, según el teorema que acabamos de probar.

El desarrollo asintótico de la serie de facultad producto formal de las series (1) y (2) con regla de Nörlund (1), es igual al producto de los desarrollos asintóticos de aquéllos.

Esta proposición se prueba asi como también el caso de la integración de un desarrollo asintótico de facultad siguiendo el mismo razonamiento que en los casos anteriores.

Para terminar, vamos ahora a dar algunas nociones sobre la representación asintótica mediante series dobles de facultad.

10. *Series dobles.* — El estudio de las series dobles de facultad

$$(1) \qquad \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{a_{sq} \; s! \; q!}{z(z+1)\ldots(z+s)\, w(w+1)\ldots(w+q)}$$

desde el punto de vista de su dominio de convergencia acotada, regular y uniforme se inicia en la memoria fundamental de Kogima (2) y en algunas notas de Adams (3)

La noción de serie doble de facultad asintótica hemos introducido en otro lugar a fin de extender a las integrales dobles de Laplace algunos teoremas fundamentales de Pincherle, Nielsen y Norlund relativo a las integrales simples de Laplace.

(1) N. E. Nörlund, *Lecons sur les séries d'interpolation*, Gauthier, Villars, et. *Cit.* Paris 1926. pág. 217, *fórm. 74* y pág. 223.

(2) *Loc cit.* p. 108.

(3) *Loc cit.* p. 108.

Diremos que la serie doble de facultad [1] de dos variables complejas z y w, representa asintóticamente a la función $f(z, w)$ en la región $\{R(z) > 0 \ , \ R(w) > 0\}$ y pondremos

$$f(z, w) \sim \sum_0^\infty \sum_0^\infty \frac{a_{sq} \ s! \ q!}{z(z+1)\dots(z+s) \ w(w+1)\dots(w+q)}$$

si la expresión

$$\varepsilon_{m,n} = z^{m+1} w^{n+1} \left[f(z,w) - \sum_{s=0}^{m} \sum_{q=0}^{n} \frac{a_{s+1,q+1} (s+1)!(q+1)!}{z(z+1)\dots(z+s) \ w(w+1)\dots(w+q)} \right]$$

tiende a cero, cuando $(z, w) \longrightarrow \infty$, en los semi-planos antes definidos.

De aquí

$$f(z, w) = \sum_0^m \sum_0^n \frac{a_{s+1,q+1} (s+1)!(q+1)!}{z(z+1)\dots(z+s) w(w+1)\dots(w+q)} + \frac{\varepsilon_{m,n}}{z^{m+1} w^{n+1}}$$

con

$$\varepsilon_{m,n} \longrightarrow 0 \quad (z, w) \longrightarrow \infty \quad \text{y} \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

Si la función $f(z, w)$ tiene un desarrollo asintótico (F), este es único. En efecto, si

$$f(z, w) = \sum_0^m \sum_0^n \frac{a_{s+1,q+1} (s+1)!(q+1)!}{z(z+1)\dots(z+s) w(w+1)\dots(w+q)} + \frac{\varepsilon_{m,n}}{z^{m+1} . w^{n+1}}$$

y

$$f(z, w) = \sum_0^m \sum_0^n \frac{b_{s+1,q+1} (s+1)!(q+1)!}{z(z+1)\dots(z+s) w(w+1)\dots(w+q)} + \frac{\delta_{m,n}}{z^{m+1} . w^{n+1}}$$

resulta

$$0 = \sum_0^m \sum_0^n \frac{c_{s+1,q+1} (s+1)!(q+1)!}{z(z+1)\dots(z+s) w(w+1)\dots(w+q)} + \frac{\varepsilon_{m,n} - \delta_{m,n}}{z^{m+1} . w^{n+1}}$$

donde

$$c_{s+1,q+1} = a_{s+1,q+1} - b_{s+1,q+1} \quad (s, q = 0, 1, \dots)$$

Si en esta relación se hace $(z, w) \longrightarrow \infty$ resulta

$$c_{11} = 0 \quad \text{es decir} \quad a_{11} = b_{11}$$

Sustituyendo este valor en la relación anterior, multiplicando luego ambos miembros por z y haciendo $(z, w) \longrightarrow \infty$, resulta: $a_{12} = b_{12}$. Continuando de tal modo se deduce

$$a_{21} = b_{21} \quad , \quad a_{22} = b_{22} \ldots$$

El desarrollo es por tanto único.

Se puede igualmente extender a estos desarrollos asintóticos el algoritmo de Stieltjes, asi como también las operaciones suma y multiplicación [1].

(1) La regla de multiplicación de dos series simples de facultad y el teorema de NIELSEN - NORLUNG relativo al producto de dos series de facultad convergentes, he dado en mi comunicación « *Sobre un método de sumación de series divergentes* ». en los Coloquios mateméticos de la *Sociedad Cientifica Argentina* (junio 1938).

TABLAS DE LAS LINEAS ÚLTIMAS

Por el Dr. ADOLFO T. WILLIAMS

ABSTRACT

Tables of «raies ultimes». — A complete table of «raies ultimes» with their wavelengths, intensities, series, quantum numbers, exciting potentials and other characteristics is published. Computational data regarding the spectral levels is also included; the even terms have priority as inicial levels.

1. Como memoria complementaria y final de otras ya aparecidas (1) publicamos ahora una tabla de las líneas últimas en la que figuran sus longitudes de onda, sus intensidades en el arco, en la chispa y en el tubo de Geissler, la indicación de los términos espectrales que les dan origen, con indicación de sus números cuantistas y demás notaciones pertinentes (2); las magnitudes ΔL y ΔJ y los potenciales de excitación, columna que lleva las letras E. P.

En la columna titulada « Observaciones » van indicadas las líneas últimas determinadas por Gramont en sus bien conocidos trabajos (3) con las notaciones por él empleadas. Además figuran las líneas encontradas por Ch. Wateville y por Lundegardh (4) en los espectros

(1) Estos *Anales*, **97**, página 15 (1924); **114**, página 261 (1932); **118**, página 88, (1934); **119**, página 55 (1935) y **125**, página 116 (1938). *Contr. Est. Ciencias Físicomatemáticas*, **4**, página 359 (1928); **5**, páginas 173 y 391 (1929-1931) y **1**, página 41 (1935). *Comptes Rendus*, **187**, página 761 (1928); **193**, página 358 (1931); **199**, página 1201 (1935) y **200**, página 230 (1935). *Physikalische Zeitschrift*, **33**, página 152 (1932) y *Nature*, **124**, página 985 (1929) y **130**, página 313 (1932).

(2) Para facilitar la composición tipográfica se han omitido los valores de J.

(3) *Analyse Spectrale appliquée aux Recherches de Chimie Minérale*, página 292, Paris (1922); F. Twyman y D. M. Smith, *Wavelength Tables for Spectrum Analysis*, p. 135, Londres (1931), 2ª edición. *Physikalische Methoden der Analytischen Chemie; erster Teil. Spektroscopische und Radiometrische Analyse*, página 66, Leipzig (1933). *Critical Tables*, **5**, página 322 (1929). Tabla establecida por W. F. Meggers.

(4) *Spectres de Flammes. Variations Spectrales d'ordre thermique.* Thèse de Paris (1904) y F. Twyman y D. M. Smith. Obra citada, página 132.

de la llama con la letra L; las líneas que son emitidas por la fulguración eléctrica de las soluciones salinas según Pollok y Leonard y según el autor [1] con la letra W y, finalmente, las líneas originadas por el salto de dos electrones llevan la indicación 2*e*.

En la tabla I figuran las líneas del arco, en la tabla II las correspondientes a los distintos espectros de chispa (átomos ionizados), y en la tabla III se hace una estadística de los niveles fundamentales y de excitación correspondientes a las mismas. Finalmente en la tabla IV figura un cómputo total de las líneas últimas clasificadas y sin clasificar.

Tanto los átomos neutros como los ionizados están ordenados de acuerdo con la ley periódica.

Próximamente aparecerán estas mismas tablas en los *Anales de la Asociación Química Argentina*, pero dispuestos en forma diferente para su empleo en el análisis espectroquímico. Se las ha dividido, por dicha razón, en tres secciones según los métodos de observación que deben usarse: Espectro visible, espectro ultravioleta y espectro ultravioleta extremo.

2. Las tablas numéricas que van a continuación contienen las líneas últimas con los datos numéricos que hemos mencionado en el parágrafo anterior.

(1) F. Twyman y D. M. Smith. Obra citada, página 72 y A. T. Williams, *Investigaciones experimentales sobre los espectros de la descarga oscilante*, Buenos Aires (1925) y estos *Anales* **97**, página 15 (1924).

TABLA I

ATOMOS NEUTROS

λ I.A	I a	I c	Serie	Δl	Δj	E.P	Observaciones
Columna I (*a*)			H				
6562,79	10		²P° — ²D	— 1	0, — 1	10,02	U.
4861,33	10		²P° — ²D	— 1	0, — 1	10,02	
1215,70	10		²S — ²P°	— 1	0, — 1	0,0	
			Li				
6707,86	10R	10R	²S — ²P°	— 1	0, — 1	0,0	U; L.
6103,59	10R	10	²P° — ²D	— 1	0, — 1	1,84	U.
4971,93	7	4	²P° — ²S	+ 1	0, — 1	1,84	
4603,20	9R	10	²P° — ²D	— 1	0, — 1	1,84	U.
4273,30	5	2	²P° — ²S	+ 1	0, + 1	1,84	
4134,40	1	—	²P° — ²P°	0	0	1,84	
4132,40	2R	—	²P° — ²D	— 1	0, — 1	1,84	
3232,67	8R	8R	²S — ²P°	— 1	0, — 1	0,0	
2741,30	10R	2R	²S — ²P°	— 1	0, — 1	0,0	
			Na				
6160,80	5	4	²P° — ²S	+ 1	+ 1	2,09	
6154,40	4	3	²P° — ²S	+ 1	0	2,09	U.
5895,32	8R	10	²S — ²P°	— 1	0	0,0	U; L.
5889,96	10R	10	²S — ²P°	— 1	— 1	0,0	U; L.
5688,30	8	7*r*	²P° — ²D	— 1	0, — 1	2,09	U.
5682,80	7	6*r*	²P° — ²D	— 1	— 1	2,09	U.
4983,20	5	4	²P° — ²D	— 1	0, — 1	2,09	U.
4979,00	5	4	²P° — ²D	— 1	— 1	2,09	U.
3302,94	8R	8R	²S — ²P°	— 1	0	0,0	U; L.
3302,34	9R	9R	²S — ²P°	— 1	— 1	0,0	U; L.
2852,80	4R	2	²S — ²P°	— 1	— 1	0,0	

λ I . A	I a	I c	Serie	Δl	Δj	E . P	Observaciones
			K				
7699,01	10R	5R	^2S — $^2P^\circ$	— 1	0	0,0	L.
7664,94	10R	5R	^2S — $^2P^\circ$	— 1	— 1	0,0	U; L.
6939,00	10	—	$^2P^\circ$ — ^2S	+ 1	+ 1	1,61	
6911,30	10	—	$^2P^\circ$ — ^2S	+ 1	0	1,61	
5832,10	7R	4	$^2P^\circ$ — ^2D	— 1	0, — 1	1,61	
5812,40	6R	2	$^2P^\circ$ — ^2D	— 1	— 1	1,61	
5801,90	6R	4	$^2P^\circ$ — ^2S	+ 1	+ 1	1,61	
5782,60	5R	3	$^2P^\circ$ — ^2S	+ 1	0	1,61	
4047,22	10R	10R	^2S — $^2P^\circ$	— 1	0	0,0	U; L.
4044,16	10R	10R	^2S — $^2P^\circ$	— 1	— 1	0,0	U; L.
3447,38	6R	2	^2S — $^2P^\circ$	— 1	0	0,0	
3446,37	8R	3	^2S — $^2P^\circ$	— 1	— 1	0,0	
3217,60	4R	—	^2S — $^2P^\circ$	— 1	0	0,0	
3217,10	6R	—	^2S — $^2P^\circ$	— 1	— 1	0,0	
3102,20	2R	—	^2S — $^2P^\circ$	— 1	0	0,0	
3102,00	4R	—	^2S — $^2P^\circ$	— 1	— 1	0,0	
			Rb				
7947,63	10R	—	^2S — $^2P^\circ$	— 1	0	0,0	U.
7800,30	10R	—	^2S — $^2P^\circ$	— 1	— 1	0,0	U.
6298,50	10	3	$^2P^\circ$ — ^2D	— 1	0	1,58	
6159,84	5	1	$^2P^\circ$ — ^2S	+ 1	0	1,55	
5724,50	4	2	$^2P^\circ$ — ^2D	— 1	— 1	1,58	
4215,58	7R	5R	^2S — $^2P^\circ$	— 1	0	0,0	U; L.
4201,81	8R	7R	^2S — $^2P^\circ$	— 1	— 1	0,0	U.
			Cs				
8943,60	6R	—	^2S — $^2P^\circ$	— 1	0	0,0	
8521,15	10R	—	^2S — $^2P^\circ$	— 1	— 1	0,0	
4593,20	10R	3	^2S — $^2P^\circ$	— 1	0	0,0	
4555,30	10R	4	^2S — $^2P^\circ$	— 1	— 1	0,0	U; L.
Columna I (*b*)			**Cu**				
5782,13	8	8	^2D — $^2P^\circ$	+ 1	+ 1	1,62	2 *e*
5700,25	8	10	^2D — $^2P^\circ$	+ 1	0	1,62	2 *e*
5218,21	10	10	$^2P^\circ$ — ^2D	— 1	— 1	3,80	
5153,24	8	8	$^2P^\circ$ — ^2D	— 1	— 1	3,80	

λ I. A	I		Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
	a	c					
			Cu				
5105,55	7	6	$^2D - ^2P^o$	+ 1	+ 1	1,38	2 *e*
3273,96	10R	10R	$^2S - ^2P^o$	— 1	0	0,0	U; L. W.
3247,55	10R	10R	$^2S - ^2P^o$	— 1	— 1	0,0	U; L. W.
2961,18	9	6	$^2D - ^2F^o$	— 1	— 1	1,38	W.
2824,38	10	5	$^2D - ^2D^o$	0	0	1,38	W.
2618,38	10R	3	$^2D - ^2P^o$	+ 1	+ 1	1,38	2 *e*; W.
2230,09	4R	2R	$^2D - ^2F^o$	— 1	— 1	1,38	W.
2227,76	4R	1R	$^2D - ^2F^o$	— 1	— 1	1,62	W.
			Ag				
5471,51	6	5	$^2P^o - ^2D$	— 1	0	3,78	U.
5465,43	10	6	$^2P^o - ^2D$	— 1	— 1	3,78	
5209,04	10R	10	$^2P^o - ^2D$	— 1	— 1	3,64	
4668,54	8	3	$^2P^o - ^2S$	+ 1	+ 1	3,78	
4212,01	8R	4R	$^2P^o - ^2D$	— 1	0	3,78	
3382,89	10R	9R	$^2S - ^2P^o$	— 1	0	0,0	U; L.
3280,67	10R	9	$^2S - ^2P^o$	— 1	— 1	0,0	U; L.
2375,00	8	3					
2309,54	6R	4					
			Au				
6278,20	4	3	$^2D - ^2P^o$	+ 1	+ 1	2,65	2 *e*
5837,41	4	6	$^2P^o - ^2S$	+ 1	0	4,60	
5064,61	2	3	$^2D - ^2P^o$	+ 1	0	2,65	2 *e*
4792,62	8	6	$^2P^o - ^2D$	— 1	— 1	5,08	
3122,79	6R	8	$^2D - ^2P^o$	+ 1	+ 1	1,13	2 *e*
3033,26	2	2					
3029,19	6	5	$^2D - ^2F^o$	— 1	— 1	1,13	
2883,45	4	3	$^2D - 9^o$	?	?	2,65	
2748,26	4R	6	$^2D - ^4F^o$	— 1	— 1	1,13	ΔR = 2.
2675,95	10R	10	$^2S - ^2P^o$	— 1	0	0,0	U; L.
2427,96	10R	10R	$^2S - ^2P^o$	— 1	— 1	0,0	U.

λ I. A	I a	I c	Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
Columna II (*a*)			Be				
4572,69	8	1	$^1P^\circ$ — ^1D	— 1	— 1	5,25	
3321,35	10	3	$^3P^\circ$		+ 1	2,72	
3321,08	10	3	$^3P^\circ$ — ^3S	+ 1	0	2,72	
3321,01			$^3P^\circ$		— 1	2,72	
2650,94	9	7	$^3P^\circ$ — ^3P	0	0	2,72	
2650,31	9	7					
2494,87	8	6	$^3P^\circ$ — ^3D			2,72	
2494,48	8	6	$^3P^\circ$ — ^3D	— 1	— 1	2,72	
2494,44	8	6	$^3P^\circ$ — ^3D			2,72	
2348,62	10R	5	^1S — $^1P^\circ$	— 1	— 1	0,0	U.
			Mg				
5528,48	10	5	$^1P^\circ$ — ^1D	— 1	— 1	4,34	U.
5183,60	10R	10			+ 1		
5172,68	10R	10	$^3P^\circ$ — ^3S	+ 1	0	2,70	
5167,33	8R	10			— 1		
4703,07	10	5	$^1P^\circ$ — ^1D	— 1	— 1	4,34	W.
4571,12	5	2	$^1S^\circ$ — ^3P	— 1	— 1	0,0	ΔR = 2
3838,29	10R	10R					W.
3832,31	10R	10R					W.
3829,36	8R	10R	$^3P^\circ$ — ^3D	— 1	— 1	2,70	W.
3096,92	10R	2					
3093,05	8R	2					
3091,09	8R	1					
2852,13	10R	10	^1S — $^1P^\circ$	— 1	— 1	0,0	U, L. W.
2782,98	6R	6R	$^3P^\circ$ — ^3P	0	+ 1	2,70	W.
2781,43	6R	6R	$^3P^\circ$ — ^3S	+ 1	+ 1	2,70	W.
2779,85	8R	8R	$^3P^\circ$ — ^3P	0	0	2,70	W.
2778,29	6R	6R	$^3P^\circ$ — ^3S	+ 1	0	2,70	W.
2776,71	6R	6R	$^3P^\circ$ — ^3S	+ 1	— 1	2,70	W.
			Ca				
6493,70	8	5		— 1	— 1	2,52	
6462,57	6R	6	^3D — $^3F^\circ$	— 1	— 1	2,52	
6439,06	10R	8		— 1	— 1	2,52	
6162,19	10R	8R	$^3P^\circ$ — ^3S	+ 1	+ 1	1,87	
6122,24	10R	10R	$^3P^\circ$ — ^3S	+ 1	0	1,87	
5590,10	10	6	^3D — $^3D^\circ$	0	— 1	2,52	L.
5588,74	—	10	^3D — $^3D^\circ$	0	0	2,52	L.

λ I.A	I a	I c	Serie	Δl	Δj	E.P	Observaciones
			Ca				
4456,62	4	5	$^3P°$ — ^3D	—1	—1	1,87	
4455,88	8R	8	»	—1	—1	1,87	
4454,78	10R	10R	»	—1	—1	1,87	W.
4435,68	8R	8	»	—1	0	1,87	W.
4434,96	10R	10R	»	—1	—1	1,87	W.
4425,44	10R	10	»	—1	—1	1,87	L. W.
4318,65	8R	8R	$^3P°$ — ^3P	0	+1	1,87	W.
4302,53	10R	10R	»	0	0	1,87	W.
4289,36	8R	8R	»	0	—1	1,87	W.
4283,10	8R	8R	»	0	—1	1,87	W.
4226,72	10R	10R	^1S — $^1P°$	—1	—1	0,0	U; L. W.
3644,39	10	4	$^3P°$ — ^3D	—1	—1	1,87	W.
3006,86	4	4	$^3P°$ — ^3D	—1	—1	1,87	W.
3000,87	4	2	$^3P°$ — ^3P	0	+1	1,87	2*e*
2999,67	4	3	$^3P°$ — ^3P	0	0	1,87	»
2997,31	3	2	$^3P°$ — ^3P	0	—1	1,87	»
2994,95	3	2	$^3P°$ — ^3P	0	—1	1,87	»
			Sr				
4962,25	6R	2	$^3P°$ — ^3D	—1	—1	1,84	W.
4872,48	6	2	$^3P°$ — ^3D	—1	—1	1,79	W.
4832,07	6	5	$^3P°$ — ^3D	—1	—1	1,77	W.
4607,34	10R	6	^1S — $^1P°$	—1	—1	0,0	U; L. W.
3366,34	5	2	$^3P°$ — ^3P	0	+1	1,84	
3351,26	6R	2	$^3P°$ — ^3P	0	0	1,84	
2931,83	3	1	^1S — $^1P°$	—1	—1	0,0	
			Ba				
5777,70	10R	5	$^3P°$ — ^3D	—1	—1	1,67	
5535,53	10R	6	^1S — $^1P°$	—1	—1	0,0	U; L.
5519,11	8R	5	$^3P°$ — ^3D	—1	—1	1,56	
5424,63	7	3	$^3P°$ — ^3D	—1	—1	1,52	
4591,80	3	1	^3D — $^3P°$	+1	0	1,11	
4488,97	7	2	$^3P°$ — ^3D	—1	—1	1,67	
4467,14	3	1					
4132,44	5	3	^1S — $^3D°$	—2	—1	0,0	ΔR = 2; 2*e*
3501,12	8R	2	^3D — $^1F°$	—1	—1	1,35	ΔR = 2; W.
3071,60	8R	6R	^1S — $^1P°$	—1	—1	0,0	

λ I. A	I a	I c	Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
			Ra				
4825,94	10	10	^{1}S — $^{1}P^{\circ}$	— 1	— 1	0,0	U.

Columna II (*b*) Zn

λ I. A	I a	I c	Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
6362,35	10	10	$^{1}P^{\circ}$ — ^{1}D	— 1	— 1	5,77	
4810,53	10R	10	$^{3}P^{\circ}$	+ 1	+ 1	4,05	U. W.
4722,16	10R	10	$^{3}P^{\circ}$ — ^{3}S	+ 1	0	4,01	U. W.
4680,14	10R	10	$^{3}P^{\circ}$	+ 1	— 1	4,00	W.
3345,51	8R	10	$^{3}P^{\circ}$ — ^{3}D	— 1	0	4,05	W.
3345,00	10R	10	$^{3}P^{\circ}$ — ^{3}D	— 1	0	4,05	W.
3303,00	8R	10	^{3}D	— 1	0	4,01	W.
3302,60	8R	10	^{3}D	— 1	— 1	4,01	W.
3282,32	8R	10	^{3}D	— 1	— 1	4,00	W.
2800,80	7R	10	$^{3}P^{\circ}$ — ^{3}D	— 1	— 1	4,05	W.
2771,00	6R	—	^{3}D	— 1	0	4,01	W.
2770,95	8R	8	^{3}D	— 1	— 1	4,01	W.
2608,60	8R	3	^{3}D	— 1	+ 1	4,05	W.
2582,50	8R	2	^{3}D	— 1	0	4,01	W.
2138,51	3R	2R	^{1}S — $^{1}P^{\circ}$	— 1	— 1	0,0	U. W.

Cd

λ I. A	I a	I c	Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
6438,47	10	10R	$^{1}P^{\circ}$ — ^{1}D	— 1	— 1	5,39	
5085,82	10R	10			+ 1	3,93	
4799,91	10R	10	$^{3}P^{\circ}$ — ^{3}S	+ 1	0	3,78	
4678,15	10R	10			— 1	3,72	
3612,88	8R	9		— 1	0	3,93	W.
3610,51	10R	10R		— 1	— 1	3,93	W.
3467,66	8R	10	$^{3}P^{\circ}$ — ^{3}D	— 1	0	3,78	W.
3466,20	10R	8		— 1	— 1	3,78	W.
3403,65	10R	10		— 1	— 1	3,72	W.
3261,05	10R	7	^{1}S — $^{3}P^{\circ}$	— 1	— 1	0,0	ΔR = 2; L.
3252,52	8	6	$^{3}P^{\circ}$ — ^{3}S	+ 1	+ 1	3,93	W.
2980,62	8R	6	$^{3}P^{\circ}$ — ^{3}D	— 1	— 1	3,93	W.
2836,90	8R	6	$^{3}P^{\circ}$ — ^{3}D	— 1	— 1	3,72	W.
2288,03	10R	10R	^{1}S — $^{1}P^{\circ}$	— 1	— 1	0,0	U. W.

λ I . A	I		Serie	Δl	Δj	E . P	Observaciones
	a	c					
			Hg				
5790,66	10R	10	$^1P^o$ — ^1D	— 1	— 1	6,65	
5769,60	10R	10	$^1P^o$ — ^3D	— 1	— 1	6,65	ΔR = 2.
5460,72	10R	10	$^3P^o$		+ 1	5,45	
4358,34	10	—	$^3P^o$ — ^3S	+ 1	0	4,85	
4046,77	7	10	$^3P^o$		— 1	4,65	
3663,27	10R	10R	^1D	— 1	0	5,45	ΔR = 2.
3662,88	6	—	^3D	— 1	+ 1	5,45	
3654,83	6R	10	^3D	— 1	0	5,45	
3650,15	10R	10R	^3D	— 1	— 1	5,45	
3131,84	8R	4R	^1D	— 1	— 1	4,85	ΔR = 2.
3131,56	8R	5R	$^3P^o$ — ^3D	— 1	0	4,85	
3125,62	10R	10	^3D	— 1	— 1	4,85	
3021,50	4R	4	^3D	— 1	— 1	5,45	
2967,28	10R	10R	^3D	— 1	— 1	4,65	
2655,14	4R	1	^1D	— 1	— 1	4,85	ΔR = 2.
2653,69	4R	2	^3D	— 1	0	4,85	
2652,07	5R	2	^3D	— 1	— 1	4,85	
2536,52	10R	10R	^1S — $^3P^o$	— 1	— 1	0,0	ΔR = 2; U; L.
2534,78	8R	1	$^3P^o$ — ^3D	— 1	— 1	4,65	
1849,60	10	10	^1S — $^1P^o$	— 1	— 1	0,0	U. [1]
Columna III (*a*)			**B**				
2497,73	10R	10R	$^2P^o$ — ^2S	+ 1	+ 1	0,0	U.
2496,78	9R	9R	$^2P^o$ — ^2S	+ 1	0	0,0	U.
			Al				
3961,54	10R	8R	^2S	+ 1	+ 1	0,0	U.
3944,03	10R	8R	^2S	+ 1	0	0,0	U.
3092,85	6R	4R	^2D	— 1	0	0,0	
3092,72	10R	8R	^2D	— 1	— 1	0,0	
3082,16	10R	8	^2D	— 1	— 1	0,0	
2660,35	10R	5R	^2S	+ 1	+ 1	0,0	
2652,48	10R	10R	$^2P^o$ — ^2S	+ 1	0	0,0	
2575,11	10R	6R	^2D	— 1	— 1	0,0	
2567,90	10R	6R	^2D	— 1	— 1	0,0	
2373,13	8R	4R	^2D	— 1	— 1	0,0	
2367,06	8R	4R	^2D	— 1	— 1	0,0	
2269,09	4R	2R	^2D	— 1	— 1	0,0	
2263,45	4R	2R	^2D	— 1	— 1	0,0	

[1] Memorias citadas, C.E.C.F.M., **5**, pág. 173; *Nature* **124**, pág. 985 y C. R. **187**, pág. 761.

λ I. A	I		Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
	a	c					
			Ga				
4172,05	10R	10R	$^2P^\circ$ — ^2S	+1	+1	0,12	U.
4033,01	10R	10R	$^2P^\circ$ — ^2S	+1	0	0,0	
2943,64	10R	2	$^2P^\circ$ — ^2D	−1	−1	0,12	
2874,24	10R	2	$^2P^\circ$ — ^2D	−1	−1	0,0	
			In				
4511,31	10R	10R	$^2P^\circ$ — ^2S	+1	+1	0,27	U.
4101,76	8R	10	$^2P^\circ$ — ^2S	+1	0	0,0	U.
3258,56	6R	3	$^2P^\circ$ — ^2D	−1	0	0,27	
3256,08	10R	8R	$^2P^\circ$ — ^2D	−1	−1	0,27	
3039,35	10R	4R	$^2P^\circ$ — ^2D	−1	−1	0,0	
2710,26	10R	3	$^2P^\circ$ — ^2D	−1	−1	0,27	
			Tl				
6714,30	4	2	^2S — $^2P^\circ$	−1	0	3,29	
6550,00	6	3	^2S — $^2P^\circ$	−1	−1	3,29	
5350,47	10R	10	$^2P^\circ$ — ^2S	+1	+1	0,96	U; L.
3775,73	10R	10R	$^2P^\circ$ — ^2S	+1	0	0,0	U; L.
3519,21	10R	10R	$^2P^\circ$ — ^2D	−1	−1	0,96	L.
3229,76	10R	1	$^2P^\circ$ — ^2S	+1	+1	0,96	
2918,33	10R	1	$^2P^\circ$ — ^2D	−1	−1	0,96	
2767,88	10R	10	$^2P^\circ$ — ^2D	−1	−1	0,0	L.
Columna III (*b*)			**Sc**				
6305,72	10	1	^2D — $^2D^\circ$	0	0	0,0	
5686,85	10	1	^4F — $^4G^\circ$	−1	−1	1,43	
5671,83	10	1	^4F — $^4G^\circ$	−1	−1	1,43	
5087,00	5	1	^2G — $^2F^\circ$	+1	+1	2,50	
5085,54	5	1	^4F — $^4F^\circ$	0	0	1,43	
5083,72	6	2	^4F — $^4F^\circ$	0	0	1,43	
5081,62	7	2	^4F — $^4F^\circ$	0	0	1,43	
4023,72	10	8	^2D — $^2D^\circ$	0	0	0,0	
4020,42	10	8	^2D — $^2D^\circ$	0	0	0,0	
3911,86	10	6	^2D — $^2F^\circ$	−1	−1	0,0	U.
3907,54	10	6	^2D — $^2F^\circ$	−1	−1	0,0	

λ I . A	I		Serie	Δl	Δj	E . P	Observaciones
	a	c					
				Y			
5644,69	4R	1	⁴F — ⁴G°	— 1	0	1,39	
4674,84	8	5	²D — ²F°	— 1	— 1	0,06	U.
4643,69	8	5	²D — ²F°	— 1	— 1	0,0	
4142,87	8R	8	²D — ²D°	0	0	0,0	
4102,38	9R	8	²D — ²F°	— 1	— 1	0,06	
4077,38	2	5	²D — ²F°	— 1	— 1	0,0	
3620,94	10	8	²D — ²P°	+ 1	+ 1	0,06	
Grupo de las tierras raras				**La**			
6249,94	7R	4	⁴F — ⁴G°	— 1	— 1	0,51	
5930,59	6R	—	²D — ²F°	— 1	— 1	0,12	U.
5455,14	8	1	²D — ²D°	0	0	0,12	2*e*.
4104,89	5	1	⁴F — ⁴G°	— 1	— 1	0,31	
3249,35	5	3					
3245,12	6	4					
2892,09	4	2					
2885,14	4	2					
2808.36	5	3					
2610,34	4	5					
				Ce			
5512,05	8	3					
5079,68	5	2					
4628,15	10	10					
4593,93	10	10					
4572,28	10	10					
4562,35	10	10					
4539,73	10	5					
4528,45	10	5					
4527,35	10	5					
4523,08	8	5					
4382,18	8	5					
4320,73	8	3					
4306,73	8	4					
4186,60	10	10					
4165,61	9	10					
4040,76	9	8					U.
4012,40	10	10					U.
3344,76	7	2					
3272,25	7	2					
3234,17	7	2					
3063,00	6	2					
2651,02	4	1					

λ I. A	I a	I c	Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
			Pr				
4225,34	10	10					
4189,52	10	10					
4179,43	10	10					
4062,83	10	8					
			Nd				
4542,60	5	5					L.
4462,96	10	10					L.
4451,55	10	10					
4446,37	10	10					
4358,20	9	8					
4325,77	10	5					
4303,61	10	10					L.
4177,34	9	10					L.
4156,16	10	10					
3951,15	9	8					
			Sm				
4467,33	9	10					
4434,34	10	8					U.
4424,35	10	10					U.
4421,14	9	5					
4390,87	10	10					
			Eu				
4205,03	10	10					
4129,72	10	10					U.
			Gd				
3768,40	10	10					
3646,19	10	10					

λ I. A	I a	I c	Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
			Tb				
3874,19	10	10					
3848,76	10	10					
3561,75	10	10					
3509,18	10	10					
			Dy				
4211,74	10	5					
4167,99	10	4					
4077,98	10	10					
4046,00	10	4					
4000,50	8	10					
			Ho				
3891,02	10	10					
3748,19	10	10					
			Er				
4675,61	5	10					
4448,62	4	2					
4426,77	4	2					
4419,62	8	10					
4409,34	5	2					
4301,61	5	3					
4298,90	5	2					
4230,19	6	3					
4184,97	4	—					
3906,34	10	10					
3692,65	—	10					
3499,12	10	10					
3323,20	5	4					
			Tu				
3761,91 3761,34 }	8	7					
3462,21	10	10					

λ I. A	I a	I c	Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
				Yb			
3988,01	10	10					U.
3694,20	10R	10					U.
3289,37	10R	10					U.
				Lu			
4518,54	10	5					
3359,59	10	5	^2D — $^2F^\circ$	— 1	— 1	0,25	
Columna IV (*a*)				C			
2478,60	10	10	^1S — $^1P^\circ$	— 1	— 1	2,66	U.
2296,80	6	6					
				Si			
3905,52	10	5	^1S — $^1P^\circ$	— 1	— 1	1,90	
2881,59	10R	10	^1D — $^1P^\circ$	+ 1	+ 1	0,78	U.
2528,52	10R	8	^3P — $^3P^\circ$	0	0	0,0	
2524,12	10R	6	^3P — $^3P^\circ$	0	+ 1	0,0	
2519,21	8R	5	^3P — $^3P^\circ$	0	0	0,0	
2516,12	10R	10	^3P — $^3P^\circ$	0	0	0,0	U.
2514,32	8R	5	^3P — $^3P^\circ$	0	— 1	0,0	
2506,90	10R	6	^3P — $^3P^\circ$	0	— 1	0,0	
2435,16	5R	5	^1D — $^1D^\circ$	0	0	0,78	
				Ge			
4685,90	5	10	^1S — $^3P^\circ$	— 1	— 1	2,02	ΔR = 2.
4226,61	50	—	^1S — $^1P^\circ$	— 1	— 1	2,02	
3269,49	10	10	^1D — $^3P^\circ$	+ 1	+ 1	0,88	U; ΔR = 2.
3124,84	10	5	^1D — $^3P^\circ$	+ 1	0	0,88	ΔR = 2.
3039,08	10R	10R	^1D — $^1P^\circ$	+ 1	+ 1	0,88	U.
2754,59	10	10R	^3P — $^3D^\circ$	— 1	+ 1	0,17	
2709,61	10	10R	^3P — $^3P^\circ$	0	+ 1	0,07	
2691,35	10	10	^3P — $^3P^\circ$	0	0	0,07	
2651,60	10	10R	^3P — $^3P^\circ$	0	— 1	0,0	
2651,15	10	10R	^3P — $^3P^\circ$	0	0	0,17	
2592,55	10	10R	^3P — $^3P^\circ$	0	— 1	0,07	

λ I . A	I		Serie	Δl	Δj	E . P	Observaciones
	a	c					
			Sn				
4524,74	6	10	$^1S - ^1P°$	— 1	— 1	2,12	
3801,03	9R	9R	$^1D - ^3P°$	+ 1	+ 1	1,06	ΔR = 2.
3330,60	6R	6R	$^1D - ^3P°$	+ 1	0	1,06	ΔR = 2.
3262,33	10R	5R	$^1D - ^1P°$	+ 1	+ 1	1,06	U.
3175,05	10R	9R	$^3P - ^3P°$	0	+ 1	0,42	
3034,12	9R	8R	$^3P - ^3P°$	0	+ 1	0,21	
3009,14	9R	8R	$^3P - ^3P°$	0	0	0,21	
2863,32	8R	6R	$^3P - ^3P°$	0	— 1	0,0	U.
2839,99	8R	10R	$^3P - ^3P°$	0	0	0,42	
2706,50	7R	7R	$^3P - ^3P°$	0	— 1	0,21	
2661,25	5R	4R	$^3P - ^1P°$	0	0	0,21	ΔR = 2.
2429,50	7R	8R	$^3P - ^3F°$	— 2	— 1	0,42	$^3D°$; Δl = — 1?
2354,84	5R	6R	$^3P - ^3F°$	— 2	— 1	0,21	$^3D°$; Δl = — 1?
			Pb				
6002,00	8	—					
5201,47	3	1	$^1S - ^3P°$	— 1	— 1	3,64	ΔR = 2.
5005,45	4	2	$^1S - ^1P°$	— 1	— 1	3,64	
4168,04	3R	10	$^1D - 1°$	?	0	2,64	
4057,83	5R	10R	$^3P - ^3P°$	0	+ 1	1,32	U; L.
3739,95	5R	4R					
3683,47	3R	10	$^3P - ^3P°$	0	+ 1	0,96	U; L.
3671,50	3R	10	$^1D - ^3P°$	+ 1	+ 1	2,64	ΔR = 2.
3639,58	6R	10R	$^3P - ^3P°$	0	0	0,96	L.
3572,74	5R	10	$^1D - ^1P°$	+ 1	+ 1	2,64	
2873,32	6R	10R	$^3P - 1°$	?	0	1,32	
2833,07	6R	10R	$^3P - ^3P°$	0	— 1	0,0	L.
2823,20	4R	10R	$^3P - 2°$	?	0	1,32	
2802,01	5R	10R	$^3P - 4°$	?	— 1	1,32	
2663,17	3R	10R	$^3P - ^3P°$	0	0	0,96	
2614,20	6R	5R	$^3P - 2°$	?	0	0,96	L.
2613,68	3R	3R	$^3P - 3°$	?	0	0,96	
2577,28	6R	3R	$^3P - ^1P°$	0	+ 1	1,32	ΔR = 2.
2476,39	4R	2R	$^3P - ^3P°$	0	— 1	0,96	
2393,81	8R	3R	^3P }	?	+ 1	1,32	
2175,60	4R	—	^3P } — 3°	?	0	0,96	
2170,00	6R	2R	^3P }	?	— 1	0,0	U; $^3D°$?

Columna IV (*b*)

λ I.A	I a	I c	Serie	Δl	Δj	E.P	Observaciones
			Ti				
5016,17	8	5	$^{5}G^{\circ}$	—1	—1	0,83	
5014,25	10	9	$^{5}G^{\circ}$	—1	—1	0,83	
5007,21	9	10	$^{5}G^{\circ}$	—1	—1	0,83	
4999,51	10	10	^{5}F — $^{5}G^{\circ}$	—1	—1	0,83	
4991,07	9	10	$^{5}G^{\circ}$	—1	—1	0,83	
4981,73	9	10	$^{5}G^{\circ}$	—1	—1	0,83	
4533,25	10R	5	$^{5}F^{\circ}$	0	0	0,83	
3998,64	10	6	$^{3}F^{\circ}$	0	0	0,0	
3989,76	10	6	$^{3}F^{\circ}$	0	0	0,0	
3981,77	10	3	$^{3}F^{\circ}$	0	0	0,0	
3964,27	7	3	$^{3}F^{\circ}$	0	—1	0,0	
3958,21	10	5	$^{3}D^{\circ}$	+1	+1	0,0	
3956,34	10	4	$^{3}D^{\circ}$	+1	+1	0,0	
3653,49	10R	4	^{3}F — $^{3}G^{\circ}$	—1	—1	0,0	U; 2*e*.
3642,68	10R	3	$^{3}G^{\circ}$	—1	—1	0,0	2*e*.
3635,47	9R	3	$^{3}G^{\circ}$	—1	—1	0,0	2*e*.
3377,59	8	3	$^{3}D^{\circ}$	+1	+1	0,0	2*e*.
3371,46	9	2	$^{3}G^{\circ}$	—1	—1	0,0	
3354,64	8	3	$^{3}G^{\circ}$	—1	—1	0,0	
3341,87	10R	10R	$^{3}G^{\circ}$	—1	—1	0,0	
3199,92	9R	3	$^{3}G^{\circ}$	—1	—1	0,0	
			Zr				
4815,62	8	3	$^{5}G^{\circ}$	—1	—1	0,60	
4805,87	5	2	$^{5}G^{\circ}$	—1	0	0,68	
4788,68	6	2	$^{5}G^{\circ}$	—1	0	0,73	
4772,31	8	4	^{5}F— $^{5}G^{\circ}$	—1	—1	0,62	
4739,48	10	5	$^{5}G^{\circ}$	—1	—1	0,65	
4710,08	10	5	$^{5}G^{\circ}$	—1	—1	0,68	
4687,80	10	8	$^{5}G^{\circ}$	—1	0	0,73	
3601,19	6	4	$^{3}G^{\circ}$	—1	—1	0,15	
3547,69	7	3	^{3}F— $^{3}G^{\circ}$	—1	—1	0,07	
3519,61	8	3	$^{3}G^{\circ}$	—1	—1	0,0	U.
3419,65	2	1	^{3}P — $^{3}F^{\circ}$	—2	—1	0,52	2*e*.
2918,25	5	3	^{3}P — $^{3}D^{\circ}$	—1	—1	0,52	2*e*.
2916,00	5	3	^{3}F — $^{1}D^{\circ}$	+1	+1	0,07	2*e*; ΔR = 2.

λ I.A	I a	I c	Serie	Δl	Δj	E.P	Observaciones
			Hf [1]				
4174,33	30	3	^{3}F — 16°	0	0	0,29	^{3}F°
4093,17	40	25					U.
3777,64	30	4	^{3}F — 17°	+ 1	+ 1	0,0	^{3}D°
3332,73	20	2	^{3}F — 29°	— 1	— 1	0,0	^{3}G°
3072,88	30	4	^{3}F — 34°	0	0	0,0	^{3}F°
2964,88	20	3	^{3}F — 47°	— 1	— 1	0,29	^{3}G°
2950,68	20	3	^{3}F — 48°	0	0	0,29	^{3}F°
2940,77	25	4	^{3}F — 40°	— 1	— 1	0,0	^{3}G°
2916,49	30	5	^{3}F — 41°	0	0	0,0	^{3}F°
2904,76	20	2	^{3}F — 50°	+ 1	+ 1	0,29	^{3}D°
2904,42	20	3	^{3}F — 56°	0	0	0,56	^{3}F°
2898,26	25	3	^{3}F — 51°	— 1	— 1	0,29	^{3}G°
			Th				
5049,77	7	3					
5017,24	8	3					
4919,80	9	6					
4863,17	9	8					
3188,22	5	5					
3108,26	4	5					
2942,80	3	3					
2870,53	3	3					
2837,30	4	5					
2832,33	4	4					
2692,40	3	3					
Columna V (*a*)			**N**				
5005,10	?						
5001,34	?						
4447,00	?						
4109,94	15		^{2}P — ^{2}D°	} — 1	— 1	10,6	U.
4099,96	10		^{2}P — ^{2}D°		— 1	10,6	
1200,70 }	10		^{4}S° — { ^{4}P		+ 1	0,0	
1200,20 }			^{4}S° — { ^{4}P		0	0,0	
1199,50	3		^{4}S° — { ^{4}P		— 1	0,0	

[1] Memorias citadas. Estos *Anales* **118**, página 88 y C. R. **199**, pág. 1201.

λ I. A	I a	I c	Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
			P				
2554,70	8	8					
2554,02	9	8	^2P	0	+ 1	2,33	
2553,30	9	8	$^2P^\circ$ — ^2P	0	0	2,33	U.
2536,38	10	10	^2P	0	0	2,33	U.
2535,60	10	10	^2P	0	— 1	2,33	
2534,75	8	8					
2149,80	8	—	$^2D^\circ$ — ^2P	+ 1	+ 1	1,42	
2136,80	8	—	$^2D^\circ$ — ^2P	+ 1	+ 1	1,42	
1787,50	7		^4P	— 1	+ 1	0,0	
1782,70	7		$^4S^\circ$ — ^4P	— 1	0	0,0	
1774,80	7		^4P	— 1	— 1	0,0	
			As				
2898,73	4R	6	^2P	0	+ 1	2,30	
2860,46	4R	8	$^2P^\circ$ — ^2P	0	0	2,23	
2780,23	8R	10	^2P	0	0	2,30	U.
2745,00	6R	5	^2P	0	— 1	2,23	
2492,91	1	5	^4P	+ 1	+ 1	1,31	ΔR = 2.
2456,52	4R	7	$^2D^\circ$ — ^4P	+ 1	+ 1	1,35	ΔR = 2.
2381,20	4R	5	^4P	+ 1	0	1,35	ΔR = 2.
2370,77	4R	5	$^2P^\circ$ — ^2D	— 1	— 1	2,30	
2369,67	4R	5	$^2P^\circ$ — ^2D	— 1	0	2,30	
2349,84	10R	5	$^2D^\circ$ — ^2P	+ 1	+ 1	1,31	U.
2288,14	10R	3	$^2D^\circ$ — ^2P	+ 1	+ 1	1,35	
1972,00	—	4R	^4P	— 1	+ 1	0,0	
1936,90	—	4R	$^4S^\circ$ — ^4P	— 1	0	0,0	
1889,90	—	4R	^4P	— 1	— 1	0,0	
			Sb				
3267,48	10R	10	$^2P^\circ$ — ^2P	0	0	2,03	
3232,52	10R	8	$^2P^\circ$ — ^2P	0	0	2,28	
3029,80	8R	7	$^2P^\circ$ — ^2P	0	— 1	2,03	
2877,92	10R	10R	^4P	+ 1	+ 1	1,05	ΔR = 2.
2769,94	9R	9R	^4P	+ 1	+ 1	1,22	ΔR = 2.
2670,65	4R	4	$^2D^\circ$ — ^4P	+ 1	0	1,05	ΔR = 2.
2598,08	6R	7R	^4P	+ 1	0	1,22	ΔR = 2; U.
2528,53	6R	10R	^2P	+ 1	+ 1	1,22	U.
2311,50	6R	7R	^4P	— 1	+ 1	0,0	
2175,88	6R	3R	$^4S^\circ$ — ^4P	— 1	0	0,0	
2068,38	4R	1	^4P	— 1	— 1	0,0	

λ I.A	I a	I c	Serie	Δl	Δj	E.P	Observaciones
			Bi				
5552,24	8	3					
4722,50	10	8	$^2D° — ^4P$	+ 1	+ 1	1,41	ΔR = 2.
3397,21	5R	2	$^2D° — X_2$	?	?	1,41	
3067,73	9R	6R	$^4S° — ^4P$	+ 1	— 1	0,0	U.
3024,64	8R	4R	$^2D° — ^4P$	+ 1	0	1,90	ΔR = 2.
2993,34	9R	4	$^2D° — 3_3$	?	— 1	1,41	
2989,04	9R	5R	$^2D° — 4$	?	0	1,41	
2938,31	10R	8R					
2897,98	10R	5R	$^2D° — ^2P$	+ 1	+ 1	1,41	U.
2809,63	8R	2	$^2D° — ^2P$	+ 1	0	1,41	
2780,52	7R	4	$^2D° — 6$	?	+ 1	1,41	
2276,57	5R	2	$^4S° — ^4P$	— 1	0	0,0	
2061,71	8R	1	$^4S° — ^4P$	— 1	— 1	0,0	
Columna V (*b*)			**V**				
4881,57	10R	10	$^4F — ^4D°$	+ 1	0	0,04	
4875,48	10R	10	$^4F — ^4D°$	+ 1	+ 1	0,04	
4864,73	10R	9	$^4F — ^4D°$	+ 1	+ 1	0,02	
4851,51	9	8	$^4F — ^4D°$	+ 1	+ 1	0,0	
4594,10	10R	10	$^4F — ^4G°$	— 1	— 1	0,07	
4462,37	9	9					
4460,31	10R	10R	$^6D — ^6P°$	+ 1	+ 1	0,30	
4408,51	6R	10R	$^6D — ^6F°$	— 1	0	0,27	U.
4408,21	6R	1	$^6D — ^6F°$	— 1	0	0,27	
4406,65	8R	4R	$^6D — ^6F°$	— 1	0	0,30	
4400,59	9	10	$^6D — ^6F°$	— 1	— 1	0,26	
4395,24	10	10	$^6D — ^6F°$	— 1	— 1	0,26	
4384,73	10R	10	$^6D — ^6F°$	— 1	— 1	0,28	
4379,24	10R	10R	$^6D — ^6F°$	— 1	— 1	0,30	U.
4134,47	9	10	$^6D — ^6D°$	0	+ 1	0,30	
4132,00	10R	10	$^6D — ^6D°$	0	+ 1	0,28	
4128,08	10	10	$^6D — ^6D°$	0	+ 1	0,27	
4116,70	10R	7	$^6D — ^6D°$	0	0	0,26	
4111,79	10R	2	$^6D — ^6D°$	0	0	0,30	
4105,17	10	4	$^6D — ^6D°$	0	— 1	0,26	
4099,80	10	2	$^6D — ^6D°$	0	— 1	0,27	
3185,41	10R	2R	$^4F — ^4G°$	— 1	— 1	0,07	U.
3184,00	10R (3184,00 y 3183,99)	2R	$^4F — ^4G°$	— 1	— 1	0,0	
3183,99			$^4F — ^4G°$	— 1	— 1	0,04	
3183,42	10R	2R	$^4F — ^4G°$	— 1	— 1	0,02	

λ I . A	I a	I c	Serie	Δl	Δj	E . P	Observaciones
			Nb				
4137,13	10	4	$^6F^o$	— 1	— 1	0,0	
4123,85	10	4	$^6F^o$	— 1	— 1	0,02	
4100,97	10	6	^6D — $^6F^o$	— 1	— 1	0,05	
4079,73	10	6	$^6F^o$	— 1	— 1	0,09	U.
4058,97	10	10	$^6F^o$	— 1	— 1	0,13	U.
3358,38	10	—					
			Ta				
6516,12	10	3					
6485,37	10	10					U.
6430,77	9	5					
6045,40	5	—					
5997,24	7	—					
5811,00	8	—					
3631,61	1	1					
3406,94	6	2					
3406,65	5	2					
3318,85	5	5					
3311,14	9	3					U.
3103,25	5	1					
2964,33	4	1					
2963,33	4	1					
2802,07	3	1					
2714,68	3	2					
2698,30	3	1					
2656.60	3	2					
2653,28	3	2					
2647,49	3	2					

Columna VI (*a*)

		O				
7775,68	6	^5P	— 1	+ 1	9,1	
7774,01	8	$^5S^o$ — ^5P	— 1	0	9,1	
7771,97	10	^5P	— 1	— 1	9,1	
4641,83	—					
1306,12	10	$^3S^o$	+ 1	— 1	0,0	
1304,96	10	^3P — $^3S^o$	+ 1	0	0,0	
1302,27	10	$^3S^o$	+ 1	+ 1	0,0	

λ I.A	I		Serie	Δl	Δj	E.P	Observaciones
	a	c					
			S				
9237,70	2		^5P	— 1	+ 1	6,5	
9228,20	2		^5P	— 1	0	6,5	
9212,80	3		$^5S^\circ$ — ^5P	— 1	— 1	6,5	
4696,30	6		^5P	— 1	+ 1	6,5	
4695,50	8		^5P	— 1	0	6,5	
4694,20	10		^5P	— 1	— 1	6,5	
1826,40	6		$^3S^\circ$	+ 1	— 1	0,0	
1820,50	6		^3P — $^3S^\circ$	+ 1	0	0,0	
1807,40	6		$^3S^\circ$	+ 1	+ 1	0,0	
			Se				
4742,30	8		^5P	— 1	+ 1	5,95	
4739,10	9		$^5S^\circ$ — ^5P	— 1	0	5,95	
4730,90	10		^5P	— 1	— 1	5,95	U.
2062,60	6		$^3S^\circ$	+ 1	— 1	0,32	
2039,70	8	8	^3P — $^3S^\circ$	+ 1	0	0,26	
1960,20	10R	10	$^3S^\circ$	+ 1	+ 1	0,0	
			Te				
3529,41	8R	—					
2769,65	9	4	^1D — $^3S^\circ$	+ 2	+ 1	1,30	ΔR = 2.
2530,73	7	5	$^5S^\circ$	+ 1	— 1	0,58	ΔR = 2.
2385,78	10R	10R	^3P — $^3S^\circ$	+ 1	— 1	0,58	U.
2383,27	10R	10R	$^3S^\circ$	+ 1	0	0,58	U.
2265,52	5R	3	^1D — 1°	?	+ 1	1,30	
2259,02	8R	3	^3P — $^5S^\circ$	+ 1	0	0,0	ΔR = 2.
2255,50	5R	3	^1D — 2°	?	0	1,30	
2142,75	9R	1	^3P — $^3S^\circ$	+ 1	+ 1	0,0	

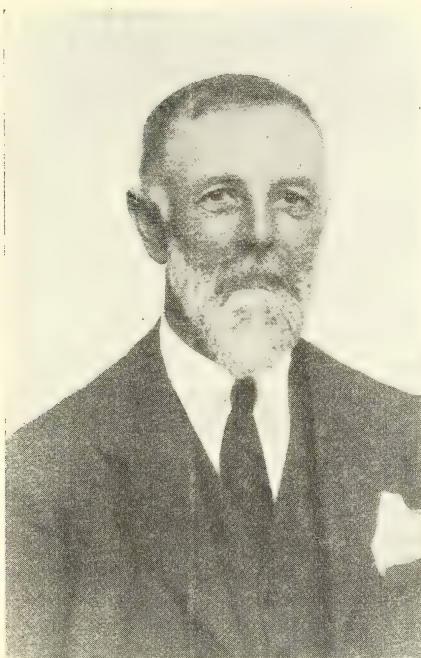
Columna VI (*b*)

λ I.A	a	c	Serie	Δl	Δj	E.P	Observaciones
			Cr				
5409,80	10	8	^5D — $^5P^\circ$	+ 1	+ 1	1,02	2*e*.
5208,43	10R	10	$^5P^\circ$	— 1	— 1	0,94	
5206,42	10R	10	^5S — $^5P^\circ$	— 1	0	0,94	
5204,54	9R	10	$^5P^\circ$	— 1	+ 1	0,94	

λ I . A	I		Serie	Δl	Δj	E . P	Observaciones
	a	c					
Cr							
4289,73	10R	10	$^7P^o$	— 1	+ 1	0,0	L.
4274,80	10R	10	^7S — $^7P^o$	— 1	0	0,0	L.
4254,34	10R	10	$^7P^o$	— 1	— 1	0,0	U; L.
3605,33	10R	10	$^7P^o$	— 1	+ 1	0,0	U; L.
3593,48	10R	8R	^7S — $^7P^o$	— 1	0	0,0	U; L.
3578,69	10R	10R	$^7P^o$	— 1	— 1	0,0	L.
3014,92	5R	1	$^5F^o$	— 1	— 1	0,96	
3013,72	4R	2	^5D — $^5P^o$	+ 1	— 1	0,96	
3013,03	4R	1	$^5P^o$	+ 1	— 1	0,96	
2889,26	3R	—	$^5D^o$	0	0	1,02	
2731,90	5R	1	^5S — $^5P^o$	— 1	0	0,94	
Mo							
6030,66	9	10	$^5P^o$	+ 1	+ 1	1,52	U; 2*e*.
5888,32	10	10	^5D — $^5P^o$	+ 1	+ 1	1,47	2*e*.
5858,28	8	10	$^5P^o$	+ 1	0	1,47	2*e*.
5570,46	10	10	$^5P^o$	— 1	+ 1	1,33	
5533,03	10	10	^5S — $^5P^o$	— 1	0	1,33	
5506,50	10	10	$^5P^o$	— 1	— 1	1,33	
4434,96	10	4					
4411,71	10	8					
4381,66	10	8					
3902,96	10R	10	$^7P^o$	— 1	+ 1	0,0	U.
3864,12	10R	10	^7S — $^7P^o$	— 1	0	0,0	U.
3798,26	10R	10R	$^7P^o$	— 1	— 1	0,0	U.
3635,45	6	1					
3447,13	10	3					
3358,12	9	2	^5D — $^5F^o$	— 1	— 1	1,42	
3319,00	2	1					
3208,88	10	2					
3193,98	10R	2	^7S — $^7P^o$	— 1	+ 1	0,0	
3170,34	10R	2	^7S — $^7P^o$	— 1	0	0,0	
3158,15	9R	2					
3132,60	10R	2	^7S — $^7P^o$	— 1	— 1	0,0	
3112,12	5	1					

(*Concluirá*)

JOSE S. CORTI



En la ciudad de Mendoza, donde habitualmente residía, ha fallecido el 17 de junio próximo pasado, el ingeniero José S. Corti, de larga y brillante actuación profesional, la que desarrolló simultáneamente con una intensa actividad en la enseñanza, a la vez que intervenía en sociedades industriales y científicas de diversa índole, todo lo cual daba a su figura relieves prestigiosos que lo destacaban entre las personalidades más salientes de la región cuyana. Cuando se constituyó en Mendoza la sección filial de la Sociedad Científica Argentina, fué elegido José S. Corti como su primer presidente.

Había nacido en 1861. En muy temprana edad, a las 16 años, ingresó como dibujante técnico en el Departamento Nacional de Ingenieros; en

los años 1881 a 1885 actuó en la Comisión de Estudios y Construcción del Ferrocarril Andino, planeando la vía de acceso a Mendoza y la prolongación hasta San Juan, a donde llegó en 1885, y donde formó su hogar. En 1887 obtuvo el título de Ingeniero Civil de la Universidad Nacional de Buenos Aires.

Radicado en San Juan, se le nombró profesor en la Escuela Nacional de Minas en 1891, llegando en 1893 al cargo de director de la misma. Fué también Ingeniero Jefe del Departamento Nacional de Ingenieros con asiento en San Juan, hasta 1899, fecha en la que pasó a ocupar el puesto de Jefe de la Cuarta Sección de Puentes y Caminos de la Nación, que comprendía las provincias de San Juan, San Luis y Mendoza.Esta jefatura la desempeñó hasta 1917, en que se acogió a los beneficios de la jubilaciós.

Aparte de los trabajos propios de su Sección, en cuanto se refería a puentes y caminos, continuó siempre ocupándose de estudios y construcciones ferroviarias. En 1901 intervino en la ejecución del túnel cordillerano para el Ferrocarril Trasandino Argentino; dirigió la construcción del monumento al Cristo Redentor en la Cordillera; proyectó las primeras construcciones de cemento armado que se hicieron en Mendoza (1903); ejecutó por encargo del gobierno provincial el primer camino de macadam en Mendoza (1907), desde la Capital a la Villa Nueva de Guaymallén, etc.

Sus profundos conocimientos matemáticos tuvieron una interesante aplicación, cuando en 1911 fué designado perito para dirimir una controversia de orden técnico-legal entre los ferrocarriles Gran Oeste Argentino y Oeste de Buenos Aires, acerca de la posición exacta del paralelo 35° Sud en las proximidades de Colonia Alvear (Mendoza). El trabajo de Corti, a base de observaciones astronómicas de precisión y de métodos de cálculo de gran exactitud constituye una contribución de alto valor científico para la resolución de muchas cuestiones geodésicas. En 1912, proyectó y construyó el Observatorio Astronómico de Mendoza.

En 1913 fué nombrado profesor en la Escuela Nacional de Vitivinicultura de Mendoza: en 1915, formó parte de la Comisión Especial que estudió el camino carretero a Chile, y a él se le debe la troza adoptada más tarde por la Dirección Nacional de Vialidad entre las Termas de Villavicencio y la Cruz del Paramillo.

El ingeniero José S. Corti, perenecía a la Sociedad Científica Argentina desde 1902; a la American Society of Civil Engineers, desde 1896; y a numerosas otras instituciones científicas y profesionales del país y del extranjero.

Aparte de lo anteriormente señalado, tuvo también una amplia actuación en los círculos locales, habiendo sido Profesor honorario en la Universidad popular de Mendoza, Presidente del Consejo Administrativo de la Enseñanza Pública Provincial, Director General interino de Escuelas, etc. Su labor periodística es copiosa, habiendo tratado múltiples temas de astronomía, matemáticas e ingeniería, con galanura de estilo y profundos conocimientos acerca de los temas que estudiaba.

BIBLIOGRAFIA

FOLLETOS RECIBIDOS EN LA ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS

POR C. C. D.

Actualités Scientifiques et Industrielles. Folletos (16 ½ cm × 25 ½ cm) editados por Hermann & Cía., París. Número de páginas y precios variables. Se detallan a continuación los últimos remitidos, siguiendo la numeración consecutiva.

Nº 471. — UNGAR (GEORGE), *Les Substances Histaminiques et la Transmision chimique de l'Influx Nerveux. L'Histaminergie normale et pathologique.* 90 páginas, con algunas figuras y una lámina; 20 fr.; 1937.

Fascículo X de la serie « Exposés de Physiologie », dirigida por André Mayer.

El autor, doctor en ciencias, hace presente en una Introducción, que actualmente, se admite que todo cambio de composición cualitativa o cuantitativa del medio interno modifica las funciones orgánicas; y que esa modificación puede significar una regulación.

Después de esa Introducción, trata sucesivamente las substancias histamínicas; su intervención en los procesos fisiológicos; los procesos patológicos locales y generales ;la histaminergía normal y patológica. Y al final, una nutrida bibliografía.

Las conclusiones son que el papel fisiológico y patológico de las sustancias histamínicas no es ya discutible, pero que sus modalidades pueden ser concebidas de distintos modos; la histamina puede considerarse como una sustancia animal accidental formada únicamente por la acción de microorganismos, o de destrucciones celulares; o bien que se trate de una hormona verdadera con su metabolismo fisiológico propio y desempeñando una misión en la regulación normal de la circulación. El autor acepta esta última hipótesis.

Nº 495 a 497. — SCHREIDER (EUGENE), *Les Types Humains.* Tres folletos respectivamente: 104 páginas, 8 láminas fuera de texto, 20 francos; 80 páginas, 18 francos; 106 páginas y 5 láminas fuera de texto, 20 francos. 1937.

Constituyen los fascículos III, IV y V de la serie « Biologie du Travail et Biotypologie » dirigida por H. Laugier. El autor es bibliotecario archivero de la Sociedad francesa de Biotipología.

El primer folleto se ocupa de los tipos humanos somáticos, raciales, morfológicos, constitucionales. El segundo de los tipos psicológicos: temperamentos, caracteres, tipos de orientación general del espíritu; tipos psicoanalíticos; tipos reflexiólogos; tipos psicosociólogos. El tercero se ocupa de los tipos somatopsíquicos; variedades neurovegetativos; constituciones somatopsíquicas; biotipos y variedades endocrinológas; tipos criminales. En una introducción el autor hace presente que ha debido proceder a una « clasificación de las clasificaciones ». Estos folletos traen interesantes datos y una copiosa bibliografía.

Se ha dicho muchas veces que las especies han sido imaginadas para la comodidad de los sabios, pero que en realidad solo existen individuos; el autor insiste en que hay mucha verdad en tal aserto, pero que él no es absoluto. Se esfuerza el profesor Schreider en ordenar lo que ha sido hecho desde un siglo atrás y desde distintos puntos ded vista, a fin de poner luz en la multitud de tipos humanos .

Nº 501. — Drabovitch (W.), *Les Réflexes Conditionnés et la Psychologie Moderne.* 70 páginas; 155 francos. 1937.

Fascículo IV de la serie « Physiologie Générale du Système Nerveux », dirigida por Luis Lapicque, del Instituto de Francia y profesor honorario de la Sorbona.

Después de un prefacio escrito por Lasicque, el autor desarrolla el tema en cinco capítulos en los que define los reflejos condicionados; trata los reflejos y la tendencia; las fases sucesivas del desarrollo de la doctrina de los reflejos condiciados, los ejemplos concretos y la cronaxia; la naturaleza psicológica del reflejo condicionado.

El autor es discípulo de J. P. Pavlov. « Gracias al capital descubrimiento de H. Berger, de las *ondas corticales,* un nuevo y magnífico puente se ha estado tendiendo entre la fisiología y la psicología, y especialmente con los estudios de Adrian y Mattews, de Kornmuller, de Jasper ». Pensamiento, vida afectiva, voliciones, complejos inconcientes o subconcientes se vinculan cada vez más y más sólidamente con la actividad nerviosa y cerebral, con la vida del cuerpo entero. Los « electrencefalogramas », de Berger, ponen de manifiesto un vínculo íntimo entre los movimientos de atención, las percepciones, las emociones, la vigilia y el sueño y las ondas cerebrales.

Nº 502. — Curie (Maurice) y Prost, *Nécessaire mathèmatique;* 116 páginas, 44 figuras; 20 francos. 1937.

Maurice Curie es profesor de la Facultad de Ciencias de París. M. Prost es su asistente.

El bagaje matemático que trae este libro está dedicado a los jóvenes estudiantes que aspiran al certificado de estudios de física, y al de estudios superiores. Procura darles las bases necesarias para consultar sin grandes dificultades un tratado de Matemáticas Generales. Los capítulos se ocupan sucesivamente de las nociones de Algebra elemental; Trigonometría; Representación gráfica de funciones de una variable; Cálculo de derivadas;

Series, logaritmos y función exponencial; Infinitamente pequeños y diferenciales.

Una nota sobre errores y aproximaciones en las medidas y cálculos numéricos y físicos; otra sobre grandores, unidades y homogeneidad de las fórmulas; y un anexo relativo a las nociones de cálculo de probabilidades, terminan el libro. Algunas definiciones dejan algo que desear, pero el trabajo puede sin duda prestar servicios a los jóvenes en obsequio de quienes han sido escrito.

Nº 516. — RENAUD (PAUL), *Analogies entre les Principes de Carnot, Mayer y Curie.* 48 páginas, 10 francos. 1937.

Fascículo VIII de la serie « Exposés de Phisique Théorique », dirigida por Luis de Broglie.

El autor, doctor en ciencias, pone de manifiesto que los tres principios de Carnot, Mayer y Curie, se presentan como cosas ciertas del punto de vista teórico, pero que, en la práctica, sus comodidades o utilidades, aunque inmensas en ciertos dominios pueden resultar nulas en otros. Esto es al menos la conclusión del estudio, el cual ha sido encarado en el sentido de averiguar si el principio de Curie generalizado puede ser expresado analíticamente en forma análoga a los otros dos.

Al efecto hace el autor un examen detenido de los principios de la energía, del de Carnot, del de Curie generalizado;; de las relaciones entre los tres principios en cuestión, de los movimientos perpetuos del flujo. Después de formular las conclusiones, trae un apéndice relativo a consideraciones sobre los sistemas de gran número de parámetros. La clasificación determinista debe regir para que esos principios resulten absolutos, satisfaciendo entonces un voto de Enrique Poincaré.

Nº 517. — HAÏSSMSKY (M.), *Le Polonium.* 44 páginas con algunos gráficos, 12 francos. 1937.

Es el fascículo I de la serie « Radioactivité », dirigida por el profesor de la fórmula y director del Instituto de Radio A. Debierne. El autor pertenece a dicho Instituto de Radio (de París).

Sucesivamente se exponen nociones generales; propiedades nucleares; acciones químicas y fisiológicas; propiedades físicas, químicas y electroquímicas; propiedades coloidales y de absorción; preparación y surificación de las fuentes del polonio. Al final, la bibliografía.

Recordemos que el polonio, o radio F, descubierto en 1898, merced a sus propiedades radioctivas, por los esposos Curie, pertenece a la familia radioactiva Uranio-Radio. Es el producto inmediato de la desintegración de RaE, isótropo de Bi, y se desintegra, a su vez, con emisión de rayo alfa, dando el radio C_1, isótropo inactivo del plomo y último término de la familia.

Nº 529. — DUCLAUX J., *Mouvement Brownien.* 96 páginas con algunas figuras; 25 francos. 1937.

Constituye el capítulo V del tomo II del « Tratado de Química-Física ». del autor. Y en la serie general pertenece a la serie « Lecons de Chimie

physique appliquée à la Biologie», dirigida también por dicho profesor del «Collège de France».

Después de una introducción de carácter histórico, y en la que pone de manifiesto, por un lado, la elegancia de las doctrinas de Einstein y Smoluchowsky, y por otro, la debilidad de la teoría del movimiento browniano, entre en materia, estudiando o exponiendo el carácter calificativo; las verificaciones experimentales de la teoría molecular; el estudio de las emulsiones; los diversos aspectos del movimiento browniano; el movimiento browniano en los gases; el efecto Ludwig-Soret. Al final, la bibliografía.

Nº 542-543. — YVON (J.), *Recherches sur la Théorie Cinétique des liquides.* Dos folletos respectivamente de 66 y 76 páginas; 18 francos cada uno. 1937.

Fascículos VII y VIII de la serie «Théories Mécaniques Hydrodynamique-Acoustique» dirigida por Y. Rocard.

El primer fascículo trata *Las Fluctuaciones en densidad;* el otro *La Propagación y la Difusión de la Luz.* El autor es un ex-alumno de la Escuela Normal Superior de París y profesor en el «Lycée Henri IV».

Tiene por objeto este trabajo (de física matemática) el estudio teórico de la difusión (sin cambio de longitud de onda) de la luz, por un fluido monoatómico; y la elección de un metódo estático. La teoría cinética, tal cual ha sido codificada por Gibbs, parece convenir para tratar los problemas relativos a los líquidos. Primero se estudian las fluctuaciones en densidad; luego estas mismas en concentración dentro de mezclas binarias; luego se da un esquema de una representación térmica en un fluido de forma ondulatoria el cual, en contra de las concepciones de Einstein, toma en cuenta la estructura molecular de los fluidos.

El segundo folleto es continuación del primero, y ambos buscan el estudio teórico de la difusión de la luz por un fluido monoatómico despreciando los cambios de longitudes de onda. Una etapa intermedia se franquea con un examen del problema de la refracción. Primero se trata la teoría cinética de la constante dieléctrica de un líquido monoatómico no polar. Numerosas referencias son dadas al final de cada folleto.

Nº 544. — ROCARD (Y.), *Les Phénomènes d'auto-oscilation dans les installations hydrauliques.* 69 páginas, con algunas figuras; 18 francos. 1937.

Fascículo IX de la serie «Théories Mécaniques Hydrodynamiques-Acoustique» dirigida por el autor.

A pesar del término «hydraúlique» que se usa en el título, es en realidad un problema de acústica el que trata el autor. Las investigaciones que motivaron, hace algunos años, la catástrofe del Lago Negro, son las que inspiran este trabajo que es, en resumen, de naturaleza físico-matemática.

Después de un prefacio y de una Introducción, se precisa cual es el objeto del libro, o sea, abordar el estudio de fenómenos complejos como son aquellos relativos a un conducto acoplado con un sistema mecánico susceptible de movimiento, cuyos desplazamientos provocan una reacción sobre el

escurrimiento del fluido. Ese sistema puede, por sí mismo, estar con oscilación. La primera parte del libro trata la autooscilación del agua en conductos alimentados por màquinas de características conocidas y munidas de un órgano capaz de vibrar modulando el gasto; la segunda parte comporta extensiones diversas de la teoría de la autooscilación; y la tercera, una extensión al caso de una red hidráulica compleja.

Nº 547. — RIVAULT (R.), *Contribution à l'étude des Régions Ionisées de la Haute Atmosphère.* 90 páginas con 39 figuras. 1937.

Después de una Introducción y un plan de división del trabajo, el autor divide su estudio en tres partes en las que trata respectivamente el fenómeno de los ecos, el proceso del reenvío al suelo de la energía electromagnética; y de las imágenes múltiples. Al final las conclusiones y la bibliografía.

Los resultados a que llega el autor pueden clasificarse en tres categorías: los que confirman los alcanzados por otros autores, o que precisan algunos detalles poco desarrollados hasta entonces; los que aunque confirman los resultados de observaciones ya hechas, parecen al autor ser importantes y han sido especialmente objeto de su atención. Lo que parece nuevo relativamente a la observación de ondas de 4 m y de 4 1,5 m y en los resultados que el trabajo aporta en la cuestión, son materia de la última parte del folleto.

Nº 549. — BRILLOUIN (LEÓN), *La Structure des Corps Solides, dans la Physique moderne.* 56 páginas con algunas figuras. 18 francos. 1937.

Es el fascículo II de « Bibliothèque de la Societé Philomathique de París ».

El autor previene en un Prefacio que su trabajo no es ni riguroso ni completo: en el curso de sus lecturas en libros antiguos o modernos ha hecho anotaciones interesantes y discusiones sugestivas y es una vinculación de esos fragmentos y un esquema de la evolución de las ideas relativas a la estructura de los sólidos que contiene el folleto que nos ocupa. Se limita a las propiedades estáticas de los sólidos. Cuando se conozcan con certeza las propiedades de los sólidos se verán probablemente aparecer los límites de sus condiciones de estabilidad y prever las de la fusión. Los puntos tratados siguen el siguiente orden: Introducción; sólido, líquido y gas; estructura de las diferentes faces; estructura de los cristales, sus elementos constitutivos; naturaleza de las fuerzas de cohesión, hipótesis esenciales; las relaciones de Cauchy, histórico; teorías de Poisson y Kelvin, discusiones; solución de Voigt y de Born; ¿a qué se parece un átomo en mecánica ondulatoria? átomos de simetría esférica; estructura de las redes cristalinas, red simple y red con base; los metales y sus redes; las relaciones de Cauchy y los resultados de las mediciones; agitación térmica, ecuaciones de estado; cómo verificar esa teoría? Conclusiones.

Nº 550. — CARTAN (LUIS), *Spectrographie de Masse. Les Isotropies et leurs masses.* 92 páginas con 24 figuras y 4 láminas fuera de texto. 20 francos. 1937.

En el fascículo VI de la serie « Exposés de physique atomique expérimentale » dirigida por Mauricio de Broghe. Este último ha escrito el prefacio del litro que nos ocupa, en el que recalca la importancia que la espectrografía de las masas tiene para la física del núcleo: desempeña el mismo papel que el de la balanza cuando se fundó la química; además aporta indicaciones sumamente precisas, del punto de vista de la estabilidad de los núcleos complejos y de las energías de vinculación; en ese dominio donde la ley de Einstein parece ahora bien establecida, la medida de las masas está estrechamente ligada con la de las energías.

De ahí y de otras consideraciones se desprenden los servicios que el libro de Cartan esté llamado a prestar a todos los físicos que se interesen en tales cuestiones. Después de una Introducción, siguen tres partes principales: una se ocupa de las masas; otra de los isótropos, y la última de la Estadística isotrópica y energías de vinculación nucleares... Al final una tabla general de los isótropos naturales, y una bibliografía.

Nº 551. — WEIL (ANDRÉ), *Sur les Espaces à Structure uniforme et sur la Topologie Générale.* 40 páginas, 15 francos. 1937.

Se trata del fascículo primero de las « Publicaciones del Instituto de Matemáticas de la Universidad de Estrasburgo ».

El autor, después de observar que la noción de *distancia* es utilizada en muchos trabajos sobre topología a pesar de que es una especie de intrusa en este ramo; y de que su empleo está, a su vez, fundado en la posibilidad del mismo en todo espacio localmente compacto que satisfaga al segundo axioma de la *enumerabilidad,* lo que importa, por consiguiente, la hipótesis de lo enumerable (o de la separabilidad), « parásito que infecta tantos libros y memorias cuyo alcance disminuye a la vez que perjudica la clara comprensión de los fenómenos »; y luego después, igualmente, de otras consideraciones por el estilo, pregunta: ¿cuál cosa habrá de sustituir esas nociones?

Manifiesta que cuando se procura raciocinar sobre los grupos topológicos, se comprueba que se hallan en ellos muchas propiedades conocidas de los espacios métricos, pues esas propiedades tienen un origen común, que es sencillamente la posibilidad de comparar entre sí las vecindades que se dan en todos los puntos del espacio; ello basta para establecer casi todas las propiedades esenciales de los espacios métricos; y es lo que el autor se propone hacer ver en este trabajo desarrollado en 7 capítulos.

SOCIOS ACTIVOS

Aguilar, Félix
Albizzatti, Carlos M.
Alessi, Juan M.
Alvarez, Raúl J.
Alvarez de Toledo, Belisario
Allende Lezama, Luciano P.
Anastasi, Camilo
Anchorena, Juan E.
André, Enrique de
Andrioletti, Juan Luis
Añón Suárez, Vicente
Aparicio, Francisco de
Aráoz Alfaro, Gregorio
Arce, Manuel J.
Arditi Thompson, H.
Armani, Aquiles
Arnaudo, Silvio J.
Avila Méndez, Delfín
Aztiria, Ignacio
Bado, Atilio A.
Bachmann, Enesto
Baglietto, Eduardo E.
Balbiani, Atilio
Baliani, Luis M.
Bancalari, Agustín
Bandoni, Alfredo J.
Barabino Amadeo, S.
Barbieri, Antonio
Bargna, Juan L.
Barilari, Mariano J.
Barral Souto, José
Barrancos, Leónidas A.
Becke, Alejandro von der
Berrino, Juan B.
Bertino, José Carlos
Besio Moreno, Nicolás
Bianchi Lischetti, A.
Biggeri, Carlos
Blaquier, Juan
Boaglio, Santiago
Bolognini, Héctor
Bonanni, Cayetano A.
Bontempi, Luis
Bordas, Alejandro F.
Bordenave, Pablo E.
Borruat, Luis
Borzi, Ana María
Bosch, Gonzalo
Bosisio, Anecto J.
Bottaro, Juan C.
Bozzini, Luis (h.)
Briano, Juan A.
Bunge, Juan C.
Buontempo, Guillermo
Burkart, Arturo
Butty, Enrique
Buzzo, Alfredo
Buzzo, Eduardo B.
Caillet Bois, Teodoro
Calandra, Raúl E.
Camus, Nicolás
Canale, Humberto
Canal Feijoo, Bernardo
Capelli, Pedro F.
Carabelli, Juan José
Carbia, Rómulo D.
Carbone, Esteban
Carbonell, José J.
Cárcova, Enrique de la
Carelli, Antonio
Carelli, Humberto H.
Caride Massini, Pedro
Carman, Ernesto
Carrea, Juan Ubaldo
Casacuberta, Antonio
Castellanos, Alberto
Castello, Manuel F.
Castiñeiras, Julio R.
Celasco, Juan L.
Clos, Enrique C.
Cock, Guillermo E.
Coni Bazán, F. A.
Curti, Orlando P.
Curutchet, Luis
Chanourdie, Enrique
Chizzini Melo, Aníbal F.
D'Ascoli, Lucio
Dassen, Claro C.
Dasso, Héctor
Dasso, Ricardo L.
De Cesare, Elías A.
De Fina, Armando L.
De la Ini, Juan E.
Dellepiane, Luis J.
Deulofeu, Venancio
Díaz, Emilio C.
Dieulefait, Carlos E.
Doello-Jurado, Martín
Dobranich, Jorge W.
Domínguez, Juan A.
Dubecq, Raúl E.
Dueñas, José
Duhau, Luis
Dupont, Enrique
Durañona y Vedia, A.
Durrieu, Mauricio
Edelberg, Benjamín
Escudero, Antonio
Escudero, Pedro
Faré, Santo S.
Fernández, Alberto J.
Fernández Díaz, A.
Fernández Long, S.
Figini, Angel
Figuerero, Hernando W.
Fischer, Gustavo Juan
Flores, Emilio M.
Floriani, Luis
Florit. Carlos J.
Forn, Carlos J.
Fossa Mancini, E.
Franceschi, Alfredo
Fürnkorn, Divico A.
Gadda, Carlos Manuel
Galmarini, Alfredo G.
Gando, Alfredo R.
Gandolfi Herrero, Augusto
Gandolfo, José S.
Gascón, Alberto
Gaspar, Fernando L.
Géneau, Carlos E.
Gerardi, Donato
Ghigliazza, Sebastián
Giagnoni, Bartolomé E.
Giannone, José
Gradín, Carlos
Grieben, Arturo
Gutiérrez, Ricardo J.
Haussler, Emilio
Herbin, Luis A.
Hermitte, Enrique
Herrera Vegas, M.
Herzer, Bernardo
Hickethier, Carlos F.
Hofmann, Herbert
Hortal, José Angel
Houssay, Bernardo A.
Hoyo, Arturo
Igartúa, Luis María
Irigoyen, Luis H.
Isetta, José
Ivanissevich, Ludovico
Jorge, José M.
Jakob, Cristofredo
King, Diarmid O.
Kinkelin Pelletán, J. C. de
Knoche, Walter
Kraglievich, Nicolás T.
Krapf, Eduardo
Labarthe, Julio
Lagunas, Simón
La Menza, Francisco
Laporte, Luis B.
Larco, Esteban
Lasso, Alfredo L.
Latzina, Eduardo
Ligniéres, Roberto
Lizer y Trelles, C. A.
Lombardi, Alberto
Loudet, Osvaldo
Loyarte, Ramón G.
Lugones, Arturo M.
Llauró, José
Mac Donagh, E. J.
Magnin, Félix J.
Mognin, Jorge
Mainini, Carlos
Mallol, Emilio
Mamberto, Benito
Marcó del Pont, E.
Marchionatto, Juan B.
Maresca, Antonio J.
Marini, Tomás L.
Martignone, Eduardo
Marotta, F. Pedro
Marotta, R. Armando
Mata, Leopoldo
Méndez, Julio
Meoli, Gabriel
Meoli, Humberto
Mercau, Agustín
Meriggi, Juan C.
Mermoz, Francisco A.
Molfino, José F.
Molina Carranza, L.
Molle, Clotilde C.
Montes, Vicente E.
Moreno, Evaristo V.
Nágera, Juan José
Natale, Alfredo
Natale, Ernesto
Negrete, Lucía
Negri, Mario L.
Nelson, Ernesto
Nielsen, Juan
Oliveri, Alfredo B.
Ortega Belgrano, Raúl
Ortiz, Aníbal A.
Ortiz de Rosas, Jorge
Otamendi, Gustavo
Ottonello, Héctor
Páez, José María
Page, Franklin Nelson
Paitoví y Oliveras, A.
Paquet, Carlos
Parodi, Edumndo
Parodi, Lorenzo R.
Pasman, Raúl G.
Pasman, Rodolfo E.
Pastore, Franco
Paz Anchorena, José M.
Pérez Hernández, A.
Perrone, Cayetano
Pestalardo, Agustín
Pini, Aldo S.
Platz, Hubert
Podestá, Juan Carlos
Polti, Modesto
Posadas, Carlos
Quinos, José Luis
Quinterno, Bruno F.
Quiroga, Pedro R.
Raimondi, Alejandro
Raffo, Bartolomé M.
Ramaccioni, Danilo
Ramallo, Carlos M.
Ratto, Héctor R.
Rebuelto, Antonio
Rabuelto, Emilio
Reoce, William Asher
Repetto, Blas Angel
Repossini, José
Ringuelet, Emilio J.

Rissotto, Atilio A.
Rivarola, Rodolfo
Robles, Angel A.
Rodríguez Aravena, S.
Rodríguez, Germinal
Rodríguez, Miguel
Roffo, Angel H.
Roffo, Juan
Roldán, Raimundo
Romero Brest, Enrique
Rokotnitz, Otto
Rospide, Juan
Rossell Soler, Pedro
Ruata, Luis E.
Ruíz Moreno, Isidoro
Ruiz Moreno, Adrián
Rumi, Tomás J.
Sabaria, Enrique
Salomón, Hugo
Sánchez, José Ricardo
Sánchez, Gregorio L.
Sánchez Díaz, Abel
Sánchez Sorondo, M. G.
Sanromán, Iberio
Santángelo, Rodolfo
Sarhy, Juan F.
Sarrabayrouse, Eugenio
Savon, Marcos A.
Schnack, Benno J.
Schmidt, Max
Schulz, Guillermo
Selva, Domingo
Selzer, Samuel
Sesma,, Angel
Sheahan, Juan F.
Silva, Leónidas L.
Simonoff, Miguel
Simons, Hellmut
Siri, Luis
Sobral, Arturo
Solari, Emilio F.
Solari, Miguel A.
Soler, Frank L.
Sordelli, Alfredo
Spinetto, David J.
Spota, Víctor J.
Storni, Segundo R.
Suárez, Angel
Talana, Alberto F.
Talana, Jorge
Tarragona, José
Tedeschi, Virgilio
Tello, Eugenio
Torre Bertucci, Pedro
Torello, Pablo
Tossini, Luis
Trelles, Rogelio A.
Trucco, Sixto E.
Valeiras, Antonio
Valentini, Argentino
Valentinuzzi, Máximo
Vallebella, Colón B.
Vanossi, Reinaldo
Varela, Rufino
Vecchi, Arístides de
Vela Huergo, Julio
Veyga, Francisco de
Vidal, Eduardo
Vignati, Milcíades A.
Villalobos D., C.
Vignaux, Juan C.
Vinardell, Alberto
Volpatti, Eduardo
Wainer, Jacobo
White, Guillermo J.
Wauters, Carlos
Wysztelewski, W. de
Zamboni, Agustín
Zappi, Enrique V.
Zavalla, Carlos M.
Zuloaga, Angel M.

SOCIOS ADHERENTES

Bazzanella, José
Devoto, Carlos Alberto
Ferramola, Raúl
Folcini, Martín L. G.
García, Eduardo D.
Glücksmann, Carlos E.
Goyena, Ricardo J.
Laclau, Juan Pedro
Magne de la Croix, P. A.
Mailhos, Luis E.
Milesi, Emilio Angel
Quevedo Capdevila, Eduardo A.
Recoder, Roberto F.
Repetto, Cayetano
Rusconi, Carlos
Sadosky, Manuel
Somonte, Eduardo
Vistalli, Alina M.
Wechsler, Wolf

CASAS ADHERENTES

Angel Estrada y Cía.
Benvenuto y Cía.
Lutz, Ferrando y Cía.
Hijos de Atilio Massone
Otto Hess, S. A.
T. Gr. "Tomás Palumbo'
Jacobo Peuser, S. A. Itda.

SOCIO VITALICIO

Huergo, Eduardo María

MIEMBROS PROTECTORES DE LA ORGANIZACION DIDACTICA DE BUENOS AIRES

Anchorena, Juan E.
Besio Moreno, Nicolás
Tornquist, E. y Cía. (Lda.)

SECCION CORDOBA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Juan Olsacher; Vice-presidente, Dr. Miguel Fernández; Vice-presidente, Ing. Daniel A. García; Secretario de actas, Dr. Guillermo V. Stuckert; Secretario de correspondencia, Prof. Tulio Mácola; Tesorero, Sr. Bernardo Pilotto; Pro-tesorero, Dr. Carlos C. Hosseus; Vocales: Ing. Clodoveo Pascualini; Ing. Jorge E. Bobone; Ing. Luis Chechi; Ing. Ambrosio L. Taravella; Dr. Federico Padula; Dr. José Carlomagno; Dr. Meade L. Zimmer; Sr. Enrique Sparn.

SOCIOS ACTIVOS

Aguiar, Henoch D.
Bobone, Jorge E.
Brandan, Ramón A.
Broglia, Alberto A.
Buteler, Jesús E.
Camilloni, Carlos
Carlomagno, José
Chaudet, Enrique
Checchi, Luis
Deheza, Eduardo
Del Viso, Jacinto
Devoto, Heraclio A.
Esteban, Fernando
Fernández, Miguel
Fontana, Lorenzo P.
García, Daniel
Godoy, Salvador A.
Gómez, Calixto A.
Gordillo, Pedro N.
Hosseus, Carlos Curt
Lofayette Zimmer, M.
Larrauri, Agustín C.
Lutzow Holm, Olaf.
Mácola, Berardo A.
Mácola, Tulio
Mirizzi, Pablo Luis
Ninci, Raúl T.
Olsacher, Juan

Padula, Federico
Pasqualini, Clodoveo
Peláez J. Gambastiani de
Pilotto, Bernardo
Rothlin, Edwin
Schmiedecke, Augusto
Sigal, Moisés
Sparn, Enrique
Stuckert, Guillermo V.
Taravella, Ambrosio L.
Tarragó, Emeterio
Trebino, Natalio
Urciolo, Victorio
Vanni, Alberto
Vercello, Carlos
Yadarola, Mauricio L.

SECCION SANTA FE

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Gustavo A. Fester; Vice-presidente, Dr. José Piazza; Secretario de correspondencia, Ing. Quím. Francisco A. Bertuzzi; Secretario de actas, Ing. Quím. José Cruellas; Tesorero, Ing. Quím. Enrique Virasoro; Vocal 1º, Ing. José Babini; Vocal 2º, Prof. Rolando Hereñú; Vocal suplente 1º, Prof. Julio Salaber; Vocal suplente 2, Ing. Quím. Guillermo Berraz; Encargado de Biblioteca y Canje, Ing. Quím. Rodolfo Rouzaut; Encargado de Publicaciones, Ing. José Babini.

SOCIOS ACTIVOS

Anadón, Leónidas
Ariotti, Juan Carlos
Babini, José
Benet, Pedro José
Berraz, Guillermo
Bertuzzi, Francisco A.
Bonazzola, César J.
Borruat, Luis (hijo)
Borzone, Rodolfo
Bossi, Celestino
Caballero, Martín A.
Camo, José María
Cerana, Miguel
Claus, Guillermo
Cohan, Marcos
Courault, Pablo
Crouzeilles, A. L. de
Cruellas, José
Christen, Carlos
Christen, Rodolfo G.
Damianovich, Horacio
Falco, Federico
Fester, Gustavo A.
Frenguelli, Joaquín
Gollán, Josué (h.)
Gschwind, Eduardo P.
Guinle, Hugo José
Hereñú, Rolando
Hotschewer, Curto
Juliá, Tolrá Antonio
Kleei, Gregorio
Lachaga, Dámaso A.
Mai, Carlos
Mántaras, Fernando
Marelli, Hipólito
Martino, Antonio E.
Montpellier, Luis Marcos
Mounier, Celestino
Muzzio, Enrique
Nigro, Angel
Niklison, Carlos A.
Oliva, José
Peresutti, Luis
Piazza, José
Piñero, Rodolfo
Pozzo, Hiram J.
Ragonese, Arturo E.
Reinares, Sergio
Rouzaut, Rodolfo
Salaber, Julio
Salgado, José
Santini, Bruno L. P.
Schivazappa, Mario
Simonutti, Atilio A.
Tissembaum, Mariano
Urondo, Francisco E.
Virasoro, Enrique

SECCION MENDOZA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Juan B. Lara; Vice-presidente, Ing. Agr. José Raúl Ponce; Secretario, Ing. Agr. Julio Tolosa (h); Tesorero, Ing. Cayetano C. Piccione; Bibliotecario, Sr. Adrián Ruíz Leal; Vocales: Dr. Eduardo Carette; Dr. Mario Bidone; Ing. Alfredo Rosenthal; Sr. Manuel Tellechea; Ing. Agr. Rafael E. Pontis.

SOCIOS ACTIVOS

Alurralde, Juan Carlos
Anzorena, Jacinto
Ayala Castagnino, G.
Basso, Germinal
Benegas, Raúl
Bidone, Mario
Borsani, Carlos Pablo
Burgoa, Pedro A.
Carette, Eduardo
Castillo, José
Croce, Francisco M.
Espinosa, Norberto A.
Flor Alvarado, José M.
Gabrielli, Francisco J.
Galeano, Edgardo
García, José Federico
Godoy Vergelin, G.
Gomensoro, José N.
Granzella, Sinibaldo
Guiard, Ricardo
Jofré, Alberto L.
Lara, Juan B.
Lucero, Braulio G.
Lugones, Manuel G.
Magistretti, Guillermo
Maneschi, Ernesto
Maroso, José Angel
Maveroff, Aquiles
Mayorga, Santiago C.
Miyara, Salomón
Paganotto, Juan P.
Pelaia, Dante
Piccione, Cayetano C.
Ponce, José Raúl
Pontis, Rafael E.
Richard, Alfonso E.
Rosales, Ranulfo S.
Rosenthal, Alfrado
Ruíz, Aníbal
Ruíz Leal, Adrián
Serra, Luis Angel
Silvestre, Tomás
Stura, Angel C.
Tellechea, Manuel
Tolosa, Julio (h)
Toso, Juan F.
Villanueva, Miguel Angel

SECCION LA PLATA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Carlos A. Sagastume; Secretario, Ing. Adolfo P. Grissi; Tesorero, Dr. Carlos Teobaldo; Vocales: Dr. Hilario Magliano, Dra. Juana Cortelezzi; Ing. Juan Sabato; Dr. Federico E. Christmann.

SOCIOS ACTIVOS

Alsina Fuertes, Fidel
Amarante, Pedro C.
Angli, Jerónimo
Arroyo Basaldúa, Víctor M.
Basualdo, Washington S.
Bauer, Conrado
Bonet, Luis A.
Canals Frau, Salvador
Cortelezzi, Juana
Crespi Gherzi, Rodolfo A.
Christmann, Federico E
Daló, Héctor R.
Ferrari, Obdulio J. F.
Gascón, Jorge
Gershánik, Simón
Giovambattista, Humberto
Grisi, Adolfo P.
Mc Loughlin, Rogelio P.
Magliano, Hilario
Marmonti, Angel
Massinurio, Blas
Méndez, José D.
Micheletti, Luis A.
Nico, Raúl
Oliva, Virgilio
Paternosto, Pedro G.
Platzceck, Ricardo P.
Rodríguez, Marcelo R. N.
Sabato, Ernesto R.
Sabato, Juan
Sáez, Francisco A.
Sagastume Berra, A. E
Sagastume, Carlos A.
Scheggia, Eduardo R.
Teobaldo, Carlos
Toranzos, Fausto L.
Trejo, César A.
Vucetich, Danilo C.
Wilkens, Alejandro

SOCIOS CORRESPONDIENTES

Aguilar y Santillán, R.	México
Alvarez, Antenor	Sgo. del Estero
Amaral, Afranio de	San Pablo (Br.)
Avendaño, Leónidas	Lima
Bachmann, Carlos J.	Lima
Bolívar, Ignacio	Madrid
Bonarelli, Guido	Gubbio (It.)
Borel, Emile	París
Bragg, William Henry	Londres
Bruch, Carlos	Olivos (B. A.)
Cabrera, Blás	Madrid
Campos Porto, Pablo	Río de Janeiro
Carabajal, Melitón M.	Lima
Dabbene, Roberto	La Plata
Darmois, Eugenio	Nancy (Fr.)
Darmois, Georges	París
Dávila, Rubén	Santiago (Ch.)
Escomel Edmundo	Arequipa (P.)
Fiebrig, Carlos	Munich (Al.)
Fontecilla Larrain, Arturo	Santiago (Ch.)
Fort, Michel	Lima
González del Riego, Felipe	Lima
Greve, Germán	Santiago (Ch.)
Guinier, Philibert	Nancy (Fr.)
Hadamard, Jacques	París
Hauman, Luciano	Bruselas
Hernández, Juvenal	Santiago (Ch.)
Hijar y Haro, Luis	México
Janet, Pierre	París
Jiménez de Asúa, Luis	Madrid
Keiper, Guillermo	Berlín
Kinart, Fernando	Amberes
Lahille, Fernando	Tarn (Fr.)
Langevin, Paul	París
Levi Civita, Tulio	Roma
Lobo, Bruno	Río de Janeiro
Mardones, Francisco	Santiago (Ch.)
Molina, Enrique	Concepc. (Ch.)
Monjaráz, Jesús E.	México
Moretti, Gaetano	Milán
Oliver Schneider, Carlos	Santiago (Ch.)
Pereira d'Andrade, Lencastre	Nova Goa (I. P.
Perrin, Tomás G.	México
Pi y Suñer, Augusto	Barcelona
Porter, Carlos E.	Santiago (Ch.)
Reyes Cox, Eduardo	Santiago (Ch.)
Rospigliosi y Vigil, Carlos	Lima
Rowe, Leo S.	New York
Shepperd, William R.	Wáshington
Tello, Julio C.	Lima
Valle, Rafael H.	México
Vélez, Daniel M.	México
Villarán, Manuel V.	Lima
Vitoria, Eduardo	Barcelona
Volterra, Vito	Roma



ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

ADOPTADOS PARA SUS PUBLICACIONES POR LA

ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

DIRECTOR: EMILIO REBUELTO

SETIEMBRE 1938. — ENTREGA III. — TOMO CXXVI

SUMARIO

BUENOS AIRES

CALLE SANTA FE 1145

1938

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

ADVERTENCIA. — Los colaboradores de los Anales son personalmente responsables de la tesis sustentada en sus escrito. Tienen derecho a la corrección de do pruebas. Los que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos, deben solicitarla por escrito. Los manuscritos, correspondencia, etc. se enviarán a la sede social, **Santa Fe 1145.**

Impreso en los Talleres Gráficos "TOMAS PALUMBO" - La Madrid 321-325 - Buenos Aires

SOBRE LA TRANSFORMADA DE BELTRAMI-POINCARÉ Y LA GENERALIZACION DE LA FORMULA DE RIEMANN

Por J. C. VIGNAUX

Introducción. — La célebre integral doble

$$\iint_D \frac{\varphi(v)}{z - v}\, dw \qquad [1]$$

en la cual v es la variable de integración, fué consideraba por primera vez, e independientemente, por E. Beltrami (1) y por H. Poincaré (2).

M. Pompeiu (3), ha dado utilizando una integral doble de la forma [1], el primer ejemplo de una función analítica, continua en el conjunto de sus puntos singulares, y M. Denjoy (4) ha demostrado rigurosamente la existencia de funciones analíticas univocas y continuas sobre todo el plano por la consideración de la integral doble

$$\iint_E \frac{d\omega}{v - z}$$

Recientemente W. Fédoroff (5) ha probado que no puede existir para cada función analítica unívoca y continua en todo el plano, una representación analítica en la forma de integral doble [1] válida en todo el dominio Ω-D; y además ha propuesto la representación de

(1) *Sulle funzioni complesse*, Rend. Ist. Lombardo, V. XX (1887).

(2) *Sur les fonctions à espaces lacunaires*, American Journal of Mathematics. V. XIV (1892, p. 209).

(3) *Sur les singularités des fonctions analytiques uniformes*, Comp. Rendus, 1904, p. 914.

(4) *Sur les fonctions analytiques uniformes qui restent continues sur un ensemble parfait discontinue de singularités* (Comp. Rendus. 1909, p. 1154; L. Zoretti, *Leçons sur le prolongement analytique*, París, 1911, p. 86.

(5) *Bulletin. Acad. Polonaise* (1927-28).

una función analîtica dada $f(z)$ mediante una serie de integrales

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \iint_E \frac{\varphi_n(v)}{v - z} dw .$$

La consideración de una integral doble de aquel tipo ha permitido crear la notable teoría de las *funciones no-monógenas* debido a M. Pompeiu (1), la cual ha dado lugar recientemente a importantes trabajos en su aspecto analítico y geométrico de Calugareano, Theodoresco, Kasner y varios otros.

M. Borel (2) ha considerado una integral doble análoga a la [1], pero extendida a todo el plano, para definir sus célebres *funciones monógenas generalizadas* no analíticas en el sentido de Cauchy.

La función, definida por la integral

$$f(z) = \iint_D \frac{\varphi(v)}{v - z} d\omega \qquad [2]$$

es *continua* y *uniforme en todo el plano.*

M. Pompeiu ha probado esta propiedad, aun para el caso general en que la función $\varphi(v)$ dada, sea solamente acotada e integrable Lebesgue.

En los puntos z exteriores al dominio D la $f(z)$ es función *holomorfa,* mientras que en los puntos interiores ella es *holomorfa* [α] (3) (*polígena*) y su *derivada areolar* es igual a $\varphi(v)$ en el dominio D.

A su vez, M. Theodoresco (4) generalizando los resultados de M. Pompeiu, ha probado que la función

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\varphi(v)}{v - z} d\omega$$

donde $\varphi(v)$ es continua en el dominio cerrado y satisface a una con-

(1) *Sur une classe de fonctions d'une variable complexe,* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1912, p. 108; 1913, p. 277.

(2) E. Borel, *Sur le théorie du potentiel logarithmique,* Comp. Rendus. Ac. d. Sc. 154 (1912; *Leçons sur les fonctions monogènes uniformes,* París (1917). Véase también sobre este particular los importantes trabajos de G. Julia; y la interesante nota de R. Cacciopoli, *Integrales doubles de Cauchy et fonctions monogènes généraliseés,* C. Rendus, t. 198, p. 2227.

(3) Pompeiu, *Annaes de Academia Polytecnica do Porto,* t. III, 1913; *Bulletin de l'Academia Roumaine,* t. III (1914-15) (cuatro notas).

(4) Thodoresco, Thésis, París, 1931.

dición de Hölder de *orden* $\alpha > 0$, admite derivadas parciales continuas con respecto a ξ y η $(z = \xi + i\eta)$ en cada punto del dominio abierto D y estas derivadas satisfacen la ecuación

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \xi} + i \frac{\partial f(z)}{\partial \eta} = 2\,\varphi(z)\,.$$

La expresión [2] establece por tanto una cierta correspodencia funcional entre una función $\varphi(v)$ de un dominio D y una función $f(z)$ compleja de la variable compleja z definida en todo el plano, cuyas propiedades se trata de investigar.

Desde otro punto de vista, la [2] se puede considerar también como una cierta correspondencia entre una *familia infinita de funciones* $\varphi(v)$ dadas en un dominio común D, y la nueva familia formada por sus transformadas.

En la presente memoria nos proponemos abordar el estudio de la transformada [2] considerándola en el doble aspecto antes señalado. *Además propongo una generalización de la fórmula de inversión de Riemann.*

2. *Definiciones.* — Dada una función $\varphi(v)$ acotada e integrable Lebesgue (¹) en un dominio cerrado y finito D, la integral doble

$$f(z) = \iint_D \frac{\varphi(v)}{z - v}\, d\omega \quad , \quad (v = \xi + i\eta \quad , \quad d\omega = d\xi . d\eta)$$

define en todo el plano de la variable compleja: $z = x + i\,y$, una función compleja $f(z)$ de z, uniforme y continua que llamaré la *transformada* de Beltrami-Poincaré de la función $\varphi(z)$ o simplemente *transformada* $(B\text{-}P)$. A las funciones $\varphi(z)$ y $f(z)$ las denominaremos respectivamente *función generatriz* $(B\text{-}P)$ y *función determinante* $(B\text{-}P)$. La transformación $(B\text{-}P)$ es una operación *funcional distributiva.*

Cuando la variable z pertenece a la región exterior del dominio D la función es holomorfa (²). En efecto; sea z_0 un punto cualquiera

(¹) H. LEBESGUE, *Leçons sur l'integration,* París (1928).

(²) M. POMPEIU y THEODORESCO prueban esta propiedad, aplicando a la función $f(z)$ el teorema de MORERA. La demostración que aquí propongo, además de ser más simple, nos permite dar un desarrollo tayloriano de $f(z)$ en un entorno de todo punto exterior a D y su prolongación analítica (en el sentido de MERAY-WEIERSTRASS) en toda la región exterior.

exterior a D; y escribamos el núcleo $\dfrac{1}{v-z}$ en la forma siguiente

$$\frac{1}{v-z} = \frac{1}{v-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{v-z_0}\left(\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{v-z_0}}\right)$$

o bien

$$\frac{1}{v-z} = \frac{1}{v-z_0} + \frac{(z-z_0)}{(v-z_0)^2} + \ldots + \frac{(z-z_0)^n}{(v-z_0)^{n+1}} + \frac{(z-z_0)^{n+1}}{(v-z)\,(v-z_0)^{n+1}}$$

Sustituyendo esta expresión en la integral

$$f(z) = \iint_D \frac{-\varphi(v)}{v-z}\, d\omega$$

se tiene

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + \ldots + a_n(z-z_0)^n + C_n$$

donde los coeficientes tienen por expresión

$$a_n = -n!\iint_D \frac{\varphi(v)\, d\omega}{(v-z_0)^{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

y el término complementario

$$C_n = -\iint_D \frac{\varphi(v)}{v-z}\left(\frac{z-z_0}{v-z_0}\right)^{n+1} . \, d\omega$$

Vamos a probar que C_n tiende a cero cuando $n \longrightarrow \infty$. Sea M un límite superior del módulo de $\varphi(v)$ en todo el dominio D, y pongamos

$$\text{mín}\,|v-z_0| = \delta \neq 0$$

cuando v recorre el dominio cerrado D. Consideremos ahora el círcu-do de centro z_0 y radio $R < \delta$, el cual será por tanto completamente exterior a D; y pongamos

$$|z-z_0| = r$$

para todo punto z de dicho círculo. Se tiene

$$|v-z| > \delta - r$$

luego resulta

$$\left|\frac{1}{v-z}\right| < \frac{1}{\delta - r}$$

para todo z situado en el círculo y todo v interiror a *D;* por tanto

$$|C_n| \leq \frac{M \,.\, S}{\delta - r} \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^{n+1} \qquad \left(S = \iint_D d\omega\right)$$

y el factor $\left(\frac{r}{R}\right)^{n+1}$ tiende hacia cero, cuando n aumenta indefinidamente. Resulta de aquí que, $f(z)$ es igual a la suma de la serie de potencia convergente

$$f(z) = a_0 + a_1 (z - z_0) + \ldots + a_n (z - z_0)^n + \ldots$$

en el círculo de radio $R < \delta \neq 0$.

Luego, la función $f(z)$ es holomorfa en todo punto del plano completamente exterior al dominio D.

Las derivadas sucesivas de $f(z)$ en un punto cualquiera z exterior al dominio D, viene dada por la expresión

$$f^{(n)}(z) = n! \iint_D \frac{\varphi(v)\, d\omega}{(v - z)^{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

En efecto; sea z un punto fijo y Δz un incremento de z tal que z y $x + \Delta z$ sean puntos exteriores al dominio D. Se tiene

$$f(z) = \iint_D \frac{\varphi(v)}{v - z}\, d\omega \quad , \quad f(z + \Delta z) = \iint_D \frac{\varphi(v)}{v - z - \Delta z}\, d\omega$$

de donde

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \iint \frac{\varphi(v)\, d\omega}{(v - z)\,(v - z - \Delta z)}$$

$$= \iint \frac{\varphi(v)\, d\omega}{(v - z)} + \iint \frac{\varphi(v) - \Delta z}{(v - z)^2 . (v - z \Delta z)}\, d\omega$$

La última integral del segundo miembro tiende a cero al mismo tiempo que $|\Delta z| \longrightarrow 0$.

En efecto; si hacemos

$$v - z = \rho e^{i\theta} \quad , \quad d\omega = \rho\, d\rho\, d\theta$$

es

$$|v - z| = \rho$$

luego el módulo de dicha integral es inferior a

$$\frac{MS}{\rho^3} \mid \Delta z \mid < \frac{MS}{\delta^3} \mid \Delta z \mid$$

donde M es el límite superior de $\mid \varphi(v) \mid$, mín $\mid v - z \mid = \delta \neq 0$ cuando v recorre D, y S representa el área de D. Pasando al límite para $\mid \Delta z \mid \longrightarrow 0$, se tiene

$$f'(z) = \iint_D \frac{\varphi(v)\, d\omega}{(v - z)^2}.$$

Del mismo modo se prueba que

$$f''(z) = 1 \cdot 2 \iint_D \frac{\varphi(v)\, d\omega}{(v - z)^3}, \quad f'''(z) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \iint_D \frac{\varphi(v)\, d\omega}{(v - z)^4}$$

y en general, por recurrencia resulta la [1].

Por tanto, *las derivadas sucesivas de la función holomorfa $f(z)$, en los puntos exteriores a D, se obtienen derivando bajo el signo de la integral doble* [1] *respecto a la variable z.*

Según esto, el desarrollo de Taylor de la $f(z)$ toma la forma

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)$$

donde

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \iint_D \frac{\varphi(v)\, d\omega}{(v - z_0)^{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

En particular, si el origen de coordenadas es completamente exterior al dominio D, resulta

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

donde

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \iint_D \frac{\varphi(v)}{v^{n+1}} d\omega$$

y este desarrollo es convergente en el círculo de centro en el origen y radio igual al extremo inferior de las distancias del centro a los puntos del contorno de D.

3. — Vamos a demostrar la importante propiedad siguiente:
Si la función $\varphi(v)$ *tiene por transformada* $(B-P)$ *a* $f(z)$, *la* $v\,\varphi(v)$ *tiene por transformada* $(B-P)$ *a* $z\,f(z)$, *a menos de un polinomio aditivo.*

Sea

$$f(z) = \iint_D \frac{\varphi(v)}{v-z}\, d\omega$$

y

$$g(z) = \iint_D \frac{v\,\varphi(v)}{v-z}\, d\omega.$$

Puesto que

$$\frac{v}{v-z} = 1 + \frac{z}{v-z}$$

resulta entonces

$$g(z) = \iint_D \varphi(v)\, d\omega + z \iint_D \frac{\varphi(v)}{v-z}\, d\omega$$

es decir

$$z\,f(z) = \iint_D \frac{v\,\varphi(v)}{v-z}\, d\omega + C$$

Del mismo modo, se tiene

$$z^2 f(z) = \iint_D \frac{v^2\,\varphi(v)}{v-z}\, d\omega + C z + C_1$$

y en general

$$z^n f(z) = \iint_D \frac{v^n\,\varphi(v)}{v-z}\, d\omega + A_n(z) \quad (n = 0, 1, 2 \ldots)$$

4. *Operaciones fundamentales.* — Vamos a probar las proposiciones siguientes relativas a la suma y al producto de dos transformaciones $(B\text{-}P)$.

Consideremos las dos transformaciones de Beltrami-Poincaré.

$$f(z) = \iint_D \frac{\varphi(v)}{z-v}\, d\omega \qquad [1]$$

$$g(z) = \iint_D \frac{\psi(v)}{z-v}\, d\omega \qquad [2]$$

definidas en el mismo dominio D.

Puesto que es

$$f(z) + g(z) = \iint_D \frac{\theta(v)}{z - v} d\omega$$

donde

$$\theta(z) = \varphi(z) + \psi(z)$$

es también función acotada e integrable (L); resulta entonces:

La suma (diferencia) *de dos transformadas* (*B-P*) *es una transformada* (*B-P*), *cuya generatriz* (*B-P*) *es la suma* (diferencia) *de las generatrices* (*B-P*) *de las primeras.*

Probaremos ahora que el producto de dos transformadas (*B-P*) es una transformada (*B-P*).

En efecto; multiplicando las integrales dobles

$$f(z) = \iint_D \frac{\varphi(v)\, dv}{z - v} \qquad [1]$$

$$g(z) = \iint_D \frac{\psi(u)\, du}{z - u} \qquad [2]$$

resulta

$$f(z) \cdot g(z) = \iint_D \frac{\varphi(v)\, dv}{z - v} \cdot \iint_D \frac{\psi(u)\, du}{z - u} =$$

$$= \iint_D dv \iint_D \frac{\varphi(v)\, \psi(u)}{(z - v)\,(z - u)}\, du. \qquad [3]$$

El núcleo de esta última integral, se puede escribir en la forma

$$\frac{1}{(z - v)\,(z - u)} = \frac{1}{v - u}\left(\frac{1}{z - v} - \frac{1}{z - u}\right)$$

y sustituyendo en la relación [3] resulta

$$f(z)\, g(z) = J_1(z) + J_2(z)$$

habiendo puesto

$$J_1(z) = \iint_D dv \iint_D \frac{\varphi(v)\, \psi(u)\, du}{(v - u)\,(z - v)}$$

$$J_2(z) = \iint_D du \iint_D \frac{-\varphi(v)\, \psi(u)\, dv}{(v - u)\,(z - u)}$$

Por otra parte, las integrales $J_1\ (z)$ y $J_2\ (z)$ se pueden escribir en la forma siguiente:

$$J_1(z) = \iint_D \frac{\varphi(v)}{z - v} \left[\iint_D \frac{\psi(u)\, du}{v - u} \right] dv = \iint_D \frac{\varphi(v)\, A\,(v)}{z - v}\, dv \qquad [4]$$

donde

$$A\,(v) = \iint_D \frac{\psi(u)\, du}{v - u}$$

es una integral doble de Beltrami-Poincaré de parámetro v.

Del mismo modo, se tiene

$$J_2(z) = \iint_D \frac{\psi(u)}{z - u} \left[\iint_D \frac{-\varphi(v)\, dv}{v - u} \right] du = \iint_D \frac{\psi(u)\,.\,B\,(u)}{z - u}\, du \qquad [5]$$

donde

$$B\,(u) = \iint_D \frac{-\varphi(v)\, dv}{v - u}$$

Teniendo en cuenta las igualdades [4] y [5], la igualdad [3] resulta

$$f(z).g(z) = \iint_D \frac{\varphi(v)\, A\,(v)}{z - v}\, dv + \iint_D \frac{-\psi(u)\, B(u)}{z - u}\, du =$$

$$= \iint_D \frac{\varphi(v)\, A\,(v) + \psi(v)\, B\,(v)}{z - v}\, dv \qquad [6]$$

La función

$$\boxed{\theta\,(z) = \varphi\,(z)\, A\,(z) + \psi\,(z)\, B\,(z)}$$

es acotada e integrable Lebesgue en el dominio (D) y por tanto la integral doble

$$\iint_D \frac{\theta\,(v)}{z - v}\, dv$$

es una integral de Beltrami-Poincaré y se tiene, según [6]

$$f\,(z)\,.\,g\,(z) = \iint_D \frac{\theta\,(v)}{z - v}\, dv.$$

Luego: *el producto de dos transformadas (B-P) es una transformada (B-P), que tiene como determinante (B-P), el producto de las*

determinante (B-P) de sus factores y cuya generatriz $\theta(v)$ *está dada por la relación* [2] ([1]).

5. — La integral doble de Beltrami-Poincaré se puede transformar en una integral simple de Laplace como sigue:

Sea

$$f(z) = \iint_D \frac{\varphi(v)}{z - v} \, d\omega$$

y pongamos

$$\text{máx } R(v) = \sigma$$

cuando el punto v recorre el dominio cerrado D. Para todo z tal que $R(z) > \sigma$; se tiene

$$\frac{1}{z - v} = \int_0^\infty e^{-t(z-v)} \, dt \qquad (t \geq 0)$$

puesto que en tal hipótesis, resulta

$$R(z - v) = x - \xi > 0$$

y la integral [2] converge en dicho semiplano.

La [1] resulta entonces

$$f(z) = \iint_D \frac{\varphi(v)}{z - v} \, d\omega = \iint_D \varphi(v) \, d\omega \int_0^\infty e^{-tz+tv} \, dt = \int_0^\infty e^{-tz} \, dt \iint \varphi(v) \, e^{tv} \, d\omega$$

puesto que en este caso la permutación de la integración es legítima ([1]), desde que fijado z en el semiplano $R(z) > \sigma$, y v en D, la integral [2] converge uniformemente.

([1]) La función $\theta(z)$ juega aquí el mismo rol que la función

$$H(x) = \int_0^x F(t) \, G(t - x) \, dt = F \times G$$

en el producto formal de dos integrales

$$\int_0^\infty F(t) \, dt \quad \text{y} \quad \int_0^\infty G(t) \, dt \, .$$

G. DOETSCH llama a la función $H(x)$ « *Faltungsfunktion* » y prueba su existencia. (*Die Integrodifferentinlgleichungen von Faltungs typus Math. Annalen*, 89, (1923) p. 194, § 1. Ella interviene en cuestiones fundamentales, como ser en la teoría de la composición y de las funciones permutables de Volterra; producto de series sumables (B), etc.

([1]) Véase: S. PINCHERLE, *Lezioni di Calcolo Infinitesimale*, p. 446. El teorema ha sido demostrado para el caso de la integral definida *simple;* su extensión a las dobles no ofrece dificultad.

Finalmente, si ponemos

$$\psi(t) = \iint_D \varphi(v)\, e^{vt}\, d\omega \qquad [3]$$

la igualdad anterior se puede escribir

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-tz}\, \psi(t)\, dt \qquad R(z) > \sigma$$

integral de Laplace de camino real y cuya *generatriz* de Laplace $\psi(t)$ viene dada por la relación [3] en función de la generatriz $\varphi(v)$ de Beltrami.

Por tanto: *Toda función $f(z)$ determinante $(B - P)$ es función determinante (L) cuya generatriz (L) $\psi(t)$, está dada por la* [3] *en función de la generatriz $(B - P)$ $\varphi(v)$.*

La integral doble

$$\psi(t) = \iint_D \varphi(v)\, e^{vt}\, d\omega$$

define una nueva correspondencia funcional entre la generatriz de Beltrami $\varphi(v)$ y la función $\psi(t)$ de la variable real t, que llamaremos la resultante (B) de la $\psi(v)$.

La $\psi(t)$ admite las derivadas de todos los órdenes.

$$\psi'(t) = \iint_D \varphi(v)\,.\, v e^{vt}\, d\omega \ , \quad \psi''(t) = \iint_D \varphi(v)\, v^2\, e^{vt}\, d\omega$$

y en general se tiene

$$\psi^{(n)}(t) = \iint_D \varphi(v)\, v^n\, e^{vt}\, d\omega \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

desde que es legítima la derivación respecto de t bajo signo integral.

La $\psi(t)$, es además una función entera de t. En efecto, se tiene

$$e^{vt} = \sum_0^\infty \frac{(vt)^n}{n!}$$

para todo t real y todo v de D.

Luego

$$\iint_D \varphi(v)\, e^{vt}\, d\omega = \iint_D \varphi(v) \left(\sum_0^\infty \frac{(vt)^n}{n!} \right) d\omega$$

$$= \sum_0^\infty \iint_D \frac{v^n t^n}{n!}\, \varphi(v)\, d\omega$$

$$= \sum_0^\infty \frac{t^n}{n!} \iint_D v^n\, \varphi(v)\, d\omega$$

por ser legítima la integración término a término.

Si ponemos

$$a_n = \frac{1}{n!} \iint_D v^n\, \varphi(v)\, d\omega = \psi^{(n)}(0) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

resulta

$$\psi(t) = \sum_0^\infty a_n t^n$$

Además, puesto que

$$|a_n| \leq \frac{1}{n!} \iint_D |v|^n . |\varphi(v)|\, d\omega \leq \frac{\lambda^n}{n!} MS$$

donde

$$|v| \leq \lambda \quad , \quad |\varphi(v)| < M \quad , \quad S = \iint_D d\omega$$

luego el radio de convergencia de la serie $\psi(t)$ según la fórmula de Cauchy-Hadamard es

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|}} = \infty .$$

Recíprocamente, si la generatriz (L) $\psi(t)$, de una integral de Laplace

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\, \psi(t)\, dt$$

es la resultante $(B\text{-}P)$ con generatriz $(B\text{-}P)$ *igual a* $\varphi(v)$, se tiene entonces

$$f(z) = \iint_D \frac{\varphi(v)}{z - v}\, d\omega$$

en el dominio antes definido, puesto que es legítimo efectuar las operaciones en sentido inverso.

Conviene señalar que mientras la transformada (B-P) representa a una función holomorfa $f(z)$ en todos los puntos exteriores al dominio D, la transformada (L) sólo representa la dicha función en un semi-plano $R(z) > \sigma$ cuya abscisa de convergencia σ está determinada por la relación.

$$\text{máx}\, R(v) = \sigma .$$

Estos resultados se pueden generalizar, adoptando para la integral de Laplace caminos complejos rectilíneos (1).

6. — El desarrollo en serie de potencia de $\frac{1}{z}$, de una función determinante (B-P)

$$f(z) = \iint_D \frac{\varphi(v)}{z - v}\, d\omega$$

se deduce como sigue. Sea z un punto cualquiera exterior a D; se tiene la identidad

$$\frac{1}{z - v} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{v}{z}\right)} =$$

$$= \frac{1}{z} + \frac{v}{z^2} + \ldots + \frac{v^n}{z^{n+1}} + \frac{1}{z^{n+1}} \frac{v^{n+1}}{z - v}$$

cuando v recorre el dominio cerrado D

Por tanto, la integral doble anterior se puede escribir

$$f(z) = \iint_D \varphi(v) \left(\sum_{i=0}^{i=n} \frac{v^i}{z^{i+1}} \right) d\omega + \frac{1}{z^{n+1}} \iint_D v^{n+1} \varphi(v)\, d\omega$$

es decir

$$f(z) = \sum_{i=0}^{n} \frac{c_i}{z^{i+1}} + \frac{\varepsilon_n(z)}{z^{n+1}}$$

donde

$$c_i = \iint_D v^i \varphi(v)\, d\omega ,$$

$$\varepsilon_n(z) = \iint_D v^{n+1} \varphi(v)\, d\omega$$

(1) La consideración de caminos complejos para la integral de LAPLACE (rectilíneos o no) se remonta a los trabajos ya clásicos y bien conocidos de S. PINCHERLE. *Sur les fonctions determinantes,* Annales Scientifiques de l'école normale superieure (1905) y *Acta Math* (1907).

Sea R el extremo superior de $|v|$ en D. Si

$$|z| > R$$

el punto z es exterior al círculo de centro en el origen y radio R finito; en tal caso resulta

$$|\varepsilon_n(z)| < R^{n+1} . M S$$

donde S es el área del dominio D y $|\varphi(v)| \leq M$; luego el módulo del resto de la serie

$$\left|\frac{\varepsilon_n(z)}{z^{n+1}}\right| \leq \left(\frac{R}{z}\right)^{n+1} . M S$$

tiende a cero cuando $n \longrightarrow \infty$.

Resulta entonces

$$[1] \quad f(z) = \sum_0^\infty \frac{c_n}{z^{n+1}}$$

donde

$$\boxed{c_n = \iint_D v^n \varphi(v)\, d\omega} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

desarrollo convergente para todo z ta que : $|z| > R$.

Además, puesto que

$$c_0 = \iint_D \varphi(v)\, d\omega$$

es distinto de cero, este desarrollo nos asegura que la función determinante $(B\text{-}P)$ es holomorfa y nula en el infinito.

En los puntos interiores al círculo de

$$|z| < R$$

la serie [1] diverge.

El resultado del número anterior nos permite aplicar a la función determinante $(B\text{-}P)$, algunas propiedades bien conocidas de la transformada de Laplace.

7. — Apliquemos el método de sumación de M. E. Borel al desarrollo

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{c_n}{z^{n+1}}$$

donde

$$c_n = \int\!\!\int_D v^n \varphi(v)\, d\omega,$$

de una función determinante $(B\text{-}P)$, convergente fuera de un círculo de centro en el origen y radio.

$$R = \text{máx}\, |\, v\, |.$$

La *asociada* (B), tiene por expresión

$$u(t, z) = \varphi\left(\frac{t}{z}\right) = \sum_{0}^{\infty} \frac{c_n}{n\,!} \frac{t}{z^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{z} \sum_{0}^{\infty} \frac{c_n}{n\,!} \left(\frac{t}{z}\right)^n$$

la cual es una trascendente entera en t; por tanto la integral de Borel resulta

$$f(z) = \frac{1}{z} \int_0^{\infty} e^{-t} \varphi\left(\frac{t}{z}\right) dt.$$

La integral de Borel se transforma, con un simple cambio de variables, en la integral de Laplace

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{-xz} \varphi(x)\, dx$$

la cual converge en el semiplano: $R(z) > R$.

Si tomamos la integral de Laplace sobre un semi-rayo de centro en O y argumento ω, el campo de convergencia es todo el semiplano que contiene el semi-rayo de centro en O y argumento $(-\omega)$, limitado por la recta tangente a la circunferencia de convergencia en el punto de intercepción con este último rayo.

Al variar ω, se tiene la expresión de $f(z)$ en forma de integral de Laplace convergente en todo punto exterior al círculo de convergencia.

8. *Momentos generalizados.* — Llamaremos *problema de los momentos generalizados* a la cuestión siguiente (1): *Dada la sucesión* $\{\alpha_n\}$ *de números determinar una función* $\varphi(v)$ *única, integrable en el dominio D, tal que se tenga*

$$\alpha_n = \iint_D \varphi(v)\, v^n\, d\omega \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Si este problema de los momentos generalizados admite solución, podemos entonces representar toda función $f(z)$ holomorfa, y nula en el infinito, definida por el desarrollo de Taylor

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{\alpha_n}{z^{n+1}}$$

por medio de una integral doble de Beltrami-Poincaré. En efecto, consideremos la serie entera

$$\sum_0^\infty \frac{a_n}{z^{n+1}} \qquad [1]$$

de la variable $\frac{1}{z}$ Supongamos que se pueda determinar una función $\varphi(v)$ acotada e integrable (L) en un cierto dominio finito (D) que satisfaga

$$a_n = \iint_D \varphi(v)\, v^n\, d\omega \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

y tal que

$$\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|} = R \geq |v|$$

(1) El problema de los *momentos* planteado y resuelto en el campo real por Stieljes (*Annales de la Faculté des S. de Toulouse;* 1894-95), consiste como se sabe en determinar una función *única* $\varphi(x)$ de la variable real x, integrable en $(0 + \infty)$, tal que se tenga

$$\alpha_n = \int_0^\infty \varphi(x)\, x^n\, dx \qquad n = 0, 1, \ldots$$

donde la sucesión α_n está dada. La solución con condiciones cada vez más amplias se debe a Borel, Hardy, Riez y Carleman. En el campo complejo

$$\alpha_n = \int_C f(z)\, z^n\, dz$$

la resolución de este problema es inmediato como lo prueban los trabajos de Cauchy, Laurent y Riemann, *si C es una curva cerrada.*

cuando la variable v recorre el dominio cerrado D. En esta hipótesis, la [1] define una función holomorfa $f(z)$ en todo punto z tal que $|z| > R$ y nula en el infinito, la cual es *determinante* (B-P) cuya *generatriz* (B-P) es $\varphi(v)$, puesto que se tiene

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{1}{z^{n+1}} \left(\iint_D v^n \varphi(v)\, d\omega \right) = \iint_D \varphi(v) \left[\frac{1}{z} \sum_0^\infty \left(\frac{v}{z} \right)^n \right] d\omega =$$

$$= \iint_D \frac{\varphi(v)}{z\left(1 - \frac{v}{z}\right)}\, d\omega$$

es decir

$$f(z) = \iint_D \frac{\varphi(v)}{z - v}\, d\omega.$$

9. *Desarrollo en serie de facultad.* — De la función determinante (B-P) se puede dar un desarrollo en serie de facultad. En efecto; sea la transformada

$$f(z) = \iint_D \frac{\varphi(v)}{z - v}\, d\omega\,, \qquad [1]$$

el núcleo $\frac{1}{z - v}$ admite el desarrollo en serie de facultad convergente (1)

$$\frac{1}{z - v} = \sum_{n=0}^\infty \frac{v(v+1)\ldots(v+n-1)}{z(z+1)\ldots(z+n)}$$

cuya abscisa de convergencia es: λ = máx $R(v)$ cuando v recorre el dominio cerrado D. Se tiene entonces *formalmente*

$$f(z) = \iint_D \varphi(v) \left[\sum_{n=0}^\infty \frac{v(v+1)\ldots(v+n-1)}{z(z+1)\ldots(z+n)} \right] d\omega =$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{z(z+1)\ldots(z+n)} \iint_D \varphi(v).v.(v+1)\ldots(v+n-1)\, d\omega$$

(1) N. E. NÖRLUND, *Leçons sur les séries d'interpolation*, Pos. (1926) p. 176.

y poniendo

$$a_n = \iint_D \varphi(v).v.(v+1)\dots(v+n-1)\,d\omega = \iint_D \varphi(v)\,v^{(n}\,d\omega$$

resulta

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{a_n}{z(z+1)\dots(z+n)}.$$

Se puede probar el desarrollo efectivo, partiendo de la identidad

$$\frac{1}{z-v} = \frac{1}{z} + \frac{v}{z(z+1)} + \dots + \frac{v(v+1)\dots(v+n-1)}{z(z+1)\dots(z+n)}$$
$$+ \frac{v(v+1)\dots(v+n)}{z(z+1)\dots(z+n)}\,\frac{1}{z-v},$$

para z exterior al dominio D.

10. *Desarrollo en serie de polinomios.* — Se puede también obtener para la función determinante $(B\text{-}P)$, un desarrollo en serie de polinomios.

En efecto, la integral doble [1] se puede escribir

$$f(z) = \iint_D \frac{\varphi(v)}{z-v}\,d\omega = \iint_D \frac{\varphi(v)}{v}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{v}}\,d\omega$$

El núcleo

$$\frac{1}{1-\frac{z}{v}}$$

admite un desarrollo en serie de polinomios (1).

$$\frac{1}{1-\frac{z}{v}} = \sum_1^\infty P_n\left(\frac{z}{v}\right)$$

uniformemente convergente en todo punto

$$u = \frac{z}{v}$$

interior a un dominio (A) que sea exterior a la estrella rectilínea con un solo rayo $(1, +\infty)$.

(1) E. Picard, *Traité d'Analyse*, T. II, p. 163; P. Montel, *Leçons sur les séries de polynomes*, París (1910).

En virtud de la convergencia uniforme resulta entonces

$$f(z) = \sum_0^{\infty} \iint_D \frac{\varphi(v)}{v} \quad P_n\left(\frac{z}{v}\right) d\omega = \sum_0^{\infty} Q_n(z)$$

donde

$$Q_n(z) = \iint_D \frac{\varphi(v)}{v} \quad P_n\left(\frac{z}{v}\right) d\omega$$

representa un polinomio en z

Poniendo:

$$P_n\left(\frac{z}{v}\right) = C_{0n} + C_{1n}\frac{z}{v} + \ldots + C_{m,n}\left(\frac{z}{v}\right)^m$$

entonces

$$Q_n(z) = \sum_{p=0}^{m} C_{p,n}\, z^p \iint_D \frac{\varphi(v)}{v^{p+1}}\, d\omega = \sum_{p=0}^{m} C_{pn}\, a_p\, z^p$$

donde

$$a_p = \iint_D \frac{\varphi(v)}{v^{p+1}}\, d\omega$$

Por tanto, resulta que, para todo punto z de la estrella rectilínea, se tiene el desarrollo

$$f(z) = \sum_0^{\infty} Q_n(z)$$

el cual es, a su vez, uniformemente convergente en todo dominio D interior a la estrella.

11. Familia de funciones determinantes. — Consideremos ahora una familia infinita de funciones $\varphi(z)$ definidas en un dominio común D, la integral doble

$$f(z) = \iint_D \frac{\varphi(v)}{v - z}\, d\omega$$

define una nueva familia infinita de funciones continuas $f(z)$ en todo el plano de z.

Esta última está formada de funciones *holomorfas* cuando el punto z es exterior a D y de *funciones holomorfas* (α) cuando z pertenece a D.

Vamos a probar que en ambos casos las funciones $f(z)$ de la variable compleja z forman una *familia normal* en el sentido de M. P. Montel.

Teorema I. — Si las funciones generatrices $\varphi(v)$ *son acotadas en su conjunto en D, las funciones determinantes* $f(z)$ *forman una familia normal en D o en una región finita (A) exterior a D.*

Consideremos primeramente el caso que las $f(z)$ sean holomorfas (α); y sea z' y z'' dos puntos cualesquiera de D.

Se tiene

$$f(z') = \iint_D \frac{\varphi(v)}{v - z'} d\omega \quad , \quad f(z'') = \iint_D \frac{\varphi(v)}{v - z''} d\omega$$

por tanto

$$f(z') - f(z'') = \iint_D \varphi(v) \left[\frac{z'' - z'}{(z' - v)(z'' - v)} \right] d\omega$$

De aquí, según un teorema de M. Denjoy [1] y de Theodoresco [2], y teniendo presente que por hipótesis, existe una cnstante positiva M tal que

$$|\varphi(v)| < M \qquad [1]$$

para todo punto v de D y cualquiera sea la función $\varphi(v)$ de la familia; resulta

$$|f(z') - f(z'')| < A\,|z' - z''|^{\alpha}, \; (0 < \alpha < 1), \; A > 0 \qquad [2]$$

para todo par de puntos z', z'' de D y cualquiera sea la función $f(z)$ de su familia.

Si fijamos ahora un número $\varepsilon > 0$ arbitrario, se puede determinar un $\delta > 0$, tal que se verifique, según la [2]

$$|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$$

para todo par de puntos de D,

$$|z' - z''| < \delta$$

y cualquiera sea la función $f(z)$ de la familia; por tanto las funciones son *igualmente continuas* en el dominio D.

Finalmente, como una familia de funciones de una variable compleja, igualmente continua en un dominio D forma una familia normal en dicho dominio [3], la primera parte del teorema queda demostrada.

(1) *Compte Rendus.*
(2) *Thésis,* París, 1931.
(3) P. MONTEL, *Leçons sur les familles normales...* París (1927).

Si el punto z pertenece a una región limitada (A) completamente exterior al dominio D, las funciones $f(z)$ son holomorfas y acotadas en su conjunto. En efecto, según la desigualdad [1] resulta

$$|f(z)| < M \iint_D \frac{d\omega}{|z - v|},$$

y haciendo

$$z - v = \rho e^{i\theta} \quad , \quad d\omega = \rho \, d\rho \, d\theta$$

se tiene

$$|f(z)| < M \iint_D d\rho \, d\theta < MS.$$

Por tanto, según el teorema fundamental de Montel, la familia $t(z)$ es normal y acotada en todo dominio (A) exterior al D.

Teorema II. — Si la sucesión de funciones $\varphi_n(z)$ generatrices converge uniformemente a la función $\varphi(z)$, en el dominio D, la sucesión de sus funciones determinantes $f_n(z)$ converge uniformemente hacia una función $f(z)$, holomorfa (α) en los puntos interiores con derivada areolar $\varphi(v)$, y holomorfa en los puntos exteriores. En efecto; de la convergencia uniforme de la sucesión $f_n(z)$ en D, a todo $\varepsilon > 0$ arbitrario le corresponde un p tal que

$$|\varphi(v) - \varphi_n(v)| < \varepsilon$$

para $n \geq p$ y v en D.

Consideremos ahora las transformadas $(B\text{-}P)$

$$f(z) = \iint_D \frac{\varphi(v)}{v - z} d\omega$$

y

$$f_n(z) = \iint_D \frac{\varphi_n(v)}{v - z} d\omega$$

se tiene

$$f(z) - f_n(z) = \iint_D \frac{\varphi(v) - \varphi_n(v)}{v - z} d\omega$$

de donde

$$|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon \iint_D \frac{d\omega}{|z - v|} < \varepsilon S$$

para $n \geq p$ y z interior a D.

De aquí resulta que la sucesión $f_n(z)$ converge uniformemente a la función límite $f(z)$ en D, holomorfa (α) y cuya derivada areolar es $\varphi(v)$.

Si el punto pertenece a una región (A) completamente exterior a D, se prueba la segunda parte del teorema en la misma forma.

Observación. — Si las funciones $\varphi_n(z)$ son *holomorfas en D*, entonces es suficiente suponer que ella *converge uniformemente* a $\varphi(z)$ *sobre el contorno C* que limita el dominio D; puesto que en virtud del teorema clásico de Waiestrass, la sucesión converge uniformemente en el interior de D y el teorema anterior es aplicable.

II. — Formula de inversion

12. Es bien conocida la célebre fórmula de Riemann [1]

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty e^{-xz}\, dx \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(t)\, e^{xt}\, dt$$

que permite representar una función $f(z)$ *holomorfa* en un semi-plano $R(z) \geq a$, mediante una integral de Laplace de generatriz

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(t)\, e^{xt}\, dt$$

La justificación de esta fórmula con condiciones diversas y la aplicación de la misma a diversos capítulos de la teoría de funciones, ha dado origen a numerosos trabajos fundamentales [2].

Recientemente se han propuesto otras fórmulas de inversión de la transformada de Laplace [3]

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-xz}\, \varphi(x)\, dx\,.$$

Para las funciones holomorfas $f(z, w)$ de dos variables complejas definidas en el dominio

$$R(z) \geq \xi \quad , \quad R(w) \geq \eta$$

vale una fórmula análoga. [4]

(1) Riemann (*Werke, Dedeking e Weber,* Leipzig, 1876, p. 140).

Véase: S. Pincherle, *Sull'inversione degli integrali definite,* Mem. della Soc. Italiana delle Sc., t. 15 (1908); *Sur les fonctions determinantes.* Annal. de l'Ecole Normale Superieure, t. XXII (1905); *Acta Math.* (1907); *Rendic. della Accad. dei Lincei* (1902).

(2) Tamarkin, *On Laplaces integral equations.* Trans. Amer. Math. Soc. 28 (1926).

Churchill, *The inversion of the Laplace transformation...*, Math. Zeitsch. 42 (1937); *Math Annalen* 114 (1937); *Math. Zeitsch.* 43 (1938).

(3) Widder, *The inversion of the Laplace integral and the related moment problm.* Trans. Americ Math. Soc., 36 (1934).

F. Tricomi, *Trasformazione di Laplace i polinomi di Laguene.* Atti R. Acc. N. dei Lincei, V, XXI (1935).

(4) J. C. Vignaux, *La teoría de las funciones determinantes de dos variables.* Anales de la Soc. Científica Argentina (1933) *t, CXII* (1933). *Sulla trasformazione di Laplace di due variabili. R. Accademia N. dei Lincei.* Roma, 17 agosto 1933.

Nos proponemos generalizar aquí la fórmula de Riemann, a las *funciones holomorfas* (α). Estas funciones constituyen una clase mucho más amplia que la clase formada por las funciones holomorfas ordinarias, y han sido estudiadas muy particularmente por M. Pompeiu (1), Calugareno (2), Theodoresco (3), Nicolesco (4) y Burgatti (5), para el caso de una variable, y por Tonolo, Vignaux y Martinelli para las funciones de varias variables.

Se llama *función holomorfa* (α), toda función compleja de la variable $z = x + i\,y$

$$f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y) \qquad [1]$$

que admite una derivada areolar $\varphi(z)$ *continua* en todo un dominio D.

La derivada areolar de las funciones holomorfas ordinarias es idénticamente nula en todo su dominio de holomorfismo y recíprocamente, si la derivada areolar de la función $f(z)$ es idénticamente nula en un dominio D, la función es holomorfa en este dominio.

Una función holomorfa (α) en un dominio D, limitado por el contorno cerrado simple y rectificable C, puede ser representada por la fórmula fundamental de M. Pompeiu

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{t-z}\,dt - \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\varphi(v)}{v-z}\,d\omega$$

donde z es un punto cualquiera del dominio D; t y v puntos que recorren el contorno C y el dominio D respectivamente, y $\varphi(v)$ la derivada areolar.

Esta fórmula contiene como caso particular la fórmula integral de Cauchy cuando $\varphi(v) \equiv 0$ en D.

13. Convergencia circular. — Consideremos un semicírculo (R) de centro en el origen y radio R arbitrariamente grande, situado en el semiplano $x \geq 0$, y sea $f(x, y)$ una función de dos variables reales integrable en dicho dominio.

(1) *Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo*, t. 33 (1912), p. 108; t. 35 (1913), p. 227.
(2) *Thèses*, París. 1929.
(3) *Thèses*, París, 1931.
(4) *Thèses*, París, 1926.
(5) *Bull. Unione Mat. Italiana* (1922).

Si la integral doble

$$\iint_{(R)} f(x, y)\, dx\, dy$$

tiende a un límite finito S cuando el radio R crece indefinidamente, diremos que ella *converge por semicírculos* al *valor* S; es decir, fijado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un número $\eta(\varepsilon)$ tal que

$$\left| S - \iint_{(R)} f(x, y)\, dx\, dy \right| < \varepsilon$$

para todo $R > \eta$. Este límite indicaremos con la notación (1)

$$\lim_{R \to \infty} \iint_{(R)} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{0}^{+\infty} f(x, y)\, dx\, dy\,.$$

Sea (C) la semi-corona circular limitada por los semi-círculos de radio R y R' y el eje Oy. La condición necesaria y suficiente para que la integral doble

$$\iint_{0}^{+\infty} f(x, y)\, dx\, dy$$

sea convergente, es que el módulo de la integral doble

$$\iint_{(C)} f(x, y)\, dx\, dy$$

tienda a cero, cuando los radios R y R' crecen indefinidamente simultánea e independientemente.

Consideremos ahora la integral doble convergente

$$F(\alpha, \beta) = \iint_{0}^{+\infty} f(x, y\,;\alpha, \beta)\, dx\, dy \qquad [1]$$

función de dos parámetros (α, β) que varían en un cierto dominio D. Sea $\varphi(x, y)$ una función verificando la condición

$$|f(x, y\,;\alpha, \beta)| < |\varphi(x, y)| \qquad [2]$$

para todo punto (α, β) de D y tal que la integral doble

$$\iint_{0}^{+\infty} |\varphi(x, y)|\, dx\, dy \qquad [3]$$

sea convergente. En estas condiciones la integral [1] converge *uniformemente* en el dominio D.

(1) Las diversas definiciones de convergencia propuestas para las series dobles, de PRINGSHEIM (*convergencia por rectángulos*); de LEGA (*convergencia por triángulos*); de HARDY (*convergencia regular*), se extienden a las integrales dobles.

Esta noción de *convergencia por semi-círculos* nos será muy útil en lo que sigue.

En efecto; de la convergencia de la [3], a todo número $\varepsilon > 0$ y arbitrario, resulta

$$\iint_{(C)} |\varphi(x, y)| \, dx \, dy < \varepsilon$$

cuando se toman los radios R y R' de la semi-corona (C) suficientemente grandes. Por tanto, según la [2] resulta

$$\left| \iint_{(C)} f(x, y \, ; \alpha, \beta) \, dx \, dy \right| < \varepsilon$$

para todo punto $M(\alpha, \beta)$ de D; luego la integral [1] converge uniformemente en este dominio.

Un caso más general resulta considerando un círculo de radio R y centro en el origen; entonces la *convergencia circular* está definida por la relación

$$S = \lim_{R \to \infty} \iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \, dx \, .$$

14. Formula de inversion generalizada. — Sea $f(z)$ una función holomorfa (α) en el semi-plano $R(z) \geq a$, y tal que

$$|f(z)| < \frac{M}{|z|^{\delta+1}} \qquad (\delta > 0 \quad , \quad M > 0)$$

para todo z de esta región y sea $\varphi(z)$ su derivada areolar. Consideremos el semicírculo (R) limitado por el contorno C formado por la semicircunferencia

$$|z| = R, \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \quad \arg z \leq \frac{\pi}{2} \right), \qquad [1]$$

y el segmento de recta $\mathcal{R}(z) = a$; se tiene, según la fórmula de M. Pompeiu

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t - z} dt - \frac{1}{\pi} \iint_{(R)} \frac{\varphi(v)}{v - z} d\omega \qquad [2]$$

donde z es un punto del círculo (R).

Consideremos la integral de contorno que figura en el segundo miembro descompuesta en la forma

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) \, dt}{t - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{AB}} \frac{f(t) \, dt}{t - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{BPA} \frac{f(t) \, dt}{t - z} \, .$$

En virtud de la desigualdad [1], la integral extendida sobre el arco de circunferencia, tiende hacia cero, cuando $\mathcal{R} \to +\infty$; mientras la integral sobre la recta $\mathcal{R}(z) = a$

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{f(t)}{t-z}\, dt$$

es uniformemente convergente en todo el dominio $\mathcal{R}(z) > a$; en consecuencia el

$$\lim_{R \to \infty} \frac{1}{\pi} \iint_{(R)} \frac{\varphi(v)}{v-z}\, d\omega = \frac{1}{\pi} \iint_0^{+\infty} \frac{\varphi(v)}{v-z}\, d\omega$$

existe y resulta la igualdad

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{f(t)}{t-z}\, dt - \frac{1}{\pi} \iint_0^{+\infty} \frac{\varphi(v)}{v-z}\, d\omega.$$

Por otra parte, como es $R(z-t) > 0$, se tiene

$$\frac{1}{z-t} = \int_0^{\infty} e^{-(z-t)x}\, dx \quad (x \geq 0)$$

por tanto, para $R(z) > a$, es

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(t)\, dt \int_0^{\infty} e^{-(z-t)x}\, dx - \frac{1}{\pi} \iint_0^{+\infty} \frac{\varphi(v)}{v-z}\, d\omega$$

y cambiando el orden de integración, lo cual es legítimo, resulta

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} e^{-zx}\, dx \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{tx} f(t)\, dt - \frac{1}{\pi} \iint_0^{+\infty} \frac{\varphi(v)}{v-z}\, d\omega$$

Finalmente, si ponemos

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{tx} f(t)\, dt$$

se tiene entonces

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{-zx}\, \psi(x)\, dx - \frac{1}{\pi} \iint_0^{\infty} \frac{\varphi(v)}{v-z}\, d\omega$$

que es la fórmula buscada.

Esta fórmula nos permite representar una función *holomorfa* (α) dada en un semiplano $R(z) \geq a$ y que satisface además a una condición de crecimiento de la forma [1], mediante la suma de dos integrales convergentes. La primera, es una integral de Laplace

$$g(z) = \int_0^{\infty} e^{-xz} \psi(x)\, dx,$$

define una función holomorfa ordinaria $g(z)$, mientras que la integral doble [1]

$$h(z) = -\frac{1}{\pi} \int\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(v)}{v - z}\, d\omega$$

representa la parte *holomorfa* (α) de la función $f(z)$.

A propósito de esta integral doble, debemos observar que ella converge uniformemente por semicírculos, siempre que $\varphi(v)$ sea la derivada areolar de una función holomorfa (α) que verifica a la condición

$$|f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\delta}}, \quad (\delta > 0, \quad M > 0)$$

en todo el semiplano $R(z) \geq a$. Además ella tiene por valor

$$\frac{1}{\pi} \int\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(v)}{v - z}\, d\omega = \int_0^{\infty} e^{-zx} \psi(x)\, dx - f(z)$$

en todo punto z de dicha región.

Cuando la derivada areolar $\varphi(v)$ es idénticamente nula en toda la región $R(z) \geq a$, entonces es $h(z) \equiv 0$, y como en tal caso la $f(z)$ es holomorfa en dicha región, nuestra fórmula coincide con la fórmula de Riemann.

[1] Una integral doble análoga a la anterior, extendida a todo el plano, ha utilizado M. Borel para representar una función analítica, uniforme, regular y nula al infinito. *Sur la théorie du potentiel Logarithmique*. Comptes rendus de l'Acad. des Sciences, t. CLIV (1912), p. 1686.

E. Borel, *Leçons sur les Fonctions Monogenes*. Gauthier-Villars, París, 1917, pág. 145-150.

R. Caccioppoli, *Intégrales doubles de Cauchy et fonctions monogenes généralisées*. Comp. Rend. 198, 1934, pág. 2227; *Le funzione monogene generalizzate definite mediante integrali doppi di Cauchy*, Rendiconti del Sem. Mat. della R. Univ. di Padova, N°. 3-4, 1934.

Buenos Aires, diciembre 20 de 1937.

TABLAS DE LAS LINEAS ULTIMAS

Por el Dr. ADOLFO T. WILLIAMS

(Conclusión)

λ I. A	I a	I c	Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
			W [1]				
5514,72	10	10	^{5}D — 14°	+ 1	+ 1	0,41	$^{5}P^{\circ}$
5492,34	10	10					
5224,68	10	10	^{5}D — 17°	+ 1	+ 1	0,60	$^{5}P^{\circ}$
5053,30	10	2	^{5}D — 14°	— 1	0	0,23	$^{5}P^{\circ}$
4302,12	8	5	21°	— 1	0	0,36	U; $^{7}P^{\circ}$
4294,62	6R	9	^{7}S — 22°	— 1	— 1	0,36	U; $^{7}P^{\circ}$
4008,76	10	10	27°	?	?	0,36	U.
3215,57	4	5	1 — 88°	?	0	1,51	U.
2947,37	6	3	^{5}D — 65°	— 1	— 1	0,60	$^{5}F^{\circ}$
2946,98	6R	3	^{7}S — 56°	— 1	0	0,36	$^{7}P^{\circ}$
2944,31	5R	3	^{7}S — 57°	— 1	+ 1	0,36	$^{7}P^{\circ}$
2896,44	4R	3					
2896,01	3R	2	^{5}D — 53°	?	0	0,23	$^{5}D^{\circ}$
2879,40	3R	2	^{5}D — 49°	— 1	— 1	0,0	$^{5}F^{\circ}$
2879,11	3R	2	^{7}S — 60°	— 1	0	0,36	$^{7}P^{\circ}$
2866,39	5	2	^{5}D — 70°	+ 1	+ 1	0,60	$^{5}P^{\circ}$
2831,39	5	2	64°	— 1	— 1	0,36	$^{7}P^{\circ}$
2724,40	3	2	^{7}S — 69°	— 1	0	0,36	$^{7}P^{\circ}$
2681,50	2	2	73°	— 1	0	0,36	$^{7}P^{\circ}$
2555,17	3	3					
			U				
6449,19	20	1					
5915,39	8	1					
5527,84	10	4					
5492,94	9	4					
5027,38	5	4					
4241,68	5	4					
3672,59	1	2					
3552,20	1	2					
Coiumna VII (*a*)			F				
6902,46	30		^{4}P — $^{4}D^{\circ}$	— 1	— 1	12,7	
6856,01	40		^{4}P — $^{4}D^{\circ}$	— 1	— 1	12,7	

[1] Véase Memorias citadas a propósito del Hf, página 147.

λ I . A	I a	I c	Serie	Δl	Δj	E . P	Observaciones
			Cl				
4819,40	—	10					Cl (II) ?
4810,00	—	10					Cl (II) ?
4794,50	—	10					Cl (II) ?
1396,50	3		$^2P^\circ$ — ^4P	0	— 1	0,11	ΔR = 2.
1379,60	5		$^2P^\circ$ — ^4P	0	0	0,0	ΔR = 2.
			Br				
1633,80	10		$^2P^\circ$ — ^4P	0	— 1	0,46	ΔR = 2.
1540,80	6		$^2P^\circ$ — ^4P	0	0	0,0	ΔR = 2.
			I				
5464,60	—	5					I (II) ?
5161,20	—	10					I (II) ?
2062,10	10						
1782,90	9						
Columna VII (*b*)			Mn				
6021,79	10	10	^6S	+ 1	+ 1	3,25	
6016,64	10	10	$^6P^\circ$ — ^6S	+ 1	0	3,25	U.
6013,50	10	10	^6S	+ 1	— 1	3,25	
4823,52	10	4	$^8P^\circ$ — ^8S	+ 1	+ 1	2,30	W.
4783,43	10	4	^8S	+ 1	0	2,39	W.
4766,42	6	3	^4D — $^4F^\circ$	— 1	— 1	2,90	W.
4762,38	9	4	$^4F^\circ$	— 1	— 1	2,86	W.
4754,05	10	8	$^8P^\circ$ — ^8S	+ 1	— 1	2,28	W.
4739,00	5	2	$^4F^\circ$	— 1	0	2,93	
4727,46	7	2	^4D — $^4F^\circ$	— 1	0	2,90	
4709,70	7	2	$^4F^\circ$	— 1	0	2,86	
4034,47	8R	10R	$^6P^\circ$	— 1	+ 1	0,0	W.
4033,07	8R	10R	^6S — $^6P^\circ$	— 1	0	0,0	W.
4030,76	6R	10R	$^6P^\circ$	— 1	— 1	0,0	U; L. W.
3264,71	4	2					W.
3260,24	4	2	$^6F^\circ$	— 1	— 1	2,16	W.
3258,42	4	2	$^6F^\circ$	— 1	0	2,16	W.
3252,95	4	2	^6D — $^6F^\circ$	— 1	0	2,16	W.
3248,52	4	2	$^6F^\circ$	— 1	— 1	2,16	W.
3243,79	4	2	$^6F^\circ$	— 1	0	2,16	W.
2801,08	6R	5R	$^6P^\circ$	— 1	+ 1	0,0	L. W.
2798,27	6R	5R	^6S — $^6P^\circ$	— 1	0	0,0	L. W.
2794,82	6R	5R	$^6P^\circ$	— 1	— 1	0,0	W.

λ I. A	I		Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
	a	c					
			Re				
4889,15	200		^6S — $^6P^\circ$	— 1	— 1	0,0	U.
4513,31	30		$^8P^\circ$ — ^8S	+ 1	0	2,54	
4257,61	5		^6D — ?°	?	+ 1	1,76	
3464,72	80		⎧ $^6P^\circ$	— 1	0	0,0	
3460,47	100		^6S — ⎨ $^6P^\circ$	— 1	— 1	0,0	
3451,88	60		⎩ $^6P^\circ$	— 1	+ 1	0,0	
Columna VIII			**He**				
5875,63	10		$^3P^\circ$ — ^3D	— 1	— 1	20,95	
3888,64	10		^3S — $^3P^\circ$	— 1	— 1	19,70	U.
584,40	10		^1S — $^1P^\circ$	— 1	— 1	0,0	
			Ne				
6402,24	10		$^3P^\circ$ — 2	?	— 1	16,5	
5852,48	10		$^1P^\circ$ — 10	?	+ 1	16,7	
5400,56	10		$^3P^\circ$ — 10	?	+ 1	16,6	
743,73	9		^1S — $^3P^\circ$	— 1	— 1	0,0	ΔR = 2.
735,95	10		^1S — $^1P^\circ$	— 1	— 1	0,0	
			A				
8115,30	10		1° — 2	?	— 1	11,5	
7503,86	4		4° — 10	?	+ 1	11,7	
7067,21	5		1° — 8	?	0	11,5	
6965,43	6		1° — 9	?	+ 1	11,5	
1066,70	9		^1S — 2°	?	— 1	0,0	
1048,26	10		^1S — 4°	?	— 1	0,0	
			Kr				
5870,91	10		2° — 9	?	— 1	10,0	$^3P^\circ$?
5570,29	10		1° — 8	?	+ 1	9,9	$^3P^\circ$?
			Xe				
4671,22	10		⎧ 3	?	— 1	8,25	
4624,27	10		1°— ⎨ 5	?	0	8,25	
4500,97	8		⎩ 9	?	+ 1	8,25	
1469,00			^1S — 2°	?	— 1	0,0	
1295,80			^1S — 4°	?	— 1	0,0	

λ I. A	I		Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
	a	c					
Grupo del Fe			Fe				
5371,49	7	6	^{5}D°	+ 1	+1	0,95	
5328,04	7	6	^{5}F — ^{5}D°	+ 1	+ 1	0,92	U.
5269,54	10	8	^{5}D°	+ 1	+ 1	0,86	U.
5232,95	8	5	^{7}P° — ^{7}D	— 1	— 1	2,94	
5227,19	8	4	^{3}D°	+ 1	+ 1	1,55	
4404,75	8	10	^{3}F — ^{5}G°	— 1	— 1	1,55	ΔR = 2.
4383,55	10	10	^{5}G°	— 1	— 1	1,48	ΔR = 2.
4045,82	8	10	^{3}F — ^{3}F°	0	0	1,48	
3859,91	7R	6	^{5}D — ^{5}D°	0	0	0,0	L.
3820,43	8R	10	^{5}F — ^{5}D°	+ 1	+ 1	0,86	
3815,84	7R	10	^{3}F — ^{3}D°	+ 1	+ 1	1,48	L.
3767,19	6R	5	^{5}F°	0	0	1,01	L.
3758,23	7R	8	^{5}F — ^{5}F°	0	0	0,95	L.
3749,49	8R	10	^{5}F°	0	0	0,92	
3748,26	6R	4	^{5}F°	— 1	— 1	0,11	
3745,90	6	4	^{5}D — ^{5}F°	— 1	— 1	0,12	
3745,56	7R	5	^{5}F°	— 1	— 1	0,08	
3737,14	7R	6	^{5}F°	— 1	— 1	0,05	L.
3734,87	9R	10	^{5}F — ^{5}F°	0	0	0,86	L.
3722,57	6R	4	^{5}D — ^{5}F°	— 1	0	0,08	
3719,94	8R	10	^{5}D — ^{5}F°	— 1	— 1	0,0	U; L.
3647,85	6R	6					
3617,79	6	3					
3581,20	8R	10					
3570,10	7R	10	^{5}F — ^{3}G°	— 1	— 1	0,92	ΔR = 2.
3565,38	6R	5	^{5}F — ^{3}G°	— 1	— 1	0,95	ΔR = 2.
3490,58	6R	4					
3475,46	6R	3					
3440,99	6R	4	^{5}P°	+ 1	+ 1	0,05	L.
3440,61	7R	4	^{5}P°	+ 1	+ 1	0,0	
3047,61	6	3	^{5}D°	0	— 1	0,08	2*e*.
3021,08	6R	3	^{5}D — ^{5}D°	0	0	0,05	2*e*; L.
3020,65	6R	3	^{5}D°	0	0	0,0	2*e*; L.
2983,57	4R	3	^{5}D°	0	+ 1	0,0	2*e*.
2973,24	4	2	^{5}F°	— 1	— 1	0,05	2*e*.
2966,90	6R	3	^{5}F°	— 1	— 1	0,0	2*e*.
2767,52	7	5	^{5}F — ^{5}D°	+ 1	0	0,9	
2742,41	6	1	^{5}P°	+ 1	0	0,08	
2720,91	7	2	^{5}D — ^{5}P°	+ 1	+ 1	0,05	L.
2719,04	7	2	^{5}P°	+1	+ 1	0,0	
2527,44	4	2	^{5}D°	0	0	0,05	

λ I . A	I a	I c	Serie	Δl	Δj	E . P	Observaciones
				Fe			
2524,29	6	2	^{5}D — ^{5}D°	0	+ 1	0,11	L.
2522,86	4	1	^{5}D — ^{5}D°	0	0	0,0	
2488,15	4	1	^{5}D — ^{5}F°	— 1	— 1	0,05	
2484,19	6	—					
2483,28	5R	3	^{5}D — ^{5}F°	— 1	— 1	0,0	L.
				Ru			
5636,24	5	3					
5171,02	40	2					
5057,32	6	2					
4869,15	25	3					
4709,49	35	5	^{3}F — 16°	?	0	0,78	
4584,45	30	8					
4554,52	50R	10	^{3}F — 13°	?	— 1	0,78	
3786,04	10R	10	^{5}F — ^{5}D°	+ 1	+ 1	0,33	L.
3728,02	10R	8	^{5}F — ^{5}F°	0	0	0,0	
3726,93	10R	8	^{5}F — ^{5}F°	0	0	0,15	
3719,32	4	2	—	—	—	—	L.
3661,35	8R	10	^{5}F — 13°	?	— 1	0,15	G°?
3634,94	10R	3	^{5}F — ^{5}D°	+ 1	— 1	0,0	
3596,17	10R	6	^{5}F — ^{5}G°	— 1	— 1	0,26	
3593,03	10R	6	^{5}F — ^{5}G°	— 1	— 1	0,33	
3498,95	10R	8	^{5}F — ^{5}G°	— 1	— 1	0,0	U; L.
3436,74	10R	5	^{5}F — ^{5}G°	— 1	— 1	0,15	
3417,35	10R	3	^{5}F — 19°	?	— 1	0,26	G°?
				Os			
5857,79	15	—					
5523,55	30	—					
4794,00	15	3					U.
4420,46	10	10					
4260,85	10	5					
3782,20	20	4					
3752,70	10	7					
3301,56	9	2					
3267,94	8	3					
3262,30	7	4	D — 4			0,51	
3058,66	7	4	F — 2			0,0	
3030,70	4	3	C — 6			0,64	
3018,04	5	3					
2909,08	7	5					
2838,63	5	3	C — 10			0,64	
2637,12	4	2	F — 5			0,0	
2488,55	4	2					

λ I. A	I a	I c	Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
Grupo del Co			Co				
5353,48	10	2					
5342,68	8	2	^4G — 27°	?	?	3,62	$j = 4$?
5266,49	6	1	^2G — $^2F°$	+ 1	+ 1	2,02	2*e*.
4867,88	8	8					
4840,28	8	8					
4813,48	8	10					
4792,87	8	8					
4780,00	5	4					
4121,33	10R	10R	$^2G°$	— 1	— 1	0,92	L.
4118,78	8R	10					
4110,54	7	10	^2F —				
3995,31	8R	10	$^4G°$	— 1	— 1	0,92	ΔR = 2.
3935,97	6R	10	$^4F°$	0	— 1	0,92	ΔR = 2.
3894,08	9R	10	$^2G°$	— 1	— 1	1,05	
3873,96	7R	10	^4F — $^4D°$	+ 1	+ 1	0,51	L.
3873,12	7R	10	^4F — $^4D°$	+ 1	+ 1	0,43	L.
3845,48	10R	10	^2F — $^2G°$	— 1	— 1	0,92	
3842,06	6R	10	^2F — $^2D°$	+ 1	+ 1	0,92	L.
3602,08	5R	4	^4F — $^4F°$	0	0	0,22	
3587,19	8R	10	^2F — $^2F°$	0	0	1,05	
3574,96	5R	4	^4F — $^4D°$	+ 1	0	0,58	L.
3569,38	6R	10	^2F — $^2F°$	0	0	0,92	
3529,81	8R	6	^4F — $^4G°$	— 1	— 1	0,51	
3526,85	9R	6	^4F — $^4F°$	0	0	0,0	L.
3518,35	6R	7	^2F — $^2D°$	+ 1	+ 1	1,05	
3512,64	4R	6	$^4D°$	+ 1	+ 1	0,58	
3506,32	6R	8	^4F — $^4D°$	+ 1	+ 1	0,51	
3502,28	5R	6	$^4D°$	+ 1	+ 1	0,43	L.
3489,40	5R	7	^2F — $^2D°$	+ 1	+ 1	0,92	
3474,02	9R	8	$^4F°$	0	+ 1	0,0	L.
3465,79	6R	5	$^4G°$	— 1	— 1	0,0	
3462,81	6R	5	$^4F°$	0	— 1	0,63	L.
3453,51	6R	10	$^4G°$	— 1	— 1	0,43	U; L.
3449,45	6R	5	$^4G°$	— 1	0	0,43	
3449,17	6R	5	^4F — $^4G°$	— 1	0	0,58	
3443,64	3R	6	$^4G°$	— 1	0	0,51	
3442,92	4R	3	$^4D°$	+ 1	+ 1	0,17	
3433,04	6R	6	$^4F°$	0	0	0,63	L.
3417,16	4R	4	$^4F°$	0	0	0,58	L.
3412,64	3R	3	$^4D°$	+ 1	+ 1	0,0	

λ I . A	I		Serie	Δl	Δj	E . P	Observaciones
	a	c					
			Co				
3412,34	4R	4	^4F — $^2G°$	— 1	— 1	0,51	ΔR = 2.
3409,18	4R	6	^4F — $^4F°$	0	0	0,51	L.
3405,12	7R	10	^4F — $^4F°$	0	0	0,43	U; L.
3395,38	10R	5	^4F — $^2G°$	— 1	— 1	0,58	ΔR = 2.
3390,40	5	1					
3388,18	9R	5	^4F — $^4F°$	0	+ 1	0,58	
3044,00	8R	4	^4F — $^4F°$	0	0	0,0	L; 2*e*.
2528,97	3R	2	^4F — $^4D°$	+ 1	+ 1	0,1	
2407,26	2R	1	^4F — $^4G°$	— 1	0	0,0	
			Rh				
6752,38	20	1	$^4D°$ — ^4F	— 1	— 1	3,35	
5599,43	40	3	^4P — $^4D°$	— 1	— 1	1,14	
5379,08	30	3	11° — D	?	?	4,88	
5354,38	50	5	$^2G°$ — ^4G	0	+ 1	3,90	ΔR = 2.
5193,13	30	3	$^4G°$ — ^4H	— 1	— 1	3,53	
4851,62	20	3					
4675,02	20	5	^2F — $^4D°$	+ 1	0	0,70	ΔR = 2.
4528,73	20	5	^2F — $^4F°$	0	— 1	0,98	ΔR = 2.
4374,82	10R	10	^2F — $^4G°$	— 1	— 1	0,70	ΔR = 2.
3799,31	10R	10	^2F — $^2F°$	0	0	0,70	
3692,35	10R	10	^4F — $^4D°$	+ 1	+ 1	0,0	
3657,99	10R	10	^4F — $^4D°$	+ 1	+ 1	0,19	
3596,19	10R	10	^4F — $^4D°$	+ 1	+ 1	0,32	
3502,53	10R	10	^4F — $^4G°$	— 1	0	0,0	
3434,90	10R	10	^4F — $^4G°$	— 1	— 1	0,0	U.
3396,82	10R	10	^4F — $^4F°$	0	0	0,0	
3323,10	10R	5	^4F — $^2G°$	— 1	— 1	0,19	ΔR = 2.
			Ir				
5894,08	15	—					
5625,55	20	—					
5449,50	30	1					U.
5364,32	20	—					
4938,09	15	—					
3513,67	9	8					U.
3437,10	4	3					
3368,50	8	3					

λ I . A	I		Serie	Δl	Δj	E . P	Observaciones
	a	c					
			Ir				
3220,79	8	5	^{2}D — 1°			0,35	U.
3218,47	4	2					
3133,31	6	5					
3100,42	4	3					
3068,88	4	3	^{2}D — 4°			0,35	
3064,51	4	1					
2943,17	5	4					
2924,81	8	4	^{2}D — 2°			0,0	
2849,74	7	4	^{2}D — 3°			0,0	
2824,44	6	4	^{2}D — 7°			0,35	
2823,18	5	2	^{2}D — 4°			0,0	
2664,77	5	3	^{2}D — 5°			0,0	
2661,99	6	3	^{2}D — 11°			0,35	
2639,70	4	3	^{2}D — 6°			0,35	
2564,17	4	2					
2543,98	5	4	^{2}D — 14°			0,35	
2372,78	4	2	^{2}D — 14°			0,0	
2242,70	2	3					
Grupo del Ni			Ni				
5476,91	10	10	^{1}S — ^{1}P°	— 1	— 1	1,82	
5081,12	9	3	^{1}F° — ^{1}G	— 1	— 1	3,82	
5080,53	8	3	^{3}F° — ^{3}G	— 1	— 1	3,64	
4714,42	10	8	^{5}G° — ^{5}F	+ 1	+ 1	3,36	
3619,59	10	10	^{1}D — ^{1}F°	— 1	— 1	0,42	L.
3524,54	10R	10	^{3}D — ^{3}P°	+ 1	+ 1	0,02	L.
3515,06	9R	10	^{3}D — ^{3}F°	— 1	— 1	0,10	L.
3492,96	10R	10	^{3}D — ^{3}P°	+ 1	+ 1	0,10	
3446,26	10R	10	^{3}D — ^{3}D°	0	0	0,10	L.
3437,28	6R	5	^{3}F — ^{5}F°	0	0	0,0	ΔR = 2.
3433,57	9R	6	^{3}D — ^{3}F°	— 1	0	0,02	L.
3414,77	10R	10	^{3}D — ^{3}F°	— 1	— 1	0,02	U; L.
3413,94	3R	2	^{3}D — ^{5}F°	— 1	0	0,10	ΔR = 2
3413,48	5R	3	^{3}F — ^{3}F°	0	+ 1	0,16	2*e*.
3409,58	5	1	^{3}F — ^{3}F°	0	+ 1	0,0	2*e*.
3392,99	10R	8	^{3}D — ^{3}D°	0	0	0,02	L.
3380,58	10R	6	^{1}D — ^{1}P°	+ 1	+ 1	0,42	L.
3134,10	10R	4	^{3}D — ^{3}F°	— 1	— 1	0,21	

λ I.A	I		Serie	Δl	Δj	E.P	Observaciones
	a	c					
Ni							
3101,88	9R	3	^{1}D — $^{1}F^{\circ}$	— 1	— 1	0,42	
3101,56	9R	4	^{3}D — $^{3}F^{\circ}$	— 1	— 1	0,10	
3097,11	5	2	^{3}F — $^{3}F^{\circ}$	0	+ 1	0,16	
3064,63	6	2	^{3}D — $^{3}D^{\circ}$	0	— 1	0,10	
3057,65	10R	4	^{3}D — $^{3}D^{\circ}$	0	0	0,21	L.
3054,32	8R	4	^{3}D — $^{3}F^{\circ}$	— 1	— 1	0,10	L.
3050,83	10R	6	^{3}D — $^{3}F^{\circ}$	— 1	— 1	0,02	L.
3037,94	9R	4	^{3}D — $^{3}F^{\circ}$	— 1	0	0,02	L.
3031,86	3	1	^{3}F — $^{3}F^{\circ}$	0	0	0,0	
3019,15	5	2	^{3}F — $^{3}F^{\circ}$	0	+ 1	0,0	
3012,01	9R	5	^{1}D — $^{1}D^{\circ}$	0	0	0,42	
3003,63	9R	4	^{3}D — $^{3}D^{\circ}$	0	0	0,10	L.
3002,49	10R	5	^{3}D — $^{3}D^{\circ}$	0	0	0,02	L.
2290,03	6	—	^{3}F — $^{3}F^{\circ}$	0	+ 1	0,0	
Pd							
5547,02	20	1	$^{3}D^{\circ}$ — ^{3}D	0	0	4,68	
5542,80	30	1	$^{3}D^{\circ}$ — ^{3}F	— 1	— 1	4,68	
5395,27	20	1	$^{1}F^{\circ}$ — ^{1}G	— 1	— 1	4,93	
5295,59	50	2	$^{3}F^{\circ}$ — ^{3}G	— 1	— 1	4,45	
5163,82	40	1	$^{3}F^{\circ}$ — ^{3}G	— 1	— 1	4,38	
4875,42	20	2	^{3}S	+ 1	+ 1	4,20	
4817,52	30	2	$^{3}P^{\circ}$ — { ^{3}P	0	0	4,20	
4788,20	20	2	^{3}D	— 1	— 1	4,20	
3690,37	6R	10	^{1}D — $^{3}F^{\circ}$	— 1	0	1,45	ΔR = 2.
3634,68	10R	10	$^{3}P^{\circ}$	+ 1	+ 1	0,81	L.
3609,55	9R	10	$^{3}F^{\circ}$	— 1	— 1	0,96	L.
3516,95	8R	10	^{3}D — { $^{3}P^{\circ}$	+ 1	+ 1	0,96	
3481,16	7R	10	$^{3}F^{\circ}$	— 1	— 1	1,23	
3460,75	7R	10	$^{3}F^{\circ}$	— 1	0	0,81	
3441,41	6R	10	^{1}D — $^{1}D^{\circ}$	0	0	1,45	
3433,41	5R	10	^{1}D — $^{1}P^{\circ}$	+ 1	+ 1	1,45	
3421,23	8R	10	$^{3}D^{\circ}$	0	0	0,96	
3404,53	10R	10	$^{3}F^{\circ}$	— 1	— 1	0,81	U; L.
3373,00	6R	10	^{3}D — { $^{3}D^{\circ}$	0	— 1	0,96	
3302,14	6R	10	$^{3}D^{\circ}$	0	0	1,23	
3242,71	10R	10	$^{3}D^{\circ}$	0	0	0,81	L.

λ I. A	I		Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
	a	c					
			Pt				
5840,13	15	1	4 — 2°	?	0	1,93	
5478,50	12	2	11° — 52	?	+ 1	4,75	
5475,78	15	2	4° — ^{3}D	?	0	4,20	
5390,79	10	1	4° — ^{3}D	?	+ 1	4,20	
5368,99	15	1	4 — 4°	?	— 1	1,93	
5301,02	20	5					
5227,64	20	5	^{1}D — 2°	?	0	1,67	
3966,36	8	6	3 — 5°	?	0	1,24	U.
3922,98	8	10					
3268,42	5	1					
3064,71	6R	10	^{3}D — 2°	?	+ 1	0,10	U.
3042,62	4R	4	1 — 3°	?	— 1	0,10	
2997,96	7R	10	^{3}D — 4°	?	— 1	0,10	
2929,79	8R	4	^{3}D — 4°	?	0	0,0	
2830,29	8R	5	^{3}D — 5°	?	0	0,0	
2719,02	5R	4	1 — 9°	?	0	0,10	
2705,89	5R	5	1 — 10°	?	+ 1	0,10	
2702,40	6R	6	^{3}D — 10°	?	— 1	0,10	
2659,44	10R	10	^{3}D — 9°	?	— 1	0,0	
2650,86	4R	4	1 — 11°	?	— 1	0,10	
2628,02	7R	5	^{3}D — 12°	?	0	0,10	

TABLA II

ATOMOS IONIZADOS (1)

λ I. A	I a	I c	Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
Columna I (*a*)			K (II)				
3440,40	—	4	9 — 6°	?	— 1	23,4	L.
			Rb (II)				
4571,79	—	10	³P° — 2	?	— 1	19,43	
2798,90	—	5					U.
			Cs (II)				
4538,90	—	6	5 — 2°	?	0	4,07	
2630,60	—	10					
2525,60	—	10					
Columna I (*b*)			Cu (II)				
2666,44	—	3	³D — ³D°	0		2,7	
2369,88	5	8	¹D — ³F°	— 1		3,24	ΔR = 2.
2247,80	3	6R	³D — ³P°	+ 1		2,70	
2242,62	2	6	¹D — ³D°	0		3,24	ΔR = 2.
2228,85	4	4	³D — ³P°	+ 1		2,96	
2218,11	1R	5	³D — ³P°	+ 1		2,70	
2192,27	3	4	³D — ³F°	— 1		2,70	
2135,90	2	3R	³D — ³F°	— 1		2,96	U.

(1) Los potenciales de excitación se refieren al 1°, 2°, etc. espectros de chispas, según los casos.

λ I . A	I a	I c	Serie	Δl	Δj	E . P	Observaciones
			Ag (II)				
2799,60	—	8	$^3D^o$ — ^3D	0	0	10,5	
2767,50	—	8	^1D — $^3F^o$	0	— 1	5,7	ΔR = 2.
2660,40	3	8	^1D — $^3P^o$	+ 1	+ 1	5,7	ΔR = 2.
2506,65	5	5	^3D — $^3P^o$	— 1	0	5,4	
2473,88	3	8	^1D — $^3D^o$	0	— 1	5,7	ΔR = 2.
2447,91	2	8	^1D — $^3F^o$	— 1	0	5,7	ΔR = 2.
2437,77	3	8	^3D — $^3P^o$	+ 1	+ 1	4,85	
2413,22	4	8	^3D — $^3F^o$	— 1	— 1	5,05	
2411,38	—	8	^3D — $^3D^o$	0	— 1	5,40	
2331,35	4	6	^3D — $^3P^o$	+ 1	+ 1	5,05	
2324,63	2	6	^3D — $^3F^o$	— 1	0	4,85	
2320,24	2	6	^1D — $^1F^o$	— 1	— 1	5,70	
2317,03	2	5	^3D — $^3F^o$	— 1	— 1	5,40	
2248,73	3	3	^3D — $^3D^o$	0	0	5,05	
2246,38	3	3	^3D — $^3F^o$	— 1	— 1	4,85	
2229,51	2	4	^1D — $^1D^o$	0	0	5,70	
			Au (II)				
3122,50	—	5	^3F — $^3F^o$	0	+ 1	3,14	
2802,21	—	10	$^3F^o$ — ^3D	+ 1	0	7,10	
2641,50	4	6					
2201,30	—	4	^3D — $^3D^o$	0	— 1	1,57	
Columna II (*a*)			**Be (II)**				
3131,06	10	10R	^2S — $^2P^o$	— 1	0	0,0	U.
3130,42	10	10R	^2S — $^2P^o$	— 1	— 1	0,0	U.
			Mg (II)				
2936,52	4	10R	$^2P^o$ — ^2S	+ 1	+ 1	4,4	
2928,70	3	10	$^2P^o$ — ^2S	+ 1	0	4,4	
2802,71	10R	10R	^2S — $^2P^o$	— 1	0	0,0	U.
2798,02	5	10	$^2P^o$ — ^2D	— 1	0	4,4	
2795,54	10R	10R	^2S — $^2P^o$	— 1	— 1	0,0	U.
2790,83	4	10R	$^2P^o$ — ^2D	— 1	0	4,4	

λ I. A	I a	I c	Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
			Ca (II)				
3968,46	10R	10R	^2S — $^2P°$	— 1	0	0,0	U.
3933,67	10R	10R	^2S — $^2P°$	— 1	— 1	0,0	U.
3736,91	8	10R	$^2P°$ — ^2S	+ 1	+ 1	3,10	
3706,03	6	8	$^2P°$ — ^2S	+ 1	0	3,10	
3179,33	6	10R	$^2P°$ — ^2D	— 1	— 1	3,10	
3158,87	8	10R	$^2P°$ — ^2D	— 1	— 1	3,10	
			Sr (II)				
4305,44	5	—	$^2P°$ — ^2S	+ 1	+ 1	3,02	
4215,52	10R	10R	^2S — $^2P°$	— 1	0	0,0	U; L.
4077,71	10R	10R	^2S — $^2P°$	— 1	— 1	0,0	U; L.
3474,90	5	4	$^2P°$ — ^2D	— 1	0	3,02	
3464,47	6	7	$^2P°$ — ^2D	— 1	— 1	3,02	
3380,72	5	6	$^2P°$ — ^2D	— 1	— 1	2,93	
			Ba (II)				
6496,91	10R	10R					
6141,78	10R	10R					
4934,09	10R	10R	^2S — $^2P°$	— 1	0	0,0	U.
4899,97	8	8	$^2P°$ — ^2S	+ 1	+ 1	2,70	L.
4554,04	10R	10R	^2S — $^2P°$	— 1	— 1	0,0	U; L.
4130,68	8R	10R	$^2P°$ — ^2D	— 1	— 1	2,70	
3891,78	8R	8R	$^2P°$ — ^2D	— 1	— 1	2,50	
2647,29	4	4	$^2P°$ — ^2S	+ 1	0	2,50	
2641,40	2	2	$^2P°$ — ^2D	— 1	0	2,70	
2634,80	5	8	$^2P°$ — ^2D	— 1	— 1	2,70	
2528,51	—	6	$^2P°$ — ^2D	— 1	— 1	2,50	
2347,58	5	7					
2335,25	6R	10R	^2D — $^2F°$	— 1	— 1	0,70	
2304,22	6R	8R	^2D — $^2F°$	— 1	— 1	0,60	
			Ra (II)				
4682,20	10	10	^2S — $^2P°$	— 1	0	0,0	
3814,44	10	10	^2S — $^2P°$	— 1	— 1	0,0	U.

λ I . A	I a	I c	Serie	Δl	Δj	E . P	Observaciones
Columna II (*b*)			Zn (II)				
2557,95	8	10	$^{2}P^{\circ}$ — ^{2}S	+ 1	+ 1	6,1	
2502,00	3	10	$^{2}P^{\circ}$ — ^{2}S	+ 1	0	6,1	
2061,90	4	4R	^{2}S — $^{2}P^{\circ}$	— 1	0	0,0	
2025,50	10	10	^{2}S — $^{2}P^{\circ}$	— 1	— 1	0,0	U.
			Cd (II)				
3250,29	—	8	$^{2}P^{\circ}$ — ^{2}D	— 1	— 1	5,45	
2748,67	2	10	$^{2}P^{\circ}$ — ^{2}S	+ 1	+ 1	5,75	
2573,04	4	10	$^{2}P^{\circ}$ — ^{2}S	+ 1	0	5,45	
2312,88	4	10	$^{2}P^{\circ}$ — ^{2}D	— 1	— 1	5,75	
2265,03	4R	10R	^{2}S — $^{2}P^{\circ}$	— 1	0	0,0	U.
2144,39	4R	6R	^{2}S — $^{2}P^{\circ}$	— 1	— 1	0,0	U.
			Hg (II)				
2847,70	6	10	$^{2}P^{\circ}$ — ^{2}S	+ 1	+ 1	7,50	
1942,00	10	—	^{2}S — $^{2}P^{\circ}$	— 1	0	0,0	U.
1649,80	—	10	^{2}S — $^{2}P^{\circ}$	— 1	— 1	0,0	
Columna III (*a*)			B (II)				
3451,20	—	6	$^{1}P^{\circ}$ — ^{1}D	— 1	— 1	9,1	
1362,46	—	5	^{1}S — $^{1}P^{\circ}$	— 1	— 1	0,0	
			B (III)				
2067,88	—	2	^{2}S — $^{2}P^{\circ}$	— 1	0	0,0	
2066,41	—	2	^{2}S — $^{2}P^{\circ}$	— 1	— 1	0,0	
			Al (II) (1)				
6243,35	—	10	$^{3}P^{\circ}$ — ^{3}D	— 1	0	13,0	
6231,76	—	6	$^{3}P^{\circ}$ — ^{3}D	— 1	— 1	13,0	
2816,18	—	20	$^{1}P^{\circ}$ — ^{1}S	+ 1	+ 1	7,4	
2669,17	—	10	^{1}S — $^{3}P^{\circ}$	— 1	— 1	0,0	ΔR = 2.
2631,55	—	7	^{1}D — $^{1}F^{\circ}$	— 1	— 1	10,5	
1989,80	—	8	$^{1}P^{\circ}$ — ^{1}D	— 1	— 1	7,4	
1962,48	—	20	$^{3}P^{\circ}$ — ^{3}S	+ 1	+ 1	4,63	
1858,13	—	5	$^{3}P^{\circ}$ — ^{3}S	+ 1	0	4,63	
1856,00	—	8	$^{3}P^{\circ}$ — ^{3}S	+ 1	— 1	4,63	
1671,00	—	10	^{1}S — $^{1}P^{\circ}$	— 1	— 1	0,0	

(1) Véase memorias citadas a propósito del Hg, página 147.

λ I.A	I a	I c	Serie	Δl	Δj	E.P	Observaciones
			Al (III) (1)				
1862,90	—	10	$^{2}S - {}^{2}P^{\circ}$	— 1	0	0,0	
1854,67	—	10	$^{2}S - {}^{2}P^{\circ}$	— 1	— 1	0,0	
			In (II)				
2941,24	—	8					
Columna III (*b*)			Sc (II)				
5526,81	8	3	$^{1}G - {}^{1}F^{\circ}$	+ 1	+ 1	1,76	
5031,03	7	4	$^{1}D - {}^{1}P^{\circ}$	+ 1	+ 1	1,35	
4246,85	10	10	$^{1}D - {}^{1}D^{\circ}$	0	+ 1	0,37	
3651,83	10	10	$^{3}D - {}^{3}F^{\circ}$	— 1	0	0,0	
3642,81	10	10	$^{3}D - {}^{3}F^{\circ}$	— 1	— 1	0,0	
3630,75	10	10	$^{3}D - {}^{3}F^{\circ}$	— 1	— 1	0,0	U.
3613,83	10	10	$^{3}D - {}^{3}F^{\circ}$	— 1	— 1	0,02	U.
3580,98	10	10					
3572,57	10	10	$^{3}D - {}^{3}P^{\circ}$	+ 1	+ 1	0,02	
3368,97	10	8	$^{3}D - {}^{3}P^{\circ}$	+ 1	+ 1	0,0	
3361,97	10	8	$^{3}D - {}^{3}P^{\circ}$	+ 1	+ 1	0,0	
3361,32	10	8	$^{3}D - {}^{3}P^{\circ}$	+ 1	0	0,0	
3359,69	10	10	$^{3}D - {}^{3}P^{\circ}$	+ 1	0	0,0	
3353,75	10	10	$^{1}D - {}^{1}F^{\circ}$	— 1	— 1	0,37	
			Y (II)				
5662,95	9R	10	$^{1}G - {}^{1}F^{\circ}$	+ 1	+ 1	1,94	
5205,71	10	10	$^{3}F - {}^{3}F^{\circ}$	0	0	1,03	
5200,41	10	—	$^{3}F - {}^{3}F^{\circ}$	0	0	0,99	
5087,42	10	10	$^{3}F - {}^{3}F^{\circ}$	0	0	1,08	
4900,11	10	10	$^{3}F - {}^{3}D^{\circ}$	+ 1	+ 1	1,03	U.
4883,69	10	10	$^{3}F - {}^{3}D^{\circ}$	+ 1	+ 1	1,08	U.
4374,95	10	10	$^{1}D - {}^{1}D^{\circ}$	0	0	0,41	
4177,52	10	10	$^{1}D - {}^{3}F^{\circ}$	— 1	0	0,41	ΔR = 2.
3982,60	10	10	$^{3}D - {}^{1}D^{\circ}$	0	+ 1	0,18	ΔR = 2.
3788,69	9	10	$^{3}D - {}^{3}F^{\circ}$	— 1	— 1	0,10	
3774,33	10	10	$^{3}D - {}^{3}F^{\circ}$	— 1	— 1	0,13	U.
3710,30	10	10	$^{3}D - {}^{3}F^{\circ}$	— 1	— 1	0,18	U.
3633,13	10	10	$^{1}S - {}^{1}P^{\circ}$	— 1	— 1	0,0	2*e*.
3600,73	10	10	$^{3}D - {}^{3}D^{\circ}$	0	0	0,18	U.
3327,88	10	10	$^{1}D - {}^{1}F^{\circ}$	— 1	— 1	0,41	
3242,28	10	10	$^{3}D - {}^{3}P^{\circ}$	+ 1	+ 1	0,18	
3216,68	10	10	$^{3}D - {}^{3}P^{\circ}$	+ 1	+ 1	0,13	
3203,32	7	10	$^{3}D - {}^{3}P^{\circ}$	+ 1	+ 1	0,10	
3200,26	7	10	$^{3}D - {}^{3}P^{\circ}$	+ 1	0	0,13	
3195,61	8	10	$^{3}D - {}^{3}P^{\circ}$	+ 1	0	0,10	
2460,58	2	4	$^{3}P^{\circ} - {}^{3}D$	— 1	— 1	3,02	
2422,20	4	6	$^{1}D - {}^{1}P^{\circ}$	+ 1	+ 1	0,41	

(1) Memorias citadas, pág. 147.

Y (III)

λ I. A	I a	I c	Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
2817,00	1	10	$^2S - {}^2P^\circ$	— 1	— 1	0,92	
2367,20	—	10	$^2D - {}^2P^\circ$	+ 1	+ 1	0,09	
2327,30	—	5	$^2D - {}^2P^\circ$	+ 1	0	0,0	

Grupo de las tierras raras

La (II)

λ I. A	I a	I c	Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
4921,79	8	5	$^3F - {}^3G^\circ$	— 1	— 1	0,24	
4899,91	9	4	$^3F - {}^3G^\circ$	— 1	— 1	0,0	
4429,90	10	10	$^3D - {}^1D^\circ$	0	— 1	0,23	ΔR = 2.
4334,97	6	8	$^3F^\circ - {}^1F$	0	— 1	1,75	ΔR = 2.
4333,80	10	10	$^1D - {}^1D^\circ$	0	0	0,17	
4141,75	10	10	$^3D - {}^3D^\circ$	0	+ 1	0,40	
4123,23	9	10	$^3D - {}^3F^\circ$	— 1	— 1	0,32	
4086,71	10	10	$^3F - {}^1D^\circ$	+ 1	0	0,0	ΔR = 2.
4077,35	10	10	$^3D - {}^3F^\circ$	— 1	— 1	0,23	
4025,87	6	4	$^3D - {}^1P^\circ$	+ 1	+ 1	0,32	ΔR = 2.
3995,75	10	5	$^1D - {}^3F^\circ$	— 1	0	0,17	ΔR = 2.
3988,53	10	10	$^3D - {}^3D^\circ$	0	0	0,40	
3949,10	10	10	$^3D - {}^3F^\circ$	— 1	— 1	0,40	
3376,32	4	3	$^3D - {}^1F^\circ$	— 1	0	0,40	ΔR = 2.
3344,56	8	7	$^3D - {}^3P^\circ$	+ 1	+ 1	0,23	
3337,49	8	10	$^3D - {}^3P^\circ$	+ 1	+ 1	0,40	
3265,65	6	4	$^3D - {}^3P^\circ$	+ 1	0	0,32	
3171,70	—	10					
2379,40	—	10					
2297,80	—	7					

Columna IV (*a*)

C (II)

λ I. A	I a	I c	Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
4267,27	8	10	$^2D - {}^2F^\circ$	— 1	— 1	18,0	2*e*.
4267,02	8	10	$^2D - {}^2F^\circ$	— 1	— 1	18,0	2*e*.
2837,60	4	8	$^2S - {}^2P^\circ$	— 1	— 1	11,9	
2836,71	5	10	$^2S - {}^2P^\circ$	— 1	0	11,9	
1335,72	—	10	$^2P^\circ - {}^2D$	— 1	— 1	0,0	
1334,54	—	10	$^2P^\circ - {}^2D$	— 1	— 1	0,0	

Si (II)

λ I. A	I a	I c	Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
6371,36	—	8	$^2S - {}^2P^\circ$	— 1	0	8,1	
6370,90	—	2	$^2S - {}^2P^\circ$	— 1	— 1	8,1	
6346,69	—	5	$^2P^\circ - {}^2S$	+ 1	+ 1	10,0	
1533,55	—	10	$^2P^\circ - {}^2S$	+ 1	+ 1	0,04	U.
1526,86	—	10	$^2P^\circ - {}^2S$	+ 1	0	0,0	

λ I.A	I a	I c	Serie	Δl	Δj	E.P	Observaciones
			Sn (II)				
3352,30	—	10	^2D — $^2F^\circ$	—1	—1	7,25	2*e*.
3283,50	—	10	$^2F^\circ$	—1	—1	7,25	2*e*.
			Pb (II)				
5608,80	4	10	^2S — $^2P^\circ$	—1	—1	7,35	
2203,50	3R	4R	$^2P^\circ$ — ^2S	+1	+1	1,74	U.
1682,40	1	10	^2S	+1	0	0,0	
Columna IV (*b*)			**Ti (II)**				
3761,32	9	10	^2F — $^2F^\circ$	0	0	0,57	
3759,30	9	10	$^2F^\circ$	0	0	0,60	
3685,19	10R	10	$^2D^\circ$	+1	+1	0,60	
			$^2D^\circ$	+1	+1	0,57	
3383,77	8R	10	^4F — $^4G^\circ$	—1	—1	0,0	
3372,80	10	10R	$^4G^\circ$	—1	—1	0,01	U.
3361,22	8R	10	$^4G^\circ$	—1	—1	0,03	U.
3349,44	9R	10R	$^4G^\circ$	—1	—1	0,05	U.
3349,04	6R	8R	^2F — $^2G^\circ$	—1	—1	0,60	
3340,34	7	5	^4F — $^4F^\circ$	0	0	0,11	
3322,94	8R	10	^4F — $^4F^\circ$	0	0	0,15	
3321,70	5	5	^4P — $^4S^\circ$	+1	0	1,22	
3261,60	4	10	^4P — $^4D^\circ$	—1	—1	1,22	
3252,92	8	6	^4F — $^4F^\circ$	0	+1	0,03	
3241,99	7R	10	$^4F^\circ$	0	0	0,0	
3239,04	7R	6R	$^4F^\circ$	0	0	0,01	
3236,58	7R	6R	$^4F^\circ$	0	0	0,03	
3234,52	8R	10R	$^4F^\circ$	0	0	0,05	
3232,28	5	5	^2G — $^2F^\circ$	+1	+1	1,11	
3229,43	6	3	$^2F^\circ$	+1	+1	1,12	
3229,20	7	3	^4F — $^4F^\circ$	0	—1	0,0	
3218,27	6	8	^2H — $^2G^\circ$	+1	+1	1,57	
3190,87	7	10	^2D — $^2F^\circ$	—1	—1	1,08	
3168,52	9	10	^4F — $^4D^\circ$	+1	+1	0,15	
3162,57	9	6	$^4D^\circ$	+1	+1	0,12	
3088,03	10	10R	$^4D^\circ$	+1	+1	0,05	
3078,64	10	8	$^4D^\circ$	+1	+1	0,03	
3075,22	9	4	$^4D^\circ$	+1	+1	0,01	
3072,97	8	3	$^4D^\circ$	+1	+1	0,0	
3072,11	8	3	$^4D^\circ$	+1	0	0,03	

λ I . A	I		Serie	Δl	Δj	E . P	Observaciones
	a	c					
			Ti (II)				
3071,24	5	3	^{4}P — $^{4}P^{\circ}$	0	+ 1	1,17	
3066,36	7	3	^{4}F — { $^{4}D^{\circ}$	+ 1	0	0,0	
3066,22	7	—	$^{4}D^{\circ}$	+ 1	+ 1	0,01	
2954,80	—	8	$^{4}G^{\circ}$ — ^{2}H	— 1	— 1	4,28	ΔR = 2.
2941,99	1	4	^{4}G	— 1	— 1	3,83	
2938,70	—	5	$^{4}F^{\circ}$ — { ^{4}G	— 1	— 1	3,81	
2936,20	—	5	^{4}G	— 1	— 1	3,80	
2884,10	7	8	^{2}G — $^{2}G^{\circ}$	0	0	1,12	
2841,94	8	4	^{2}F — { $^{2}F^{\circ}$	0	0	0,60	
2832,18	7	5	$^{2}F^{\circ}$	0	0	0,57	
			Zr (II)				
3698,17	6	10	^{2}G — $^{2}G^{\circ}$	0	0	1,01	
3572,47	10	10	^{4}F — { $^{4}G^{\circ}$	— 1	— 1	0,0	
3496,21	10	10	$^{4}G^{\circ}$	— 1	— 1	0,04	U.
3483,53	5	8	^{2}D — $^{2}P^{\circ}$	+ 1	0	1,75	
3481,16	8	10	^{2}F — $^{2}G^{\circ}$	— 1	— 1	0,80	
3438,23	10	10	^{4}F — { $^{4}G^{\circ}$	— 1	— 1	0,09	
3410,25	8	8	$^{4}D^{\circ}$	+ 1	+ 1	0,41	
3394,64	1	2	^{4}P — $^{4}D^{\circ}$	— 1	0	1,20	2*e*.
3391,98	10	10	^{4}F — { $^{4}G^{\circ}$	— 1	— 1	0,16	U.
3388,30	8	5	$^{2}F^{\circ}$	0	— 1	0,0	ΔR = 2.
3387,87	7	5	^{2}G — $^{2}F^{\circ}$	+ 1	+ 1	0,97	
3357,26	8	4	$^{4}F^{\circ}$	0	0	0,0	
3306,27	5	8	$^{4}F^{\circ}$	0	0	0,04	
3284,71	8	4	$^{4}D^{\circ}$	+ 1	0	0,0	
3279,27	8	4	^{4}F — { $^{4}F^{\circ}$	0	0	0,09	
3273,05	8	9	$^{4}F^{\circ}$	0	0	0,16	
3165,98	6	3	$^{4}D^{\circ}$	+ 1	+ 1	0,16	
3138,67	6	4	$^{4}D^{\circ}$	+ 1	+ 1	0,09	
3054,84	5	4	^{2}G — $^{2}G^{\circ}$	0	0	1,01	
3036,38	3	3	^{2}D — $^{4}F^{\circ}$	— 1	— 1	0,56	ΔR = 2.
2968,96	5	3	^{4}F — { $^{4}F^{\circ}$	0	+ 1	0,46	2*e*.
2962,68	5	2	$^{4}D^{\circ}$	+ 1	+ 1	0,36	
2927,00	5	4	^{2}G — $^{2}F^{\circ}$	+ 1	+ 1	1,75	
2844,58	4	4	^{4}P — { $^{4}P^{\circ}$	0	0	0,99	
2843,58	5	4	$^{4}P^{\circ}$	0	0	0,95	
2700,14	5	4	^{4}F — { $^{2}F^{\circ}$	0	0	0,09	ΔR = 2.
2678,62	5	5	$^{4}F^{\circ}$	0	0	0,16	

λ I. A	I a	I c	Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
			Zr (II)				
2630,90	4	2	^2D — $^2F°$	—1	—1	0,56	
2571,41	6	8	^4F — $^4D°$	+1	+1	0,09	
2568,87	5	6	^4F — $^4D°$	+1	+1	0,16	
2567,64	5	6	^4F — $^4D°$	+1	+1	0,0	
2457,43	4	4	^2D — $^2D°$	0	0	0,56	
			Hf (II) (1)				
3719,27	15	25	^4F — 18°	+1	+1	0,61	$^4D°$
3569,03	20	30	^4F — 21°	+1	+1	0,78	$^4D°$
3561,65	20	25					
3505,23	20	40	^4F — 24°	+1	+1	1,03	$^4D°$
3399,80	30	40	^2D — 17°	—1	—1	0,0	$^4F°$; ΔR = 2.
3194,20	15	25	^4F — 22°	0	—1	0,45	$^4F°$.
3134,72	25	40	^2D — 22°	—1	0	0,38	$^4F°$; ΔR = 2.
2820,23	20	50	^2D — 27°	—1	—1	0,38	$^2F°$
2773,37	20	50	^4F — 32°	—1	—1	0,78	$^4G°$; U.
2516,88	25	100					
2513,02	25	50					
2512,68	15	30	^4F — 38°	—1	—1	0,61	$^4G°$
			Th (II)				
4391,12	5	10					
4381,89	5	10					
4019,14	5	10					
3601,05	3	7					
3538,75	1	10					
3392,05	4	5					
3313,69	1	10					
3300,54	1	10					
3290,56	—	10					
2932,48	—	5					
2684,31	2	4					
2555,22	—	4					
2554,71	—	4					
2549,57	—	4					

(1) Véase memorias citadas sobre Hf (I) página 147.

λ I . A	I a	I c	Serie	Δl	Δj	E . P	Observaciones
Columna V (*a*)			N (II)				
5679,50	—	7	^3D	— 1	— 1	18,4	
5675,90	—	6	$^3P^\circ$ — ^3D	— 1	— 1	18,39	
5666,60	—	7	^3D	— 1	— 1	18,39	
4643,10	—	5					
4630,50	—	10					
4621,40	—	5					
4613,90	—	4					
4607,17	—	5					
4601,50	—	5					
3995,00							
			N (III)				
4103,40	—	3	^2S — $^2P^\circ$	— 1	0	27,2	
4097,30	—	2	$^2P^\circ$	— 1	— 1	27,2	
991,60	4		$^2P^\circ$ — ^2D	— 1	— 1	0,02	
989,80	7		^2D	— 1	— 1	0,0	
Columna V (*b*)			V (II)				
3125,80	8	2	$^5G^\circ$	— 1	— 1	0,32	
3118,38	10R	10R	$^5G^\circ$	— 1	— 1	0,33	
3110,71	8	10R	^5F — $^5G^\circ$	— 1	— 1	0,35	U.
3102,30	10	10R	$^5G^\circ$	— 1	— 1	0,37	U.
3093,13	4	10R	$^5G^\circ$	— 1	— 1	0,39	U.
3067,11	6	5	^3G — $^3H^\circ$	— 1	— 1	1,79	
3066,37	4R	1R	^3H — $^3I^\circ$	— 1	0	2,50	
2924,65	8	8R	$^5F^\circ$	0	0	0,37	
2924,02	8	8R	$^5F^\circ$	0	0	0,39	
2908,81	8	8R	$^5D^\circ$	+ 1	+ 1	0,39	
2906,45	6	4R	^5F — $^3D^\circ$	+ 1	0	0,35	ΔR = 2.
2893,32	10	5R	$^5D^\circ$	+ 1	+ 1	0,37	
2892,67	10	5R	$^5D^\circ$	+ 1	+ 1	0,35	
2891,65	10	5R	$^5D^\circ$	+ 1	+ 1	0,33	
2715,69	10	5	$^5F^\circ$	— 1	0	0,04	
2706,19	8	3R	$^5F^\circ$	— 1	— 1	0,03	
2700,96	10	5R	$^5F^\circ$	— 1	— 1	0,04	
2683,11	6	2	$^5D^\circ$	0	— 1	0,0	
2682,90	6	2	^5D — $^5D^\circ$	0	0	0,01	
2679,35	8	4	$^5D^\circ$	0	0	0,03	
2678,60	7	3	$^5D^\circ$	0	— 1	0,03	
2677,83	8	4	$^5D^\circ$	0	— 1	0,0	
2672,04	6	3	$^5D^\circ$	0	— 1	0,01	
2526,24	4	2					

λ I. A	I a	I c	Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
			Nb (II)				
3225,43	5	10	^5F — $^5G°$	— 1	— 1	0,29	
3194,95	5	10	$^5G°$	— 1	— 1	0,32	
3163,37	5	10	$^5G°$	— 1	— 1	0,37	
3130,79	8	10	$^5G°$	— 1	— 1	0,44	
3094,20	10	10	$^5G°$	— 1	— 1	0,51	U.
2950,91	6	10	$^5F°$	0	0	0,51	
2927,82	8	10	$^5D°$	+ 1	+ 1	0,51	
2910,63	5	6	$^5F°$	0	— 1	0,37	
2883,20	5	6	$^5D°$	+ 1	+ 1	0,44	
			Ta (II)				
2685,14	3	5					
2675,40	—	5					
Columna VI (*a*)			O (II)				
4596,19	—	5					
4590,98	—	3					
4448,21	—	—					
4414,89	—	5					
4189,79	—	—					
4185,45	—	—					
4075,87	—	—					
3749,49	—	—					
3727,33	—	—					
3390,25	—	—					
Columna VI (b)			Cr (II)				
2860,94	3	5	^6D — $^6F°$	— 1	— 1	1,47	
2855,66	4	10	$^6F°$	— 1	— 1	1,48	
2849,83	4	10	$^6F°$	— 1	— 1	1,50	
2843,25	5R	10R	$^6F°$	— 1	— 1	1,52	
2840,02	2	8					
2835,64	5R	10	^6D — $^6F°$	— 1	— 1	1,54	U.
2830,48	2	10					
2766,54	4R	10	^6D — $^6P°$	+ 1	+ 1	1,54	
2762,60	3	10	$^6P°$	+ 1	+ 1	1,52	
2751,87	3	10	$^6P°$	+ 1	0	1,52	
2750,73	3	10	$^6P°$	+ 1	0	1,50	
2697,91	2	5					
2691,05	4	10	^6D — $^6D°$	0	+ 1	1,54	
2678,79	4	10	$^4P°$	+ 1	— 1	1,48	ΔR = 2.
2677,17	5R	10	$^6D°$	0	0	1,52	
2672,83	3	6	$^4P°$	+ 1	+ 1	1,52	ΔR = 2.

λ I. A	I a	I c	Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
			Cr (II)				
2671,82	3	8	^6D — $^4P^o$	+ 1	+ 1	1,50	ΔR = 2.
2668,72	4	6	^6D — $^4P^o$	+ 1	+ 1	1,48	ΔR = 2.
2666,03	4	8	^6D — $^6D^o$	0	— 1	1,50	
2663,43	4	5	^6D — $^6D^o$	0	— 1	1,52	
			Mo (II)				
3635,15	2	10					
3524,65	2	7					
3175,03	1	5					
3121,99	2	10					
2923,40	4	10	^6D — $^6F^o$	— 1	0	0,08	
2909,11	5	8	^6D — $^6F^o$	— 1	— 1	0,0	
2891,00	5	4	^6D — $^6F^o$	— 1	— 1	0,03	
2871,50	4	10	^6D — $^6F^o$	— 1	— 1	0,08	
2863,80	1	8					
2853,19	1	10					
2848,21	5	10	^6D — $^6F^o$	— 1	— 1	0,14	
2816,15	5	10	^6D — $^6F^o$	— 1	— 1	0,20	U.
2807,73	3	6					
2785,00	2	8					
2769,76	—	5					
2701,42	2	10	^6D — $^6P^o$	+ 1	0	0,03	
2687,98	1	8					
2684,13	3	10	^6D — $^6D^o$	0	0	0,20	
2683,22	2	8	^6D — $^6P^o$	+ 1	— 1	0,0	
2681,40	—	6					
2673,28	1	5					
2672,84	2	10	^6D — $^6D^o$	0	0	0,14	
2660,58	2	10	^6D — $^6D^o$	0	0	0,08	
2633,50	—	5					
2538,46	2	10					
			W (II)				
3613,79	3	10					
2764,28	2R	8					
2722,69	2	6					
2679,60	1	6					
2658,02	2	8					
2589,20	2	8					
2572,30	—	6					
2569,26	2	5					
2563,10	1	5					
2488,77	2	6					
2397,11	2	10					

λ I.A	I a	I c	Serie	Δl	Δj	E.P	Observaciones
Columna VII (*b*)			Mn (II)				
3495,84	5	6	$^5P^o$	+ 1	— 1	1,85	W.
3488,69	4	10	$^5P^o$	+ 1	0	1,84	W.
3482,92	4	10	^5D — $^5P^o$	+ 1	0	1,83	W.
3474,14	4	10	$^5P^o$	+ 1	+ 1	1,83	W.
3460,33	3	10	$^5P^o$	+ 1	+ 1	1,80	W.
3442,00	5	10	$^5P^o$	+ 1	+ 1	1,76	W.
2949,21	6	10	$^5P^o$	— 1	— 1	1,17	W.
2939,31	6	10	^5S — $^5P^o$	— 1	0	1,17	W.
2933,06	6	10	$^5P^o$	— 1	+ 1	1,17	W.
2605,69	8R	10R	$^7P^o$	— 1	+ 1	0,0	W.
2593,73	4R	10R	^7S — $^7P^o$	— 1	0	0,0	U. W.
2576,12	5R	10R	$^7P^o$	— 1	— 1	0,0	U. W.
2452,52	2R	10	^7D	— 1	— 1	4,8	W.
2437,50	—	5	$^7P^o$ — ^7D	— 1	— 1	4,75	
2427,96	—	4	^7D	— 1	— 1	4,72	
2427,77	—	4	^7D	— 1	0	4,72	
Columna VIII			He (II)				
4685,81	7		$4R\left[\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}\right]$			48,13	Tubo Geissler
1640,50	6		$4R\left[\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right]$			40,61	»
303,80	2		$4R\left[\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right]$			0,0	»
Grupo del Fe			Fe (II)				
2755,74	8	10	$^4F^o$	— 1	— 1	0,98	U.
2749,32	7	10	$^4F^o$	— 1	— 1	1,03	U.
2746,49	7	10	^4D — $^4F^o$	— 1	— 1	1,07	
2743,20	6	8	$^4F^o$	— 1	— 1	1,09	
2739,55	9	10	$^4D^o$	0	0	0,98	U.
2631,33	6	3	$^6D^o$	0	— 1	0,08	
2631,05	6	4	$^6D^o$	0	— 1	0,10	
2628,30	6	8	^6D — $^6D^o$	0	— 1	0,12	
2625,68	4	3	$^6D^o$	0	— 1	0,05	
2613,84	8	8	$^6D^o$	0	+ 1	0,10	
2611,88	8	10	^4D — $^4P^o$	+ 1	— 1	1,07	
2607,10	7	10	$^6D^o$	0	+ 1	1,03	ΔR = 2.

λ I. A	I a	I c	Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
			Fe (II)				
2599,40	6	10	^6D — $^6D°$	0	0	0,0	
2598,38	7	8	^6D — $^6D°$	0	+ 1	0,05	
2585,88	7	10	^6D — $^6D°$	0	+ 1	0,0	
2562,64	5	5	^4D — $^4P°$	+ 1	+ 1	0,98	
2484,19	6	—	^4F — $^6F°$	0	0	0,23	L. ΔR = 2.
2413,31	6	3	^6D — $^6F°$	— 1	— 1	0,12	
2410,53	6	5	^6D — $^6F°$	— 1	— 1	0,10	
2406,65	6	4	^6D — $^6F°$	— 1	0	0,10	
2404,89	6	6	^6D — $^6F°$	— 1	— 1	0,08	
2395,68	8	4	^6D — $^6F°$	— 1	— 1	0,05	U.
2382,04	8	10	^6D — $^6F°$	— 1	— 1	0,0	U.
2348,13	—	5	^4F — $^4D°$	+ 1	+ 1	0,23	
2343,50	2	7	^6D — $^6P°$	+ 1	+ 1	0,0	
2332,80	2	6	^6D — $^6P°$	+ 1	+ 1	0,05	
			Ru (II)				
2976,58	4	10					
2965,55	3	10					
2945,67	3	10					
2712,40	4	10					
2692,10	5	10					
2678,73	4	10					
Grupo del Co			Co (II)				
2694,68	2	8	^3F — $^5G°$	— 1	— 1	10,65	ΔR = 2.
2663,53	4	10	^3F — $^5G°$	— 1	— 1	10,54	ΔR = 2.
2614,31	—	6	^5P — $^5S°$	+ 1	+ 1	2,19	
2582,20	—	10	^3F — $^3G°$	— 1	— 1	10,72	
2580,33	4	10	^3F — $^3G°$	— 1	— 1	10,54	
2519,80	1	10	^3F — $^3F°$	0	0	10,65	
2420,70	—	6	—	—	—	—	
2388,90	2	10R	^5F — $^5F°$	0	0	0,41	U.
2378,62	3	10	^5F — $^5F°$	0	+ 1	0,41	U.
2363,80	2	10	^5F — $^5D°$	+ 1	0	0,49	
2311,60	—	6	^5F — $^5G°$	— 1	— 1	0,49	
2307,90	2	6R	^5F — $^5G°$	— 1	— 1	0,56	
2286,20	2	6R	^5F — $^5G°$	— 1	— 1	0,49	U.

λ I.A	I		Serie	Δl	Δj	E.P	Observaciones
	a	c					
Grupo del Ni			Ni (II)				
2545,92	1	6	^2F — $^4G^\circ$	— 1	— 1	1,85	ΔR = 2.
2510;89	4	10	^2F — $^4G^\circ$	— 1	— 1	1,67	ΔR = 2.
2437,90	2	10	^2F — $^4F^\circ$	0	— 1	1,67	ΔR = 2.
2416,14	2	10	^2F — $^2G^\circ$	— 1	— 1	1,85	U.
2394,56	2	10	^2F — $^2G^\circ$	— 1	— 1	1,67	
2375,43	1	8	^2F — $^2F^\circ$	0	0	1,67	
2316,04	2	6	^4F — $^4D^\circ$	+ 1	+ 1	1,04	U.
2302,97	2	4	^4F — $^4D^\circ$	+ 1	+ 1	1,15	U.
2287,10	10	40R	^2F — $^2D^\circ$	+ 1	+ 1	1,85	U.
2270,24	1	4	^4F — $^4G^\circ$	— 1	— 1	1,15	
2264,45	1	4	^4F — $^4G^\circ$	— 1	— 1	1,23	
2253,90	5	20R	^4F — $^4G^\circ$	— 1	— 1	1,31	
			Pd (II)				
2854,60	2	10	^2F — $^4G^\circ$	— 1	— 1	4,0	ΔR = 2.
2658,74	2	10	^2F — $^4F^\circ$	0	— 1	4,0	ΔR = 2.
2505,72	2	10	^2F — $^2G^\circ$	— 1	— 1	4,25	
2498,79	3	10	^2F — $^2G^\circ$	— 1	— 1	4,0	
2488,92	4	10	^4F — $^4D^\circ$	+ 1	+ 1	3,1	
2435,33	1	10	^2F — $^2F^\circ$	0	0	4,0	
2433,11	2	10	^2G — $^2H^\circ$	— 1	— 1	5,5	
2430,95	2	8	^4F — $^4G^\circ$	— 1	— 1	3,7	
2426,87	1	10	^4F — $^4D^\circ$	+ 1	+ 1	3,56	
2424,48	2	8	^4F — $^4D^\circ$	+ 1	+ 1	3,70	
2351,88	1	4	^2G — $^2F^\circ$	+ 1	+ 1	5,5	
2351,34	1	7	^4F — $^4G^\circ$	— 1	— 1	3,34	
2296,52	3	5	^4F — $^4G^\circ$	— 1	— 1	3,10	

3. En las tablas III y IV se hace una estadística de los niveles fundamentales que dan origen a las líneas últimas; y en la tabla V se resumen las dos tablas precedentes. Finalmente en la tabla VI figura una estadística completa referente a todas las líneas últimas.

TABLA III

Atomos neutros. Niveles fundamentales

Columna	S	S°	P	P°	D	D°	F	F°	G	G°	?	?°	X
I	33	—	—	32	13	—	—	—	—	—	—	—	4
II.	14	1	—	95	7	—	—	—	—	—	—	—	2
III	2	—	—	31	11	—	6	—	1	—	—	—	—
Tierras raras .	—	—	—	—	3	—	2	—	—	—	—	—	83
IV	7	—	38	—	11	—	43	—	—	—	—	—	15
V	—	17	2	13	5	35	9	—	—	—	—	—	29
VI	28	12	14	—	19	—	—	—	—	—	1	—	22
VII	10	—	2	11	11	—	—	—	—	—	—	—	8
VIII.	8	—	—	4	—	—	—	—	—	—	—	9	—
Grupo del Fe	—	—	—	1	23	—	28	—	—	—	5	—	24
Grupo del Co	—	—	—	1	12	—	50	—	4	—	—	—	25
Grupo del Ni	1	—	—	3	42	2	7	5	—	1	7	3	3

TABLA IV

Atomos ionizados. Niveles fundamentales

Columna	S	S°	P	P°	D	D°	F	F°	G	G°	H	?	?°	X
I	—	—	—	1	25	—	1	1	—	—	—	2	—	4
II.	18	—	—	26	2	—	—	—	—	—	—	—	—	3
III	9	—	—	9	29	—	5	—	2	—	—	1	—	—
Tierras raras .	—	—	—	—	13	—	3	1	—	—	—	—	—	3
IV	5	—	4	7	12	—	58	3	8	—	1	—	—	17
V	2	—	—	5	9	—	21	—	1	—	1	—	—	10
VI	—	—	—	—	28	—	—	—	—	—	—	—	—	38
VIII.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	—	—	—
Grupo del Fe	—	—	—	—	24	—	2	—	—	—	—	—	—	6
Grupo del Co	—	—	1	—	—	—	11	—	—	—	—	—	—	1
Grupo del Ni	—	—	—	—	—	—	23	—	2	—	—	—	—	—

TABLA V

Número de niveles fundamentales

Niveles	Atomos neutros	Atomos ionizados
S	103	34
S°	30	—
P	56	5
P°	191	48
D	157	142
D°	37	—
F	145	124
F°	5	4
G	5	13
G°	1	—
H	—	5
H°	—	—
?	13	2
?°	12	1
X	215	82

Del exámen del cuadro precedente resulta que los niveles pares tienen prioridad como niveles iniciales, puesto que.

Atomos neutros	$\Sigma l = 2n$:	479 líneas
» »	$\Sigma l = 2n + 1$:	276 »
» ionizados.	$\Sigma l = 2n$:	325 »
» »	$\Sigma l = 2n + 1$:	53 »

El cuadro VI contiene, distribuídas de acuerdo con sus características, la totalidad de las líneas últimas, que alcanzan a 1430.

TABLA VI

Líneas últimas	Atomos	
	Neutros	Ionizados
Clasificadas	730	375
Parcialmente clasificadas	25	3
Sin clasificar	215	82
Número total de líneas últimas	970	460

4. *Conclusiones.* — Se publica una tabla completa de las líneas últimas incluyendo todos los datos numéricos que han podido obtenerse hasta la fecha. En dicha tabla figuran las siguientes características: longitudes de onda, intensidades en el arco y en la chispa — en algunos casos en el tubo de Geissler — las series espectrales con sus características; las referencias concernientes a los resultados obtenidos por Gramont y otros autores en esta materia, y, finalmente, se mencionan: *a*) las líneas últimas que aparecen en los espectros de la llama descriptos por Wateville y por Gramont en el soplete oxiacetilénico y *b*) las líneas obtenidas por la fulguración eléctrica de las soluciones según los resultados obtenidos por Pollok y Leonard y por el autor.

Buenos Aires, Julio de 1938.

LA CORDILLERA PAYNE

Por GUSTAVO A. FESTER

En distintos puntos de la cordillera patagónica se notan, avanzados como centinelas hacia el este, potentes estoques lacolíticos, desde el Cerro San Lorenzo hasta el Monte Svea en Tierra del Fuego. Estos lacolitos, de edad infraterciaria, podemos considerarlos probablemente como apófisis del gran batolito patagónico, como ha sido comprobado por Feruglio ([1]) en el caso del Fitz Roy, compuesto de la misma roca granodiorítica, mientras que los otros cerros demuestran en parte una variedad bastante grande de rocas ácidas y básicas, es decir que representan una fase marginal de diferenciación del magma primitivo.

La acumulación mayor de tales cerros la encontramos en la comarca del Seno de la Ultima Esperanza, los estoques del Payne, Ferrier, Donoso y Balmaceda. Al oeste del último, desde el fjord, he observado por lo menos uno o dos cerros más, los cuales, por la forma de sus torres fantásticas revelan que pertenecen igualmente a la fila de los lacolitos. Los estoques de la zona en mención ya han sido examinados por Steinmann y Hauthal y especialmente Quensel ([2]) ha estudiado prolijamente las rocas del Balmaceda, Donoso y Payne, encontrando en el primero, principalmente monzonitas; en el segundo diorita cuarcífera y granito en el último. En enero del año 1937 he tenido la oportunidad de efectuar una breve visita al pie del Cerro Payne Este ([3]), mientras que los señores Zuck y Teufel del Club Alpino Alemán efectuaron la primera as-

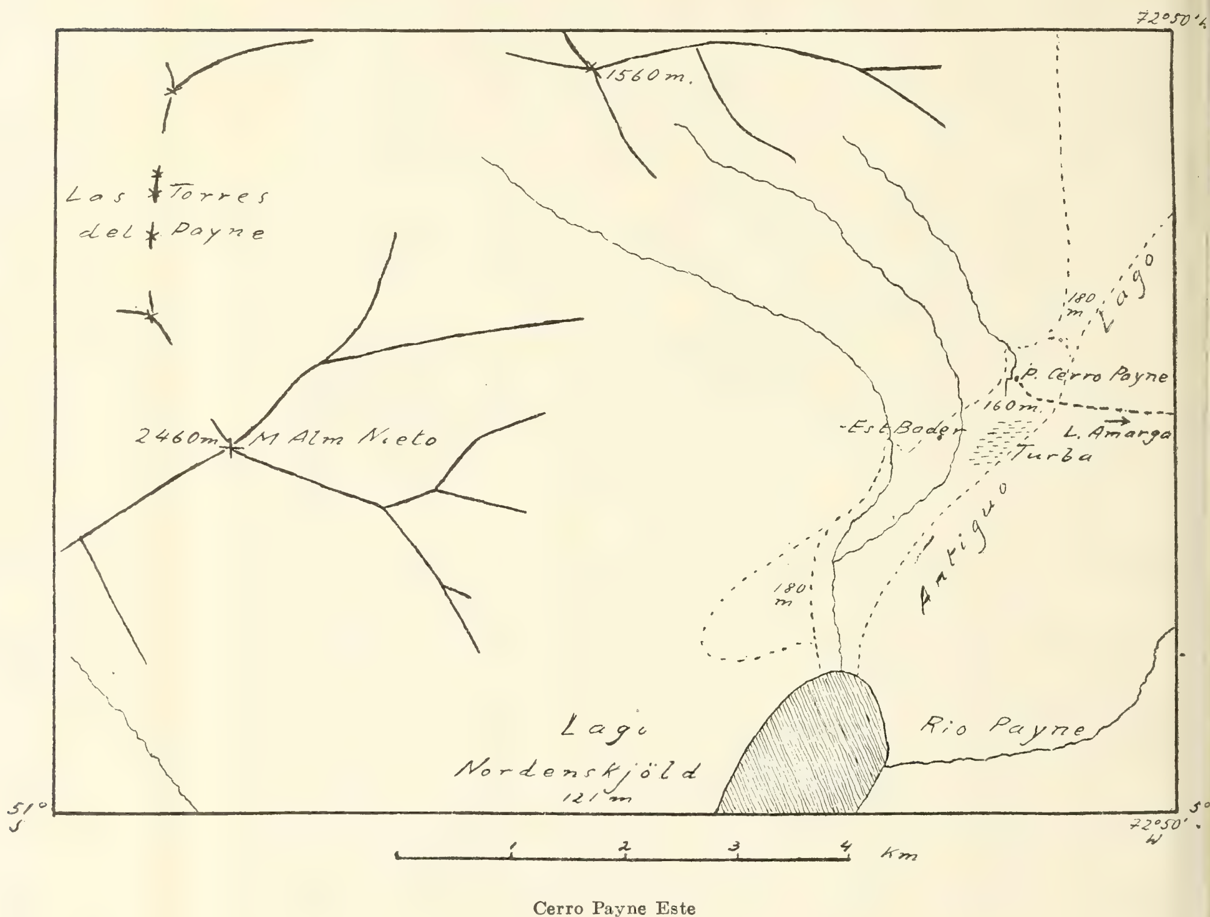
([1]) Artículo de I. Couci en Revista Minera, VII, pág. 76 y 97 (1935).

([2]) Bull. of the Geol. Inst. of Upsala, II, pág. 1 (1911).

([3]) Con los Sres. Dr. R. Jakob, de Buenos Aires; St. Zuck, de Munich, y H. Teufel, de Nuremberg. A los Sres. Almirante Francisco Nieto (Viña del Mar) y D. Sócrates Aguirre, Cónsul General de Chile en Buenos Aires, agradecemos las recomendaciones a las autoridades chilenas.

censión a esta cumbre, bautizándola con el nombre de « Monte Almirante Nieto ».

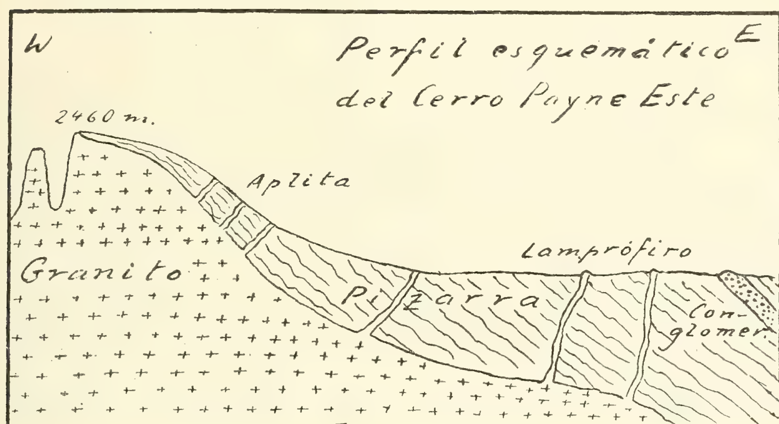
La Cordillera Payne es el más grande y más avanzado de los estoques lacolíticos. Abarca unos 320 km², semejándose a un castillo



Cerro Payne Este

medioeval gigantesco, no solo por sus torres pintorescas, sino por la serie de lagos que a manera de fosa la rodean; son en el norte y sur, los lagos Dickson, Nordenskjöld y Pehue, reunidos por el Río Payne, y el lago Gray al suroeste, de modo que solo al oeste-noroeste existe una coherencia con la cordillera principal. La Cordillera Payne, con sus numerosas cimas y torres, por un valle hondo, está dividida en una sección occidental y otra oriental. La primera, con el cerro principal, de forma característica de una montura, alcan-

za hasta 3246 m (3050 según otra indicación), mientras que la altura del Payne Este, de forma más bien trapezoédrica, por mis compañeros, ha sido determinada en 2460 m (Monte Almirante Nieto). A veces los autores hablan también de un « Cerro Payne Medio », pero las distintas torres de menor altura que lo constituyen, se consideran mejor como formando parte del macizo oriental. Por fin, las tres o cuatro « Torres del Payne » en sentido estricto, afamadas por las reproducciones fotográficas, son aquellas que se apoyan igualmente contra el Payne Este, pero prolongándolo en dirección NE, como surge del plano.



Quensel supone una edad postcretácea para la penetración, puesto que el plegamiento de los estratos devonianos parece previo a aquélla. Por otra parte, siendo la erosión muy avanzada, sostiene que el magma penetró en el terciario inferior. La roca intrusiva principal es un granito blanco, biotítico (superficialmente amarillento en las paredes rocosas), que encontré también en los bloques acarreados desde el circo entre Payne Este y sus torres. Este granito ha abovedado, y hasta cierto grado metamorfoseado la capa de pizarra senoniana (estratos de Inoceramus), la que se conserva todavía en varias partes, como por ejemplo del lado sur y este del « Almirante Nieto », alcanzando esta roca hasta la cumbre misma. El grado de metamórfosis es algo flojo y más bien físico que químico; el aspecto de esta pizarra filítica de color negro, a veces superficialmente alterado hacia el colorado, recuerda el de la roca de Ushuaia y no difiere mucho de las pizarras suprasenonianas normales de la Cordillera Prat. Solamente la cuarta torre lleva una « gorra » negra como

tinta, lo que demuestra una semifusión hasta roca córnea por el contacto, aunque la estratificación está todavía conservada (véase la foto).

Además mis coumpañeros trajeron de la cumbre más alta del « Almirante Nieto » una muestra de color verdoso y superficie áspera. Aparentemente se trata en este caso de una arenisca arcillosa metamorfoseada, sea de un banco intercalado o sea del horizonte más profundo del cretáceo, de la base concordante de las pizarras.

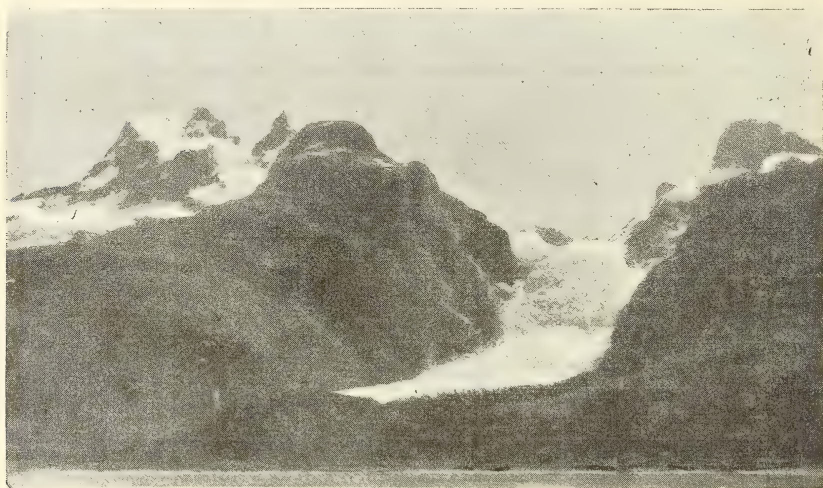


Fig. 1. — Monte Balmaceda desde el seno de la Ultima Esperanza. Lacolito de roca monzonítica. (Foto Dr. R. Jakob).

Paralelamente con la estratificación de la pizarra se notan en los cerros vetas múltiples, que según Quensel consisten en pórfido granítico y aplita. Tales vetas (filones-capas) anchas, aplíticas (una prueba demuestra el cuarzo « idiomórfico » característico) se notan también en la foto, en el lugar donde mis compañeros efectuaron la ascensión. En otros lugares, en la pared sur del cerro, se puede observar, como, las vetas desde la parte rocosa continúan como « Härtlinge » en la pendiente más suave de escombros. Si así en media altura del cerro vemos la parte ácida de las schizolitas, la parte básica, pesada se nota en el antepaís más abajo. Aproximadamente a un km de distancia desde el pie del cerro aparece un « Härtling » de roca gris obscura, lamprofírica, una spessartita de plagioclasa con hornblenda parda; este filón-capa corre más o menos en dirección SW-NE, paralelamente con los estratos sedimen-

tarios. Quensel describe también vetas de essexita en el antepaís, pero las que no se notan al pie del « Almirante Nieto ». Algo de mineralización (pirita) he visto cerca de la quebrada, donde sale el arroyo que viene del circo y relativamente rica parece otra veta con antimonio, que se encuentra más cerca del Payne Oeste.

El carácter de la pizarra, negra o bandeada, en la quebrada mencionada ya es casi normal. Hacia afuera sigue todavía un plegamiento bastante fuerte (con el eje SW-NE hasta submeridional de



Fig. 2. — Cerro Payne Este (Monte Almirante Nieto) y Torres del Payne desde la Laguna Amarga.

acuerdo con el empuje general desde el W), lo que se nota en la quebrada del Río Payne, cerca del puente colgante del camino a Laguna Amarga; recién a partir de la Cordillera Prat hacia afuera, las ondulaciones se vuelven más suaves. Uno de los « Härtling » cerca del camino al oeste del puente, que demuestra igualmente una inclinación fuerte hacia el E, consiste en un conglomerado similar a el que forma los estratos de la cueva del Gryppotherium.

Morfológicamente notamos la influencia de la roca sedimentaria de tal manera, que la figura hongueiforme del lacolito en cierto grado ha sido conservada en la periferia, donde los estratos, siempre más potentes hacia afuera, de la pizarra dura, químicamente poco atacable, han desplegado su efecto protector. Naturalmente, la pendiente pizarrosa, de unos 50° de inclinación, está surcada por canaletas múltiples entre crestas afiladas, pero sin que la erosión

por el agua de lluvia o nieve derretida llegara todavía al núcleo granítico. Hacia la cúspide del lacolito, en contraposición, la capa pizarrosa, en sí más delgada, en muchas partes ya está eliminada, de modo que la erosión en el material magmático, químicamente muy atacable, podía trabajar hacia la profundidad. La dirección de este trabajo erosivo por lo general era casi perpendicular, es decir una erosión sin mayor denudación, lo que se explica por los hechos de que el plano primitivo de ataque era casi horizontal, que el granito en sí



Fig. 3. — Las Torres del Payne y la cresta N.E. del Monte Almirante Nieto. A la izquierda vetas de aplita en la pizarra obscura. (Foto del Dr. R. Jakob).

ya tiende a un agrietamiento vertical que las aristas, por los restos de la capa pizarrosa, estaban protegidas contra un amortiguamiento; el fenómeno en total es comparable a el de la formación de columnas en material terroso y loésico. Así se explica la descomposición de la forma primitiva del lacolito en este número grande de paredes y torres maravillosas; por ejemplo, las tres « torres » centrales del Payne Este tienen por todas partes paredes prácticamente verticales, mientras que la cuarta, exterior, del lado NE está todavía achatada por su cubierta de pizarra córnea. Las tres primeras, podemos considerarlas como una clase de montes « testigos », estando ya eliminado el material rocoso entre ellas y el macizo principal, quedando un circo o « caldera » tan profunda que la gente de la zona habla de un « cráter ».

La glaciación actual de la Cordillera Payne es muy modesta, no

solo en comparación con la pleistocénica, sino también se notan en la caldera indicios de una regresión muy reciente; solo inmediatamente debajo de las torres quedan todavía restos de un glaciar mayor. En las paredes del macizo mismo del « Almirante Nieto », fuera de las canaletas con « firn » y hielo, observamos algunos glaciares colgantes y uno que se podría considerar del tipo « regenerado », en el surco entre la pared oriental y el zócalo que es de formas más suaves.

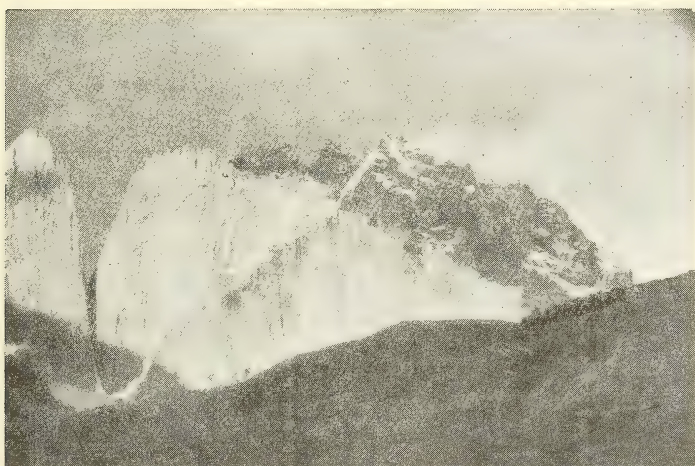


Fig. 4. — Tercera y cuarta torre del Payne. Granito claro con « gorra » de roca córnea.

La determinación del límite de nieve resulta algo difícil, por el deslizamiento del «firn » y hielo en las canaletas de inclinación fuerte, pasando hacia debajo del límite « natural ». Sin embargo, la altura de la primera terraza casi horizontal, cubierta de nieve, fué determinada en 1250 m, por los señores Zuck y Teufel, de modo que podemos aceptar esta altura como límite aproximado.

La glaciación pleistocénica, en la latitud del Payne, se extendía según Caldenius ([4]), en la época inicioglacial, por la depresión del Río Coyle casi hasta el meridiano 71, quedando después del regreso, endicado por morenas « gotiglaciales », un lago grande hasta el meridiano 72, y luego, por el endicamiento « finiglacial », varios la-

([4]) *Las glaciaciones cuaternarias en la Patagonia y Tierra del Fuego,* Dir. Gen. de Minas y Geología. Publicación N° 95, 1932.

gos de menor tamaño. A estos pertenecía, fuera del lago Sarmiento y de la Laguna Azul (algo mayores que en la actualidad), uno bastante extenso, que abarcaba el Lago Nordenskjöld y la Laguna Amarga. Con la sequía progresiva del clima, las partes de fondo relativamente elevado de este lago quedaron en seco, vaciándose además, por fin, las cuencas superiores hacia el Lago Nordenskjöld, sea directamente por una brecha de erosión o sea indirectamente por el Río Payne. Las últimas fases del lago seco, que se notan por las te-

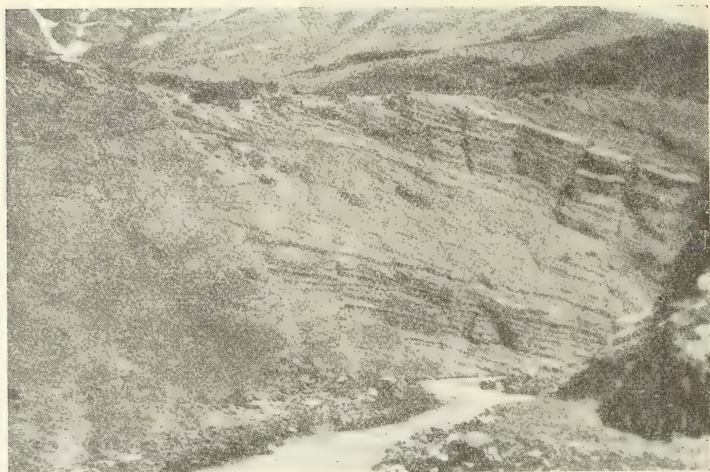


FIG. 5. — Quebrada al pie del monte Almirante Nieto, con pizarra cretácea.

rrazas al pie ESE del Payne, están indicadas en el croquis; fuera de la Laguna Amarga, hoy, no queda más que una laguna residual, chica, cerca del Puesto Payne, donde la turbera remanente se adosa contra la terraza, y otra un poco más al norte. El fondo turboso y el plano del Puesto Payne, que corresponde a la última fase del lago seco, lo he determinado en 150-160 m de altura y el fondo de la fase anterior, las terrazas más al norte y más al sureste, en 180 m, mientras que el espejo del Lago Nordenskjöld actualmente se encuentra en 121 m sobre nivel del mar. La forma algo curiosa de todas estas cuencas de lagos, es decir la extensión « periférica » de las lenguas del antiguo glaciar piedmont en su última fase, se relaciona probablemente con la dirección general de los estratos NE - SW, a la cual la extensión del hielo y el trabajo erosivo se produjo más o menos paralelamente.

La regresión del hielo que del lado E y S del Payne se nota tan fuertemente, está relacionada con una cierta sequía del clima. Podemos considerar el Payne como un límite climático de primer orden e indudablemente hay que corregir al respecto el mapa de Knoche ([5]) cuya línea de pluviosidad de 3000 mm pasa aproximadamente por la pendiente E del macizo del Payne. No existen medidas exactas pero según las indicaciones de la gente de la zona, la pluviosidad sería menor que en Magallanes, donde no hay más que unos 500



FIG. 6. — Veta lamprofírica en el antepaís del cerro Payne.

mm. Además, el carácter medio xerófito de la vegetación ya nos indica la cercanía de la zona estépica, pasando el límite horizontal de los bosques, ya pobres al pie del macizo, más o menos por la orilla del Río Payne y encontrándonos cerca de la Laguna Amarga ya en plena estepa patagónica. Esta, forma una clase de lengua avanzada hacia el W, que corresponde al promontorio de la alta cordillera, avanzando hacia el Este o sea el maciso de la Cordillera Payne. El Payne actúa entonces como un segundo condensador detrás del hielo patagónico, el que ya por sí solo en la latitud del grado 51 tiene un máximo de extensión transversal, de modo que el antepaís al ESE del Payne reciba una cantidad muy pequeña de precipitaciones. La cumbre del «Almirante Nieto» frecuentemente

([5]) *Zeitschrift d. Gesellschaft f. Erdkunde z.*, Berlín, 1929, pág. 208.

está despejada por completo, mientras que se notan acumulaciones de nubes en la punta del Payne Oeste y la comarca del Balmaceda, al mismo tiempo queda totalmente envuelta. Teniendo en cuenta, que asímisma Magallanes se encuentra sobre el límite de los bosques, podemos suponer, que la isohieta de 500 mm valga también para el pie del Payne Este.

A la escasez de la vegetación contribuye todavía, fuera de factores pedológicos, la evaporación viva con relación a la fuerza del



Fig. 7. — La quebrada del río Payne con pizarra cretácea.

viento del cuadrante W, aunque el Payne mismo protege hasta cierto grado, por ejemplo en comparación con la comarca del Río Toro. Por otra parte, el huracán que se levanta por la tarde, cerca de la cumbre del « Almirante Nieto », es tan fuerte, que casi se produce un accidente fatal a mis compañeros, proyectándolos por algunos metros.

Las nubes, de tipos cumulus, en estos días de calma relativa en la parte baja, quedaron estiradas en forma de aeronaves fantásticas una vez que alcanzaron a mayores alturas. Cerca del puesto mismo a veces se producía un viento de compensación desde el E, es decir, en total, hay una turbulencia enorme de la atmósfera en toda esta zona, la que fué también la causa del accidente fatal del aviador Plüschow en 1931.

Las pendientes de los contrafuertes E del Payne (Cota 1560),

tienen, fuera de un poco de Nothofagus betuloides, todavía bastante de N. Pumilio, árbol algo exigente en cuanto al suelo, es decir, ni crece en roca o escombros, ni en suelos turbosos. Por lo demás predomina N. antarctica, tanto sobre el terreno de escombros y morenas al pie de la cresta NE, donde mis compañeros iniciaron la ascensión, como cerca del Puesto Payne en el terreno rocoso o turboso, volviéndose los árboles ya paulatinamente enanos. Mientras que Nothofagus Pumilio solo raras veces toma la forma enana, la especie



Fig. 8. — Estrato de conglomerado cretáceo en el antepaís del cerro Payne.

antarctica, arbustera, por lo general constituye el borde superior de la selva, notándose éste en líneas zig-zag con relación a los surcos de la pendiente y prefiriéndose para subir el lado oeste de ellos, por ser protegido contra el viento. En el pie de escombros del Payne mis compañeros encontraron un límite superior de la selva de 550 m y de 600 m para la forma arbustera, pero para pendientes más suaves de la zona se puede suponer un límite de 800 m sobre el nivel del mar, de acuerdo con mis mediciones en la Cordillera Prat, vecina.

En cuanto a la otra flora, el calafate cerca del puesto ya indica una comarca relativamente seca, como igualmente la divulgación del cardo intruso. Entre las plantas herbóreas notamos entre otras alverjillas, Viola tridentada, Pernettya mucronata y Calceolaria nana. En la turbera faltan los musgos del género Sphagnum, que necesitan aparentemente un cierto movimiento del agua; aquí se trata

de Brachythecium turgens y un Bryum ([6]) en mezcla con gramíneas, ciperáceas, juncáceas, etc.

Por la violencia del viento y la falta de suelo apropiado, la agricultura en casi toda la zona chilena no es posible y solamente en pocos lugares como cerca de la ciudad de Magallanes se cultiva algo de avena como forraje. Donde hay protección contra el viento, natural o artificial por planchadas, se cultivan hortalizas para el consumo propio, así como en el Puesto Cerro Payne: papas, repollo, lechuga y zanahorias. La vida económica ([7]) se cubre por completo con la cría de animales, especialmente de lanares. El terreno es casi siempre de propiedad fiscal y arrendado a grandes compañías. Del lado norte de la Cordillera Payne hay algunos pequeños arrendatarios en la orilla del Lago Dickson, mientras que en la zona sur y este se reparten la Cía. Río Payne (60-70.000 lanares), las estancias pequeñas Pudeto y Baader y la estancia grande Cerro Guido (60.000 lanares) que pertenece a la Cía. Explotadora de Tierra del Fuego. En el Puesto Cerro Payne de esta última compañía, hay uno o dos ovejeros que cuidan de los animales, es decir las más grandes estancias se conforman con unos veinte hombres de personal fijo, elevándose este número solamente en la época de esquila a unos cincuenta aproximadamente.

([6]) La determinación de los musgos agradezco a los Profesores Dres. Herzog y Paul en Jena.

([7]) Compárese el artículo del autor, *Wirtschaftsgeographie Südpatagoniens, Territorio de Magallanes*, en Petermanns geographische Mitteilungen, 1933, pág. 9 y 73.

SOBRE VARIOS RESTOS DE OSOS DE LA FAUNA ENSENADENSE

Por CARLOS RUSCONI

I

Los arrecifes del río de la Plata, especialmente aquellos que se encuentran frente a las estaciones Olivos - Anchorena, han sido recorridos por numerosos investigadores y coleccionistas, y gracias a los cuales se ha podido llegar a conocer de esos terrenos, una variada fauna de mamíferos, aves, reptiles, etc., en su casi totalidad extinguidos. La existencia de grandes osos tampoco era desconocida puesto que Bravard los coleccionó hace tres cuartos de siglo, pero en cambio, los de pequeña talla habían quedado ignorados hasta hace poco en la región citada (1) como así también en el mismo nivel de otros lugares del país. Por eso he creído útil ocuparme aquí: 1º, de una tibia completa de un pequeño oso del piso ensenadense; 2º, de otro trozo tibial, también de pequeña talla, procedente de Miramar; y 3º, de un astrágalo de un gran oso del piso ensenadense.

II

Sobre los osos extinguidos se han ocupado muchos autores: Bravard, Burmeister, Gervais, los hermanos Ameghino, Kraglievich, Rusconi, etc. Los géneros mejor conocidos son *Arctotherium* y *Pararctotherium*, siendo más problemáticos *Proarctotherium* y *Chapalmalania*. Las especies del primer género son todas de gran talla; *A. latidens, A. Candiottii, A. bonaerense,* mientras que tienen tamaño mediano las de *Paractotherium*.

(1) Con excepción del dato de AMEGHINO, quien, en 1909, p. 122, citó a *Pararctotherium enectum* en la fauna ensenadense. Los argumentos de que se valió este sabio los ignoro.

El genotipo de *Pararctotherium enectum* fué fundado por F. Ameghino en 1904, p. 120, sobre una mandíbula procedente de la parte inferior del piso bonaerense de las ciudad de Buenos Aires. En la página siguiente nuestro sabio dió a conocer su especie *P. pamparum,* refiriendo a ésta una mandíbula que, años después fué utilizada por Kraglievich (1928, p. 38), como tipo de un subgénero y especie nueva que denominó (*Pseudarctotherium debilis*). Finalmente en uno de sus trabajos póstumos (1934, p. 69), este último autor dió a conocer una nueva subespecie (*Pararctotherium pamparum crassidens*), procedente del pampeano superior de Quequén Salado. En esta publicación Kraglievich manifestó que *Pseudarctotherium* no había sido hallado en la fauna ensenadense, pero en base a las noticias que doy más abajo no me es posible ya compartir de esa opinión.

Arctotherium (Pseudarctotherium) debilis Kragl.

Se trata de una tibia completa del lado derecho, nº 771 de la col. Paleontológica Rusconi, recogida por mí sobre los arrecifes del río de la Plata, y al norte de la estación J. B. Anchorena, piso ensenadense, plioceno superior.

Su magnitud es comparable a la tibia de un oso pardo (*Ursus arctos*) hembra pero se distingue por su notable robustez y por otros detalles anatómicos (fig. 1 *a, b* y *c*).

La superficie articular proximal muestra más o menos las mismas características de las del oso pardo con la diferencia de que la carilla que articula con el cóndilo interno del fémur es menos cóncava transversalmente que la del oso actual mencionado. Los bordes posteroexterno y posterointerno del tercio superior de la diáfisis son mucho más robustos pero este último margen, o sea donde se inserta el músculo poplíteo, resulta ser muy redondeado y dispuesto en un plano más atrás que en el de la especie actual, de tal modo que, vista la diáfisis en sección transversa y a unos 5 centímetros debajo de la superficie proximal, se advierte que la del fósil describe la figura de un triángulo obtuso y de un triángulo isosceles en la del oso pardo. Entre ambos márgenes laterales se observa un gran surco situado en el tercio superior que es muy profundo, más amplio y colocado sobre el eje de la tibia, mientras que en *U. arctos* no es tan amplio y además se halla algo desplazado hacia el lado externo.

La carilla distal es mucho más amplia que la de *U. arctos.* Comparada con la de *Tremarctotherium californicum* ilustrada por Me-

rriam y Stock en 1925 (lám. X, fig. 1 *b*) resulta ser también algo más ancha con la diferencia de que el labio externo de esta superficie, o peroneal, es menos puntiagudo.

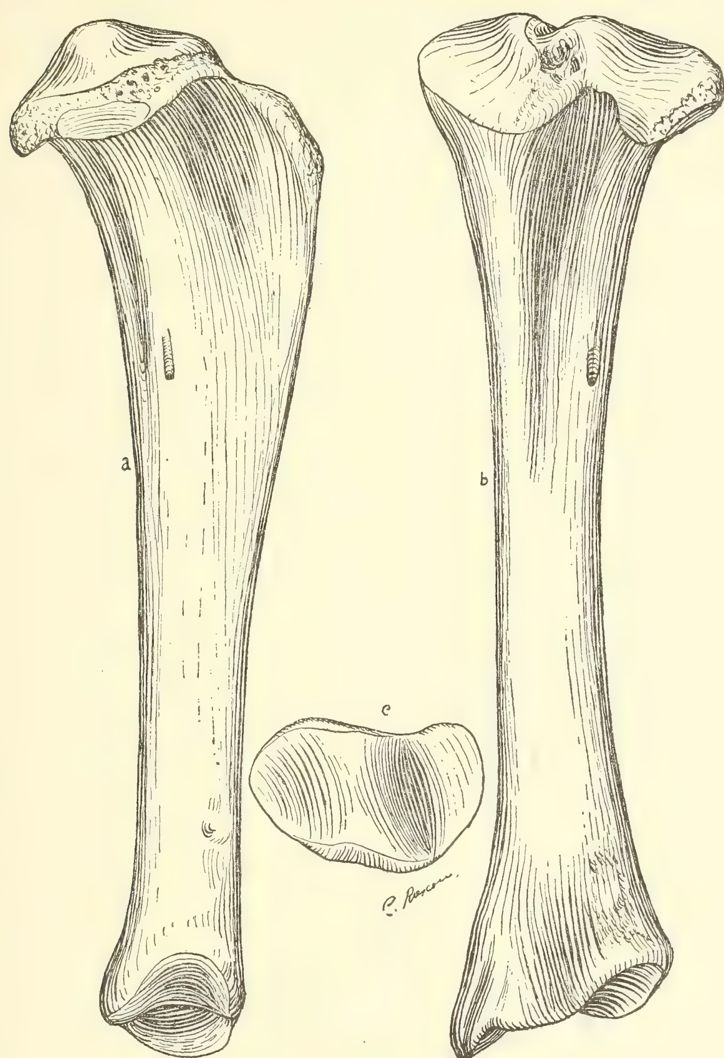


Fig. 1. — Tibia del lado derecho de *Arctotherium* (*P.*) *debilis* Kragl. Vista por el lado externo, atrás y de abajo, reducida a la mitad (1/2).

Por relación a la longitud craneana y otros pormenores se sabía que *Pararctotherium* es un género de mediano tamaño y más o menos como *Pseudarctotherium*. Ahora los nuevos restos vienen a co-

rroborar esa opinión; pues, la distancia de los incisivos hasta el cóndilo occipital de *Pararctotherium pamparum,* según Ameghino, es de 320 y de 200 el ancho bicigomático; un cráneo de *Ursus arctos* hembra de mi colección zoológica, mide 320 y 190 respectivamente. La tibia de este mismo animal mide 280 y la pieza fósil Nº 771 tiene tan sólo 275 milímetros de longitud, o sea un poco más pequeña todavía.

El descubrimiento inesperado de esta tibia de reducidas proporciones en un lugar donde se encuentran comunmente despojos fósiles del piso ensenadense y justificada además por su fosilización idéntica a la de los huesos que se extraen de los arrecifes del río de la Plata, necesariamente, renovará la contravertida discusión acerca de la posición estratigráfica de los pequeños osos en sedimentos de este nivel geológico, que como *Pseudarctotherium* constituía hasta hace poco, un caso desconocido en la fauna ensenadense. De mi parte estoy dispuesto a creer con mayor seguridad en la presencia de ese subgénero dentro del nivel inferior de la formación pampeana y no en la existencia del género *Pararctotherium.* Claro que esta opinión nada favorece a la vertida por el señor Cabrera, quien sostuvo la tesis de que *Pararctotherium* habría sido fundado con un ejemplar hembra y *Arctotherium* sobre un resto de distinto sexo, lo que venía de ese modo a anular el primer género de Ameghino. Poco tiempo después (1932, p. 97), expresé mi disconformidad al respecto y ahora observo en un trabajo póstumo de Kraglievich ,1934), que al exponer este autor mejores argumentos viene a poner término a este asunto, al demostrar que *Arctotherium* es genéricamente distinto de *Paractotherium,* precisamente como lo han creído así los hermanos Ameghino, Kraglievich, Castellanos, Matthew, Parodi, Rusconi y otros autores.

III

En una de sus recientes excursiones por Miramar, el señor L. J. Parodi ha podido descubrir un resto tibial de otro pequeño oso en la parte superior de la barranca situada entre el Durazno y el Cañadón y en un terreno con ciertas características del chapadmalense.

La tibia corresponde a la parte distal y tiene aproximadamente el mismo volumen que la de *Arctotherium* (*Pseud.*) *debilis,* lo que me hace presumir que el hueso en estado completo debió alcanzar una magnitud parecida o un poco mayor. El maléolo tibial es levemente más robusto y son más excavados los surcos por los cuales pasan el

tibial posterior y el flexor común de los dedos del pie. Este último canal está limitado por una cresta elevada y entre ésta y el borde externo de la tibia se advierte una amplia depresión central que representa la corredera para el flexor propio del dedo grueso.

También es un poco más robusta en sentido anteroposterior y la cresta central de la superficie articular astragalo-tibial es algo más oblícua que en la tibia de *Pseudarctotherium debilis* del ensenadense. Por las pocas diferencias anotadas y unidas además a la magnitud casi igual al mismo hueso antes mencionado, me inclino a creer que esta pieza debió pertenecer mucho más al subgénero *Pseudartotherium* que a *Chapalmalania*. Esta última forma, muy deficientemente conocida, ha sido fundada por Ameghino con una porción de premaxilar provista de cuatro dientes incisivos que, según las escuetas noticias dadas por ese paleontólogo y la ilustración ofrecida por Rovereto en 1914, indican a todas luces la presencia de un animal de gran talla comparable al de las grandes especies de *Arctotherium*.

	Arctholerium (*Pseud.*) ? *debilis* Kragl. (nº 771 col. Rusconi)	*Tremarctotherium simum* (según Merrian y Stock, 1925)	*T. californicum* (según M. y Stock, 1925)	*Arctotherium bonaerense* (según P. Gervais)	*Ursus spelaeus* (según P. Gervais)	*Ursus arctos* ♀ (nº 327, col. Rusconi)
Longitud total de la tibia medida por el lado externo	275	387,6	404	320	310	280
Ancho máximo de la extremidad proximal	82	110,1	110,7	—	—	74
Diámetro transverso en la mitad de la diáfisis	29	37	40,7	—	—	23
Diámetro ant. post. de la diáfisis . .	32	41,8	41,6	—	—	27
» máximo distal	58	85,6	88,4	—	—	52
» máximo ant. post. distal .	37	51	52	—	—	34

IV

Arctotherium? latidens Brav.

Los astrágalos de los grandes osos son también escasos y en el Museo de Buenos Aires recuerdo haber visto varios de ellos de distintos tamaños que no han sido debidamente estudiados, y menos puedo hacerlo ahora por motivos conocidos.

El primer autor que describió e ilustró el astrágalo fósil de un supuesto oso fué P. Gervais en 1855 (vol. II, p. 9), lám. IV, fig. 2). Dicho investigador dijo que ese hueso era más robusto que el del oso pardo y se diferenciaba además por diversos otros caracteres anatómicos. Años después (1864), vol. I, p. 145), Burmeister sostuvo que el mencionado astrágalo y los cuatro metápodos referidos por Gervais a un oso (*Ursus bonariensis*) pertenecieron, por el contrario, a *Smilodon*, o sea al *Machaerodus* de Burmeister. Ameghino, en 1904 (p. 448) ratificó en un todo la observación de Burmeister con respecto al astrágalo y a la cual también me suscribo en vista de que el dibujo de este último hueso dado por Gervais no deja lugar a duda de su similitud con el de los grandes tigres extinguidos de América.

Ameghino es pues quien por primera vez, se ocupó con atención del astrágalo de uno de nuestros grandes osos procedentes del ensenadense y que refirió a *Arctotherium bonaerense*. Ahora bien, como en la colección del señor Hennig se conservan varios restos de estos animales y entre ellos un lindo astrágalo que difiere algo del figurado por Ameghino en 1904, es por eso que daré las características principales de dicha pieza y que referiré provisoriamente a *Arctotherium latidens* Brav.

La pieza de la colección de Hennig procede del piso ensenadense y recogida sobre los arrecifes del río de la Plata, tal vez al norte de la estación Anchorena; su tamaño es comparable al de *A. bonaerense.*

Vista superior. — La superficie articular de la cabeza astragalar de *A. latidens* (fig. 2*a* y *b*), se extiende mucho más arriba originando de ese modo un cuello más corto. En la mitad de la longitud del borde interno del astrágalo se advierte una profunda entrada o muesca que coincide con la superficie más excavada de la faceta sus-

tentacular, mientras que en *A. bonaerense* (fig. 3 *a* y *b*) no existe dicho detalle o es poco aparente. El labio externo de la tróclea muestra una superficie plana en sentido transversal como en *Ursus arctos*, pero el dibujo de *A. bonaerense* indica la presencia de una suave corredera secundaria que da origen a una superficie algo sinuosa

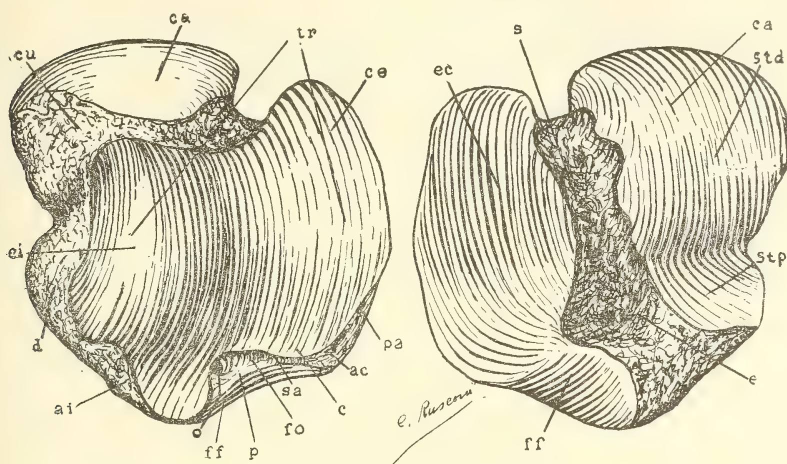


Fig. 2. — Astrágalo del lado derecho de *Arctotherium latidens* Brav.: *a*) visto por arriba, y *b*), visto por abajo, a la mitad del natural (1/2).

ac. — Tuberosidad de la inserción del ligamento astrágalo-calcaneal posterior.
ai. — Tuberosidad para la inserción del ligamento astrágalo calcaneal interno.
c. — Línea indicando el límite posterior de la superficie articular tibio-calcaneal.
ca. — Cabeza del astrágalo.
ce. — Cóndilo externo de la tróclea articular.
ci. — Cóndilo interno de la tróclea articular.
cu. — Cuello del astrágalo.
d. — Superficie de inserción del ligamento deltoides.
e. — Entrada posterior o proximal del surco del seno del tarso.
ec. — Faceta ectal.
ff. — Nueva corredera del flexor del dedo grueso.
fo. — Fosa ligamental.
p. — Puente.
pa. — Superficie de inserción del ligamento penoneo-astragaliano posterior.
s. — Surco del seno del tarso en el que se aloja el ligamento interóseo.
sa. — Surco arterial.
std. — Faceta sustentacular distal.
stp. — Faceta sustentacular proximal.
tr. — Tróclea articular tibio-astragaliana.
U. — Perforación vascular para la nutrición del astrágalo.

en sentido transversal. El labio externo troclear de este hueso finaliza hacia adelante en una línea de frente plano y no puntiaguda como en *A. latidens*. Igualmente se advierte una pequeña diferencia

en la parte posterior de la corredera que en esta última especie termina hacia atrás formando un labio muy destacado.

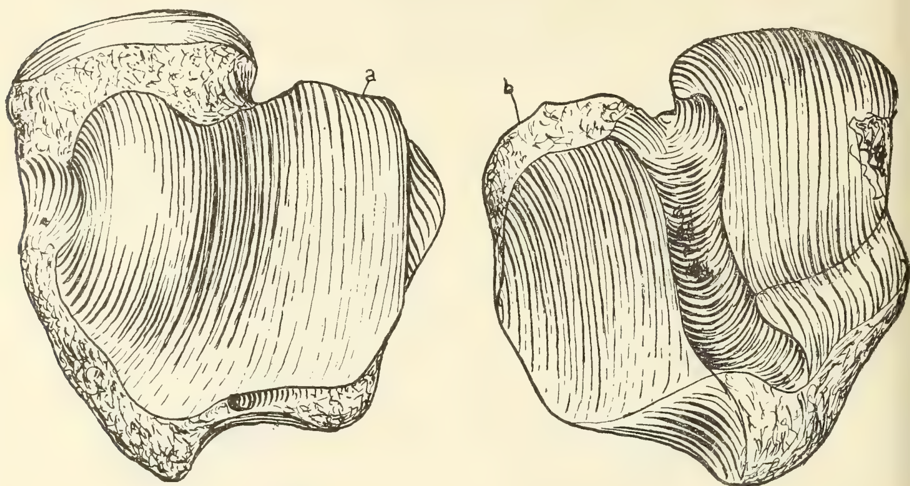


Fig. 3. — Astrágalo del lado derecho de *Arctotherium bonaerense* Gervais: *a*) visto por arriba, y *b*) visto por abajo, a dos tercios del natural ($^2/_3$).

Vista inferior. — Hay pocas diferencias entre la faceta ectal de *A. bonaerense* y la de *A. latidens;* sin embargo, en esta última forma se ve una superficie convexa situada en el margen posterointerno de dicha carilla, o sea, en el borde que limita con la corredera suplementaria (f. f.) En la pieza ilustrada por Ameghino no se descubre ese detalle e ignoro si la pieza lo poseía o es simplemente un defecto del dibujo. Lo restante de la faceta ectal de *A. latidens* es de superficie cóncava en sentido anteroposterior y casi plana transversalmente, como en *U. arctos,* con la diferencia de que la de este último animal muestra una excavación más pronunciada lateralmente.

La faceta sustentacular aparece dispuesta en dos planos: la sección anterior y la más amplia, muestra en general una superficie convexa anteroposteriormente y casi plana en sentido transversal, sobre todo en aquella región que está en contacto con el calcáneo. Dicha faceta preséntase limitada anteriormente por un surco que desde el lado interno del astrágalo se dirige oblicuamente hacia adelante y adentro; la porción más avanzada de esta línea corresponde a la faceta propia de la cabeza astragalar. Ambas facetas forman una sola carilla en su margen interno o límite con el surco del seno

del tarso, pero en *U. arctos* (fig. 4 *a* y *b*) aparecen interrumpidas debido a la existencia de una amplia depresión destinada a inserciones musculares. La segunda sección de la faceta sustentacular es pequeña y muestra una superficie suavemente excavada, casi plana.

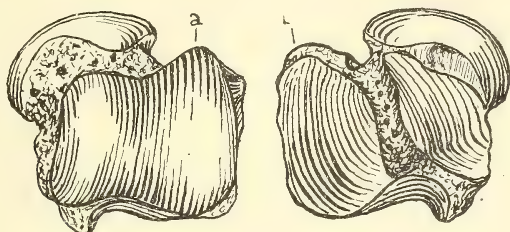


FIG. 4. — Astrágalo del lado derecho de *Ursus arctos*: *a*) visto por arriba, y *b*), visto por abajo, a dos tercios del natural (2/3).

El *sulcus tali* tiene mucha profundidad, siendo de superficie rugosa y en su tercio posterior se advierten algunas perforaciones que comunican con la masa ósea del hueso.

Vista posterior. — Lo primero que se destaca es la carilla (f.f.) por la cual corre el tendón del músculo flexor del dedo grueso. Dicha carilla es convexa de arriba abajo y cóncava lateralmente como en *A. bonaerense,* pero la de *Ursus arctos* resulta ser muy profunda y también bastante más angosta proporcionalmente al volumen de ambos astrágalos. Entre el margen superior de esta carilla y el borde posterior de la corredera troclear aparece el agujero astragalar que tiene 2 milímetros de diámetro y tan sólo de un milímetro en el oso actual mencionado. El margen interno, o sea el que mira hacia el eje del esqueleto, de la mencionada carilla forma con el borde interno del astrálago un triángulo de línea más recta y cuyo vértice aparece en un punto que coincide con el eje central de la corredera troclear, pero en *U. arctos* dicho vértice se encuentra mucho más desplazado sobre el labio troclear interno.

Vista lateral externa. — La faceta que articula con el peroné muestra una disposición parecida a la del oso actual con la única diferencia de que en la del fósil resulta ser más corta y menos alta en proporción al volumen astragalar.

Referente a la tibia nº 771, estoy dispuesto a considerarla como *Arctotherium* (*Pseudartotherium*) *debilis* Kragl., y en consecuencia,

es el primer vestigio positivo de osos extinguidos de pequeño tamaño que se descubren en niveles inferiores de la formación pampeana, correspondiente al plioceno superior, tal como lo he colocado en un reciente trabajo (1927, p. 354). En cuanto al fragmento tibial Nº 455 procedente de Miramar, lo refiero con mucha duda a la mencionada especie en vista de las pequeñas diferencias anatómicas observadas y además por la inseguridad del piso geológico en que ha sido hallado; pues por el aspecto de la fosilización y de otros antecedentes que poseo, parecen indicar que el terreno que lo contenía corresponde a la parte superior del chapadmalense. En caso contrario, el resto en cuestión debe tener una antigüedad ensenadense. Con respecto al astrálago, supongo que se trata de la especie *Arctotherium latidens,* por lo menos me parece distinto al otro astrángalo que Ameghino describió como *A. bonaerense.* Bien pudiera ocurrir también un caso inverso, es decir que el hueso en cuestión descripto por mí correspondiera a la especie descripta por Gervais y a la especie *latidens* la mencionada por Ameghino, en vista de que las piezas tipos están basadas sobre otros huesos del esqueleto y además por el insuficiente material conocido hasta ahora.

Medidas del astrágalo	*Arctotherium* L. *Latidens* Brav.	*Ursus arctos* nº 327, col. Rusconi
Diámetro anteroposterior máximo	84	38
» transverso máximo.	83	42
» » de la cabeza	51	29
Distancia entre ambos lados externos de la tróclea .	64	33

Bibliografia

Ameghino, F., *Nuevas especies de mamíferos, cretáceos y terciarios de la República Argentina,* en *Anales de la Soc. Científica Argentina,* pp. 1-142 del separado, Buenos Aires, 1904.

Ameghino, F., *La perforación astragaliana en los mamíferos no es un carácter originariamente primitivo,* en *Anales del Museo de Hist. Natural,* vol. XI, pp. 349-460, Buenos Aires, 1904.

Gervais, P., *Recherches sur les mamifères fossiles de l'Amérique Méridionale,* en *Expédition dans les parties Centrales de l'Amérique du Sud,* vol. II, París, 1855.

Burmeister, G., *Anales del Museo Público,* vol. I, 1864.

Kraglievich, L., *Los artoterios norteamericanos* (*Tremarctotherium, n. gen.*) *en*

relación con los de Sud América, en *Anales del Museo de Hist. Natural*, vol. XXXIV, pp. 1-16, Buenos Aires, 1926.

KRAGLIEVICH, L., *Contribución al conocimiento de los grandes cánidos extinguidos de Sud América*, en *Anales de la Soc. Científica Argentina*, vol. CVI, pp. 1-46 del separado, Buenos Aires, 1928.

MERRIAM, J. C., y CHESTER STOCK, *Relationships of the Short-faced Bear, Arctotherium, from the pleistocene of California*, en *Contributions to Paleontology from the Carnegie Inst.*, pp. 1-35, Wáshington, 1925.

RUSCONI, C., *Sobre un húmero de Arctotherium y otro de Felis de la formación pampeana*, en *Anal. Mus. Hist. Natural*, vol. XXXIV, pp. 279-297, Buenos Aires, 1927.

RUSCONI, C., *Sobre una mandíbula de Arctotherium descubierta en las excavaciones del subterráneo Lacroze*, en *Rev. de Medicina y Veterinaria*, vols. XV-XIX, pp. 93-98, Buenos Aires, 1932.

RUSCONI, C., *La vida animal a fines del terciario superior de Buenos Aires*, en *El Monitor de la Educación Común*, vol. LII, pp. 3-65, Buenos Aires, 1933.

RUSCONI, C., *Contribución al conocimiento de la geología de la ciudad de Buenos Aires y sus alrededores y referencia de su fauna*, en *Actas de la Academia de Ciencias en Córdoba*, vol. X, pp. 177-384, Buenos Aires, 1937.

BIBLIOGRAFIA

Actualités Scientifiques et Industrielles. — Folletos 16 ½ cm. × 25 ½ cm.) editados por Hermann & Cía., París. Número de páginas y precios variables. Se detallan a continuación los últimos remitidos a la Academia Nacional de Ciencias.

Nº 555. — Husson (Raoul), *Principes de Metrologie Psychologique.* 82 páginas, 20 francos. 1937.

Fascículo I de la serie «Psychologie Appliquée», dirigida por J. M. Lahy, director de Estudios en la «Ecole Pratique des Hautes Etudes» y en la Universidad de París. Ha escrito el prefacio de este trabajo cuyo autor, ex alumno de la Escuela Normal Superior, es también asistente de psicología aplicada en la Escuela nombrada más arriba y, además, Secretario general de la Estadística General de Francia.

En una Introducción se expone cómo ha nacido la medida en psicología; después trata lo relativo a métodos e instrumentos psícométricos; las etapas metrodológicas de una operación de medida; las fuentes de error en psicometría; la graduación de los instrumentos psicométricos; las cualidades metrológicas de los instrumentos psicométricos; la justeza de dichos instrumentos y la validez de una medida; una bibliografía termina el libro.

El profesor Lahy, en el prefacio, observa que el autor ha querido precavernos contra los peligrosos errores de la metrología insuficientemente precisa; y sobre todo, prepáralos para la ciencia de las medidas psicológicas. Husson posee las cualidades de un excelente experimentador y es ducho en el manejo del instrumento matemático aplicable al caso.

Nº 556. — Gautier (M. y A.), *Recherches dans la serie de La Pyridone. Etude de quelques* α — *Pyridones.* 78 páginas, 18 francos. 1937.

El autor de este trabajo — doctor en ciencias físicas y farmacéutico jefe de los Asilos del Sena — expone aquí el resultado de las investigaciones que ha realizado relativamente al tema que indica, o sea, en la serie de la piridina. En un apéndice trae sus investigaciones relativas a la acción fisiológica de algunos α — piridonas.

Nº 557-558. — BORDAS (JEAN), *Le Soja et Son Role Alimentaire;* MANGOLD (M.), *L'Utilisation alimentaire de la Cellulose.* Folletos de 40 páginas; 8 francos cada uno. 1937.

Son los fascículos III y IV de la serie «Nutrition» dirigida por Emilio F. Terroime.

Bordas es director de la Estación de Agronomía y de patología vegetal de Avignon; Mangold es profesor en la Universidad de Berlín y director del Instituto de Nutrición animal en esta ciudad.

El primero se ocupa de la *soja hispida,* planta cultivada, quizá la más antigua, en Asia Oriental. Desde 4000 años la utilizan los chinos, y para varios centenares de millones de estos asiáticos, constituye, con el arroz, el alimento principal. Es una de aquellas plantas a las que, a la vez que se les acuerda o se reconoce cierto valor, sin embargo, hay resistencia en utilizarlas. El autor expone aquí sus caracteres botánicos y sus principales variedades; su química, su fisiología alimenticia y empleo nutritivo; sus diversos usos y su economía. Formula conclusiones favorables a su empleo y trae una bibliografía.

El profesor Mangold, por su parte, observa que la celulosa es, entre todas las substancias orgánicas, la que existe o se halla en la superficie de la tierra en mayores proporciones, siendo un elemento fundamental de la estructura de los organismos vegetales. Después de varias consideraciones generales sobre el particular, estudia sus elementos químicos; el poder digestivo de la celulosa bruta y de la pura, en general, y en el organismo humano; su valor energético, y la digestión artificial de las celulosas de la paja y de la madera. Una bibliografía termina el folleto.

Nº 559-560. — GUILLEMET (RAYMOND), *Le Problème du Pain.* Dos folletos, respectivamente, de 62 y 102 páginas, con figuras y láminas; 12 y 20 francos. 1937.

Fascículos V y VI de la serie «Nutrition» dirigida por Emilio F. Terroine, profesor de la Facultad de Ciencias de Estrasburgo; director del Instituto de Fisiología general. El autor es doctor en física y jefe de trabajos en el Instituto de Química Biológica de la Facultad de aquella ciudad.

El primero trata todos los métodos de apreciación del valor de las harinas y de los trigos a los efectos de la elaboración del pan. El otro trata la fermentación para la panificación.

En el primer folleto se estudia o trata sucesivamente el ensayo del laboratorio relativo a la panificación y las técnicas y los aparatos para la apreciación de las calidades mecánicas de las pastas y glútenes de harina de trigo; la medición de las características fermentatorias de dichas pastas y glútenes; los ensayos de trigo entero molido para la determinación del valor panadero de la harina; la investigación de las relaciones entre medidas químicas o fisioquímicas y el valor panadero. Las conclusiones de este folleto son: que mientras se pueda hacer algo más perfecto, las calidades mecánicas de los glútenes y de las pastas, deben establecerse utilizando con tino y espíritu crítico, los técncas y los aparatos construídos con tal propósto.

En el segundo folleto encontramos una Introducción seguida de los siguientes temas: Datos del problema (fermentación); la fermentación alcohólica y la producción de gases en el seno de la pasta; las características plásticas de la pasta y su evolución; la evolución química y la físico-química en la pasta; la marcha general de la fermentación de la panificación. Las conclusiones son que, a medida que los métodos de la ciencia moderna penetran el problema de la panificación, se derrumban prejuicios ancestrales y se esfuma el misterio de las virtudes magnas de las panificaciones de antaño.

Nº 561. — GOUIN (RAOUL), *La Consideration du poids vif dans les études d'alimentation*. 24 páginas, 7 francos.

Fascículo VII de la serie «Nutrición» mencionada.

El autor es ingeniero agrónomo, miembro correspondiente de la Academia de Agricultura y del Consejo Superior de la cría. En una Introducción indica que su objeto es precisar el valor de las informaciones que pueden sacarse de la consideración del peso vivo de los sujetos, en los estudios de la alimentación, tanto en base a los datos antiguos, como en el examen de las recientes adquisiciones experimentales. Habla de las experiencias de Andrés Gouin y Andouard; del concurso de cerdos gordos en la feria de Milán en 1931; de las experiencias del Instituto experimental zootécnico de Roma y del centro de experimentos de Metz. Formula las Conclusiones que de todo ello se desprende; declara que hasta conquistar nuevos progresos, hay que renunciar a establecer fórmulas exactas de racionamiento, como algunos zootécnicos tuvieron la pretención de hacerlo; pero que, en la práctica, se consiguen aproximaciones útiles.

C. C. D.

Reportaire international des Centres de Documentation chimique. París. 1935.

En un volumen de 116 páginas, la Oficina Internacional de Química que funciona en París bajo la dirección de Jean Gerard, ha publicado una interesante recopilación de informaciones relativas a todos los Centros, Sociedades, Instituciones, etc., que en todas las naciones cultas, se ocupan de reunir, centralizar y sistematizar documentos, publicaciones y diversas clases de estudios relacionados con la ciencia química, tanto teórica como aplicada.

La utilidad para los investigadores y biblógrafos de disponer de un repertorio de esa clase, es bien evidente, pues los centros de documentación elegidos, representan oficinas mediante las cuales cualquier interesado en la averiguación de un dato, puede ponerse en comunicación con los archivos, bibliotecas, museos, cinematecas, hemerotecas, etc., de cada país.

Las referencias y explicaciones de esta obra, están en francés, inglés o alemán. Para la Argentina, se indica la existencia como centro de documentación química de la *Asociación Química Argentina,* haciéndose referencia también a sus publicaciones: *Anales, Bibliografía Química Argentina y Catálogo de Revistas.*

E. R.

SOCIOS ACTIVOS

Aguilar, Félix
Albizzatti, Carlos M.
Alessi, Juan M.
Alvarez, Raúl J.
Alvarez de Toledo, Belisario
Allende Lezama, Luciano P.
Anastasi, Camilo
Anchorena, Juan E.
André, Enrique de
Andrioletti, Juan Luis
Añón Suárez, Vicente
Aparicio, Francisco de
Aráoz Alfaro, Gregorio
Arce, Manuel J.
Arditi Thompson, H.
Armani, Aquiles
Arnaudo, Silvio J.
Avila Méndez, Delfín
Aztiria, Ignacio
Bado, Atilio A.
Bachmann, Enesto
Baglietto, Eduardo E.
Balbiani, Atilio
Baliani, Luis M.
Bancalari, Agustín
Bandoni, Alfredo J.
Barabino Amadeo, S.
Barbieri, Antonio
Bargna, Juan L.
Barilari, Mariano J.
Barral Souto, José
Barrancos, Leónidas A.
Becke, Alejandro von der
Berrino, Juan B.
Bertino, José Carlos
Besio Moreno, Nicolás
Bianchi Lischetti, A.
Biggeri, Carlos
Blaquier, Juan
Boaglio, Santiago
Bolognini, Héctor
Bonanni, Cayetano A.
Bontempi, Luis
Bordas, Alejandro F.
Bordenave, Pablo E.
Borruat, Luis
Borzi, Ana María
Bosch, Gonzalo
Bosisio, Anecto J.
Bottaro, Juan C.
Bozzini, Luis (h.)
Briano, Juan A.
Bunge, Juan C.
Buontempo, Guillermo
Burkart, Arturo
Butty, Enrique
Buzzo, Alfredo
Buzzo, Eduardo B.
Caillet Bois, Teodoro
Calandra, Raúl E.
Camus, Nicolás
Canale, Humberto
Canal Feijoo, Bernardo
Capelli, Pedro F.
Carabelli, Juan José
Carbia, Rómulo D.
Carbone, Esteban
Carbonell, José J.
Cárcova, Enrique de la
Carelli, Antonio
Carelli, Humberto H.
Caride Massini, Pedro
Carman, Ernesto
Carrea, Juan Ubaldo
Casacuberta, Antonio
Castellanos, Alberto
Castello, Manuel F.
Castiñeiras, Julio R.
Celasco, Juan L.
Ceppi, Héctor
Cernuschi, Félix
Clos, Enrique C.
Cock, Guillermo E.
Coni Bazán, F. A.
Curti, Orlando P.
Curutchet, Luis
Chanourdie, Enrique
Chizzini Melo, Aníbal F.
D'Ascoli, Lucio
Dassen, Claro C.
Dasso, Héctor
Dasso, Ricardo L.
De Cesare, Elías A.
De Fina, Armando L.
De la Ini, Juan E.
Dellepiane, Luis J.
Deulofeu, Venancio
Díaz, Emilio C.
Dieulefait, Carlos E.
Doello-Jurado, Martín
Dobranich, Jorge W.
Domínguez, Juan A.
Dubecq, Raúl E.
Dueñas, José
Duhau, Luis
Dupont, Enrique
Durañona y Vedia, A.
Durrieu, Mauricio
Edelberg, Benjamín
Escudero, Antonio
Escudero, Pedro
Faré, Santo S.
Fernández, Alberto J.
Fernández Díaz, A.
Fernández Long, S.
Figini, Angel
Figuerero, Hernando W.
Fischer, Gustavo Juan
Flores, Emilio M.
Floriani, Luis
Florit. Carlos J.
Forn, Carlos J.
Fossa Mancini, E.
Franceschi, Alfredo
Fürnkorn, Divico A.
Gadda, Carlos Manuel
Galmarini, Alfredo G.
Gando, Alfredo R.
Gandolfi Herrero, Augusto
Gandolfo, José S.
Gascón, Alberto
Gaspar, Fernando L.
Géneau, Carlos E.
Gerardi, Donato
Ghigliazza, Sebastián
Giagnoni, Bartolomé E.
Giannone, José
Gradín, Carlos
Grieben, Arturo
Gutiérrez, Ricardo J.
Haussler, Emilio
Herbin, Luis A.
Hermitte, Enrique
Herrera Vegas, M.
Herzer, Bernardo
Hickethier, Carlos F.
Hofmann, Herbert
Hortal, José Angel
Houssay, Bernardo A.
Hoyo, Arturo
Igartúa, Luis María
Irigoyen, Luis H.
Isetta, José
Ivanissevich, Ludovico
Jorge, José M.
Jakob, Cristofredo
King, Diarmid O.
Kinkelin Pelletán, J. C. de
Knoche, Walter
Kraglievich, Nicolás T.
Krapf, Eduardo
Labarthe, Julio
Lagunas, Simón
La Menza, Francisco
Laporte, Luis B.
Larco, Esteban
Lasso, Alfredo L.
Latzina, Eduardo
Ligniéres, Roberto
Lizer y Trelles, C. A.
Lombardi, Alberto
Loudet, Osvaldo
Loyarte, Ramón G.
Lugones, Arturo M.
Llauró, José
Mac Donagh, E. J.
Magnin, Félix J.
Mognin, Jorge
Mainini, Carlos
Mallol, Emilio
Mamberto, Benito
Marcó del Pont, E.
Marchionatto, Juan B.
Maresca, Antonio J.
Marini, Tomás L.
Martignone, Eduardo
Marotta, F. Pedro
Marotta, R. Armando
Mata, Leopoldo
Méndez, Julio
Meoli, Gabriel
Meoli, Humberto
Mercau, Agustín
Meriggi, Juan C.
Mermoz, Francisco A.
Molfino, José F.
Molina Carranza, L.
Molle, Clotilde C.
Montes, Vicente E.
Moreno, Evaristo V.
Nágera, Juan José
Natale, Alfredo
Natale, Ernesto
Negrete, Lucía
Negri, Mario L.
Nelson, Ernesto
Nielsen, Juan
Oliveri, Alfredo B.
Ortega Belgrano, Raúl
Ortiz, Aníbal A.
Ortiz de Rosas, Jorge
Otamendi, Gustavo
Ottonello, Héctor
Páez, José María
Page, Franklin Nelson
Paitoví y Oliveras, A.
Paquet, Carlos
Parodi, Edumndo
Parodi, Lorenzo R.
Pasman, Raúl G.
Pasman, Rodolfo E.
Pastore, Franco
Paz Anchorena, José M.
Pérez Hernández, A.
Perrone, Cayetano
Pestalardo, Agustín
Pini, Aldo S.
Platz, Hubert
Podestá, Juan Carlos
Polti, Modesto
Posadas, Carlos
Quinos, José Luis
Quinterno, Bruno F.
Quiroga, Pedro R.
Raimondi, Alejandro
Raffo, Bartolomé M.
Ramaccioni, Danilo
Ramallo, Carlos M.
Ratto, Héctor R.
Rebuelto, Antonio
Rabuelto, Emilio
Reoce, William Asher
Repetto, Blas Angel

Repossini, José
Ringuelet, Emilio J.
Rissotto, Atilio A.
Rivarola, Rodolfo
Robles, Angel A.
Rodríguez Aravena, S.
Rodríguez, Germinal
Rodríguez, Miguel
Roffo, Angel H.
Roffo, Juan
Roldán, Raimundo
Romero Brest, Enrique
Rokotnitz, Otto
Rospide, Juan
Rossell Soler, Pedro
Ruata, Luis E.
Ruíz Moreno, Isidoro
Ruiz Moreno, Adrián
Rumi, Tomás J.
Sabaria, Enrique
Salomón, Hugo
Sánchez, José Ricardo
Sánchez, Gregorio L.
Sánchez Díaz, Abel
Sánchez Sorondo, M. G.
Sanromán, Iberio
Santángelo, Rodolfo
Sarhy, Juan F.
Sarrabayrouse, Eugenio
Savon, Marcos A.
Schnack, Benno J.
Schmidt, Max
Schulz, Guillermo
Selva, Domingo
Selzer, Samuel
Sesma, Angel
Sheahan, Juan F.
Silva, Leónidas L.
Simonoff, Miguel
Simons, Hellmut
Siri, Luis
Sobral, Arturo
Solari, Emilio F.
Solari, Miguel A.
Soler, Frank L.
Sordelli, Alfredo
Spinetto, David J.
Spota, Víctor J.
Storni, Segundo R.
Suárez, Angel
Talana, Alberto F.
Talana, Jorge
Tarragona, José
Tedeschi, Virgilio
Tello, Eugenio
Torre Bertucci, Pedro
Torello, Pablo
Tossini, Luis
Trelles, Rogelio A.
Trucco, Sixto E.
Valeiras, Antonio
Valentini, Argentino
Valentinuzzi, Máximo
Vallebella, Colón B.
Vanossi, Reinaldo
Varela, Rufino
Varela Gil, José
Vecchi, Arístides de
Vela Huergo, Julio
Verdaguer, Juan
Veyga, Francisco de
Vidal, Eduardo
Vignati, Milcíades A.
Villalobos D., C.
Vignaux, Juan C.
Vinardell, Alberto
Volpatti, Eduardo
Wainer, Jacobo
White, Guillermo J.
Wauters, Carlos
Wysztelewski, W. de
Zamboni, Agustín
Zappi, Enrique V.
Zavalla, Carlos M.
Zuloaga, Angel M.

SOCIOS ADHERENTES

Bazzanella, José
Cotlar, Mischa
Devoto, Carlos Alberto
Ferramola, Raúl
Folcini, Martín L. G.
García, Eduardo D.
Glücksmann, Carlos E.
Goyena, Ricardo J.
Gorchs, Agustín C.
Laclau, Juan Pedro
Magne de la Croix, P. A.
Mailhos, Luis E.
Milesi, Emilio Angel
Quevedo Capdevila, Eduardo A.
Recoder, Roberto F.
Repetto, Cayetano
Rusconi, Carlos
Sadosky, Manuel
Somonte, Eduardo
Vistalli, Alina M.
Wechsler, Wolf

CASAS ADHERENTES

Angel Estrada y Cía.
Benvenuto y Cía.
Lutz, Ferrando y Cía.
Hijos de Atilio Massone
Otto Hess, S. A.
T. Gr. "Tomás Palumbo"
Jacobo Peuser, S. A. ltda.

SOCIO VITALICIO

Huergo, Eduardo María

MIEMBROS PROTECTORES DE LA ORGANIZACION DIDACTICA DE BUENOS AIRES

Anchorena, Juan E.
Besio Moreno, Nicolás
Tornquist, E. y Cía. (Lda.)

SECCION CORDOBA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Juan Olsacher; Vice-presidente, Dr. Miguel Fernández; Vice-presidente, Ing. Daniel A. García; Secretario de actas, Dr. Guillermo V. Stuckert; Secretario de correspondencia, Prof. Tulio Mácola; Tesorero, Sr. Bernardo Pilotto; Pro-tesorero, Dr. Carlos C. Hosseus; Vocales: Ing. Clodoveo Pascualini; Ing. Jorge E. Bobone; Ing. Luis Chechi; Ing. Ambrosio L. Taravella; Dr. Federico Padula; Dr. José Carlomagno; Dr. Meade L. Zimmer; Sr. Enrique Sparn.

SOCIOS ACTIVOS

Aguiar, Henoch D.
Bobone, Jorge E.
Brandan, Ramón A.
Broglia, Alberto A.
Buteler, Jesús E.
Camilloni, Carlos
Carlomagno, José
Chaudet, Enrique
Checchi, Luis
Deheza, Eduardo
Del Viso, Jacinto
Devoto, Heraclio A.
Esteban, Fernando
Fernández, Miguel
Fontana, Lorenzo P.
García, Daniel
Godoy, Salvador A.
Gómez, Calixto A.
Gordillo, Pedro N.
Hosseus, Carlos Curt
Lofayette Zimmer, M.
Larrauri, Agustín C.
Lutzow Holm, Olaf.
Mácola, Berardo A.
Mácola, Tulio
Mirizzi, Pablo Luis
Ninci, Raúl T.
Olsacher, Juan

Padula, Federico
Pasqualini, Clodoveo
Peláez J. Gambastiani de
Pilotto, Bernardo
Rothlin, Edwin
Schmiedecke, Augusto
Sigal, Moisés
Sparn, Enrique
Stuckert, Guillermo V.
Taravella, Ambrosio L.
Tarragó, Emeterio
Trebino, Natalio
Urciolo, Victorio
Vanni, Alberto
Vercello, Carlos
Yadarola, Mauricio L.

SECCION SANTA FE

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Gustavo A. Fester; Vice-presidente, Dr. José Piazza; Secretario de correspondencia, Ing. Quím. Francisco A. Bertuzzi; Secretario de actas, Ing. Quím. José Cruellas; Tesorero, Ing. Quím. Enrique Virasoro; Vocal 1º, Ing. José Babini; Vocal 2º, Prof. Rolando Hereñú; Vocal suplente 1º, Prof. Julio Salaber; Vocal suplente 2, Ing. Quím. Guillermo Berraz; Encargado de Biblioteca y Canje, Ing. Quím. Rodolfo Rouzaut; Encargado de Publicaciones, Ing. José Babini.

SOCIOS ACTIVOS

Anadón, Leónidas
Ariotti, Juan Carlos
Babini, José
Benet, Pedro José
Berraz, Guillermo
Bertuzzi, Francisco A.
Bonazzola, César J.
Borruat, Luis (hijo)
Borzone, Rodolfo
Bossi, Celestino
Caballero, Martín A.
Camo, José María
Cerana, Miguel
Claus, Guillermo
Cohan, Marcos
Courault, Pablo
Crouzeilles, A. L. de
Cruellas, José
Christen, Carlos
Christen, Rodolfo G.
Damianovich, Horacio
Falco, Federico
Fester, Gustavo A.
Frenguelli, Joaquín
Gollán, Josué (h.)
Gschwind, Eduardo P.
Guinle, Hugo José
Hereñú, Rolando
Hotschewer, Curto
Juliá, Tolrá Antonio
Kleei, Gregorio
Lachaga, Dámaso A.
Mai, Carlos
Mántaras, Fernando
Marelli, Hipólito
Martino, Antonio E.
Montpellier, Luis Marcos
Mounier, Celestino
Muzzio, Enrique
Nigro, Angel
Niklison, Carlos A.
Oliva, José
Peresutti, Luis
Piazza, José
Piñero, Rodolfo
Pozzo, Hiram J.
Ragonese, Arturo E.
Reinares, Sergio
Rouzaut, Rodolfo
Salaber, Julio
Salgado, José
Santini, Bruno L. P.
Schivazappa, Mario
Simonutti, Atilio A.
Tissembaum, Mariano
Urondo, Francisco E.
Virasoro, Enrique

SECCION MENDOZA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Juan B. Lara; Vice-presidente, Ing. Agr. José Raúl Ponce; Secretario, Ing. Agr. Julio Tolosa (h); Tesorero, Ing. Cayetano C. Piccione; Bibliotecario, Sr. Adrián Ruíz Leal; Vocales: Dr. Eduardo Carette; Dr. Mario Bidone; Ing. Alfredo Rosenthal; Sr. Manuel Tellechea; Ing. Agr. Rafael E. Pontis.

SOCIOS ACTIVOS

Alurralde, Juan Carlos
Anzorena, Jacinto
Ayala Castagnino, G.
Basso, Germinal
Benegas, Raúl
Bidone, Mario
Borsani, Carlos Pablo
Burgoa, Pedro A.
Carette, Eduardo
Castillo, José
Croce, Francisco M.
Espinosa, Norberto A.
Flor Alvarado, José M.
Gabrielli, Francisco J.
Galeano, Edgardo
García, José Federico
Godoy Vergelin, G.
Gomensoro, José N.
Granzella, Sinibaldo
Guiard, Ricardo
Jofré, Alberto L.
Lara, Juan B.
Lucero, Braulio G.
Lugones, Manuel G.
Magistretti, Guillermo
Maneschi, Ernesto
Maroso, José Angel
Maveroff, Aquiles
Mayorga, Santiago C.
Miyara, Salomón
Paganotto, Juan P.
Pelaia, Dante
Piccione, Cayetano C.
Ponce, José Raúl
Pontis, Rafael E.
Richard, Alfonso E.
Rosales, Ranulfo S.
Rosenthal, Alfrado
Ruíz, Aníbal
Ruíz Leal, Adrián
Serra, Luis Angel
Silvestre, Tomás
Stura, Angel C.
Tellechea, Manuel
Tolosa, Julio (h)
Toso, Juan F.
Villanueva, Miguel Angel

SECCION LA PLATA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Carlos A. Sagastume; Secretario, Ing. Adolfo P. Grissi; Tesorero, Dr. Carlos Teobaldo; Vocales: Dr. Hilario Magliano, Dra. Juana Cortelezzi; Ing. Juan Sabato; Dr. Federico E. Christmann.

SOCIOS ACTIVOS

Alsina Fuertes, Fidel
Amarante, Pedro C.
Angli, Jerónimo
Arroyo Basaldúa, Víctór M.
Basualdo, Washington S.
Bauer, Conrado
Bonet, Luis A.
Canals Frau, Salvador
Cortelezzi, Juana
Crespi Gherzi, Rodolfo A.
Christmann, Federico E.
Daló, Héctor R.
Ferrari, Obdulio J. F.
Gascón, Jorge
Gershánik, Simón
Giovambattista, Humberto
Grisi, Adolfo P.
Loedel Palumbo, Enrique
Mc Loughlin, Rogelio P.
Magliano, Hilario
Marmonti, Angel
Massinurio, Blas
Méndez, José D.
Micheletti, Luis A.
Nico, Raúl
Oliva, Virgilio
Paternosto, Pedro G.
Pera, Tomás Carlos
Platzceck, Ricardo P.
Rodríguez, Marcelo R. N.
Sabato, Ernesto R.
Sabato, Juan
Sáez, Francisco A.
Sagastume Berra, A. E.
Sagastume, Carlos A.
Scheggia, Eduardo R.
Teobaldo, Carlos
Toranzos, Fausto L.
Trejo, César A.
Vucetich, Danilo C.
Wilkens, Alejandro

SOCIOS CORRESPONDIENTES

Aguilar y Santillán, R.	México
Alvarez, Antenor	Sgo. del Estero
Amaral, Afranio de	San Pablo (Br.)
Avendaño ,Leónidas	Lima
Bachmann, Carlos J.	Lima
Bolívar, Ignacio	Madrid
Bonarelli, Guido	Gubbio (It.)
Borel, Emile	París
Bragg, William Henry	Londres
Bruch, Carlos	Olivos (B. A.)
Cabrera, Blás	Madrid
Campos Porto, Pablo	Río de Janeiro
Carabajal, Melitón M.	Lima
Dabbene, Roberto	La Plata
Darmois, Eugenio	Nancy (Fr.)
Darmois, Georges	París
Dávila, Rubén	Santiago (Ch.)
Escomel Edmundo	Arequipa (P.)
Fiebrig, Carlos	Munich (Al.)
Fontecilla Larrain, Arturo ..	Santiago (Ch.)
Fort, Michel	Lima
González del Riego, Felipe ..	Lima
Greve, Germán	Santiago (Ch.)
Guinier, Philibert	Nancy (Fr.)
Hadamard, Jacques	París
Hauman, Luciano	Bruselas
Hernández, Juvenal	Santiago (Ch.)
Hijar y Haro, Luis	México
Janet, Pierre	París
Jiménez de Asúa, Luis	Madrid
Keiper, Guillermo	Berlín
Kinart, Fernando	Amberes
Lahille, Fernando	Tarn (Fr.)
Langevin, Paul	París
Levi Civita, Tulio	Roma
Lobo, Bruno	Río de Janeiro
Mardones, Francisco	Santiago (Ch.)
Molina, Enrique	Concepc. (Ch.)
Monjaráz, Jesús E.	México
Moretti, Gaetano	Milán
Oliver Schneider, Carlos	Santiago (Ch.)
Pereira d'Andrade, Lencastre	Nova Goa (I. P.)
Perrin, Tomás G.	México
Pi y Suñer, Augusto	Barcelona
Porter, Carlos E.	Santiago (Ch.)
Reyes Cox, Eduardo	Santiago (Ch.)
Rospigliosi y Vigil, Carlos ..	Lima
Rowe, Leo S.	New York
Shepperd, William R.	Wáshington
Tello, Julio C.	Lima
Valle, Rafael H.	México
Vélez, Daniel M.	México
Villarán, Manuel V.	Lima
Vitoria, Eduardo	Barcelona
Volterra, Vito	Roma

LOS SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES Y SUS APLICACIONES AL ESTUDIO DE LOS CUERPOS CONVEXOS

POR

FRANCISCO LA MENZA

Para facilitar el estudio y consulta del trabajo que con el título de « *Los sistemas de inecuaciones lineales y sus aplicaciones al estudio de los cuerpos convexos* », se ha venido publicando en estos *Anales*, se insertaron a continuación un *Indice de Materias;* otro de *Términos y Notaciones;* y otro de *Autores* citados en el texto. Finalmente se agrega un *Complemento Bibliográfico* que añade nuevas informaciones a las ya dadas, acerca de las diversas cuestiones tratadas.

INDICE DE MATERIAS

INDICE DE MATERIAS (Continuación)

INDICE DE MATERIAS (Conclusión)

TERMINOS Y NOTACIONES

TERMINOS Y NOTACIONES (Continuación)

	Entrega	Tomo	Página
Determinantes orlado común.	III	CXXIV	160
» orlados del sistema	V	CXXI	214
» principales			226
» $(a_1 a_2 \ldots a_h)$			214
Dimensión	V	CXXI	213
» del sistema subordinado			213
» de la figura.	II	CXXII	90
» » » forma.	I	CXXVI	26
Elementos de la contracción	V	CXXV	329
Espacio	V	CXXI	229
» arguesiano			229
» de pertenencia	II	CXXII	90
» euclídeo E_n	V	CXXI	228
Figura	V	CXXI	244
» abierta	VI	CXXII	390
» cerrada.			390
» contiguas.	I	CXXVI	27
» derivada			25
» poliédrica convexa.	II	CXXII	89
» regular	VI	CXXII	390
» singular			390
» totalmente singular			390
Forma	I	CXXVI	25
» derivada			27
» duales			30
» polares recíprocas			30
Grado de singularidad	V	CXXI	241
Inecuaciones	V	CXXI	212
» principales			217
» sobrantes.			216
Intersección	VI	CXXII	386
Invariantes	II	CXXII	90
Matriz M_h	V	CXXI	213
» ampliada.			213
» ampliada de un sistema resolvente . . .			224
» de un sistema			213
» » » » resolvente.			224
» » tipo (m, n)	III	CXXIV	158
» fundamental	II	CXXII	107
» parcial			107
» principal	V	CXXI	223
» » ampliada	III	CXXIV	159

TERMINOS Y NOTACIONES (Continuación)

TERMINOS Y NOTACIONES (Conclusión)

INDICE DE AUTORES

COMPLEMENTO BIBLIOGRAFICO

Además de los datos bibliográficos dados en el texto, citamos aquí otras obras y memorias que consideramos de mucha utilidad. En algunas de ellas encontrará el interesado noticias históricas y bibliografías muy completas de las cuestiones tratadas.

ARQUIMEDES. - *Les Oeuvres complètes d'Archimèdes,* traducción francesa de PAUL VER ECKE. París, 1921. 1 tomo.

En las Defs. de la pág. 4 se encuentra claramente expuesto el concepto de *concavidad.*

BOHNENBLUST, F. - *Convex Region and Projections in Minkowski Spaces.* Annales of Mathematics. Seg. Serie. Vol. 39, año 1938, págs. 301-308.

BORSUK, K. - *Contribution a la topologie des Polytopes.* Fundamenta Mathematica. Tomo XXV, 1936.

BRETON, PH. - *Note sur la clasification des polyèdres.* Comp. Rendu. Tomo 51, pág. 722.

De carácter sintético intuitivo para los poliedros ordinarios.

KIRKMAN, T. P. - Rev. *On the Theory of the Polyhedra.* Philosophical Transactions. 152, I, 1862, págs. 121-165.

Estudia particularmente cuestiones de morfología de los poliedros ordinarios e interesantes propiedades de simetría.

CAYLEY, A.

1) *A Memoir on Abstract Geometrie.* Philosophical Transactions. Vol. 160, año 1870, I, II, pág. 51-63.

Exposición de los principios fundamentales de una Geometría abstracta m-dimensional.

2) *On the Δ-faced Polyacrons in reference to the problem of enumeration of polyhedra.* Ph. Soc. of Manchester, año 1862.

EBERHARD, V. - *Zur Morphologie der Polyeder.* Leipzig, 1891.

FARKAS, J. - *Therorie der einfachen Ungleichungen.* Journal für Mathematik. Tomo 124, año 1902, págs. 1-27.

FOURIER, J. - *Solution d'une question particulière du Calcul des Inégalités.* Tomo II, pág. 17. *Oeuvres* publiées par les soins de M. GASTON Darboux. París, 1890.

Resuelve un interesante problema particular y reconoce la importancia de este género de estudios y sus numerosas aplicaciones. Dice M. DARBOUX:

« Cette question des inégalités a beaucoup occupé FOURIER; il avait l'intention de publier dans son grand Ouvrage sur la *Théorie des Equations* une étude développée sur ce sujet ».

HERMES, O. - *Die Formen der Vielflache.* Crell's Journal. Tomo 120, año 1899, págs. 27-59 y 305-353.

KEMPE, A. B. - *A Memoir on the Theory of Mathematical Form.* Ph. Tran, 177, I, II, año 1886, págs. 1-70.

MOTZKIN, T. - *Beiträge zur Theorie der Linearen Ungleichungen.* Jerusalem, 1936. Un folleto de 71 págs. con una bibliografía completa de la cuestión.

POINSOT, L. - *Note sur la théorie des polyèdres.* Comp. Rendu. Tomo 46, año 1858, pág. 65.

REYNOLDS, C. J. R. - *Circuit Upon Polyhedra.* Annales Mat. Stone. 1932. Serie 2-33, pág. 367.

SCHOENBERG, J. I. - *On finite-rowed systems of linear inequalities in infinitely many variables.* Trans of Ann. Math. Soc. 34, 1932, págs. 594-619.
Los aplica a la resolución del problema de Riesz.

SCHOUTE, P. H.

1) *Mehrdimensionale Geometrie.* II. *Teil-Die Polytope.* Leip zig, 1905.
Estudio métrico sistemático de los *politopos* del hiperespacio.

2) *On the Characteristic numbers of the Polytopes of Space S_n.* Proc. of the fifth Int. Congr. of Math. 1912. Vol. II, pág. 70.

STEINER, J. - *Obras de.* Tomo I, año 1832, págs. 227 y 454.

WIENER, C. - *Uber Vielecke un Vielflache.* Leipzig, 1864.

MEDIDA DE PEQUEÑAS VARIACIONES DE GRANDES TENSIONES E INTENSIDADES DE CORRIENTE

POR LOS INGENIEROS

JUAN SABATO Y ROGELIO Mc LOUGHLIN

En la bibliografía consultada no hemos encontrado tratado el problema de medir pequeñas variaciones de grandes tensiones; sólo hemos encontratado un método, a nuestro juicio poco satisfactorio, destinado a medir pequeñas variaciones de grandes intensidades; es por estas circunstancias que nos hemos propuesto investigar métodos sobre el tema enunciado, con el resultado que damos a conocer en el presente trabajo; se considera en esta oportunidad sólo el caso de corriente continua, dejando para otra el correspondiente a corriente alternada.

I

Refiriéndonos en primer término a la medida de pequeñas variaciones de tensiones elevadas en corriente continua, veamos cuál es la menor variación de tensión que puede medirse con el voltímetro que indica la tensión elevada en cuestión. (Al hablar de tensión elevada se lo hace en sentido relativo y con referencia a las pequeñas variaciones de la misma que se desean medir).

Supongamos, por ejemplo, que con un voltímetro de precisión (0,3 % de exactitud referida al valor máximo medible) medimos la tensión de la red para alumbrado, cuyo valor oscila alrededor de los 220 V; se utiliza el alcance de medida de 300 V, y como la escala del instrumento tiene 150 divisiones iguales, cada una de éstas equivale a 2 V; suponiendo que la menor fracción de división que puede leerse sea un quinto, que equivale a 0,4 V (aproximadamente 0,18 % de la tensión normal), ésta sería la menor variación de tensión que podría medirse con un buen instrumento de precisión; y con una in-

certidumbre (independiente del error de indicación del aparato) de por lo menos 50 %, ya que no es posible eludir un error de lectura de un décimo de división.

En realidad, en estas condiciones de medida no podríamos exigir la lectura de variaciones de tensión menores de 2 V (aproximadamente 1 % de la tensión normal) con una incertidumbre que podemos fijar en 10 %, la que puede reducirse a la mitad si las lecturas corresponden a un número entero de divisiones de la escala, o duplicarse en el caso que la aguja del instrumento caiga entre dos divisiones sucesivas.

Si por exigencia de un ensayo deben leerse variaciones de tensión $\pm \Delta U$ más pequeñas, por ejemplo 1 ‰ de la tensión normal U, con un error de lectura menor, no queda otro recurso que traducir las pequeñas variaciones de tensión en desviaciones de la aguja del instrumento indicador todo lo grande que se quiera.

II

Una solución inmediata consiste en conectar en oposición con la tensión variable $U \pm \Delta U$, una tensión U que sin ser rigurosamente constante, sus variaciones sean lo suficientemente pequeñas de modo que no modifiquen fundamentalmente las desviaciones que en el instrumento de medida producen las variaciones $\pm \Delta U$ (fig. 1).

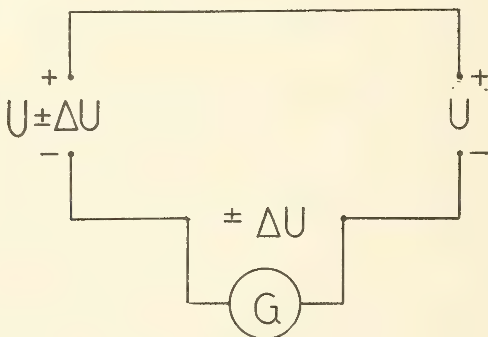


Fig. 1

Un galvanómetro G con aguja indicadora y cero en la mitad de la escala, medirá las variaciones $\pm \Delta U$; eligiendo convenientemente la sensibilidad de este instrumento indicador, traduciríamos dichas variaciones de tensión en el número de divisiones conveniente. Utilizando como galvanómetro el mismo milivoltmetro transformado en

voltmetro con la respectiva resistencia en serie, a una división de la escala corresponde una tensión de 0,0003 V, más de 6000 veces menor que la correspondiente a la misma desviación del aparato utilizado como voltmetro. Este coeficiente de amplificación de las desviaciones puede aumentarse aún mucho más utilizando un galvanómetro más sensible.

Para valores no muy elevados de U, una buena batería de acumuladores o de pilas resuelve el problema, siendo necesario un potenciómetro de consumo muy reducido para regular U al valor deseado; debido a la variación temporaria de la tensión de esta fuente auxiliar de corriente, es necesaria una regulación de aquélla al valor fijado cada vez que se utiliza el dispositivo de medida; prácticamente son despreciables las pequeñísimas variaciones de la tensión U que se producen en el momento de realizar las medidas, dado el valor muy reducido de la intensidad de la corriente de circulación.

III

El método indicado no sólo exige en cada caso medir el valor constante U, lo que en cierto sentido complica un poco el procedimiento

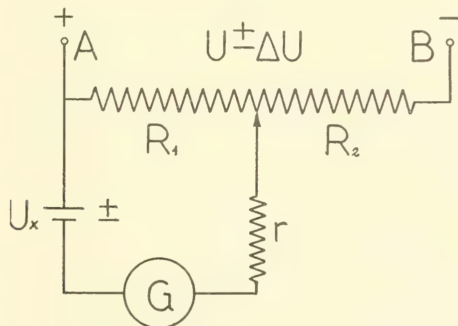


Fig. 2

y el circuito de medida, sino que tiene fundamentalmente el inconveniente de que no siempre es posible tener a disposición la fuente de corriente que nos proporcione la tensión U, que puede ser de valor elevado.

Se salva este inconveniente adoptando el circuito de medida que se indica en la fig. 2, reduciendo la tensión variable $U \pm \Delta U$ *con un* potenciómetro, y utilizando como fuente auxiliar una cualquiera, de tensión U_x que no es necesario conocer.

Si a los extremos AB del potenciómetro aplicamos primero la tensión constante U (o si ello no es posible, una fracción dada de U, como se demostrará más adelante, constituyendo esto una de las ventajas más apreciables de este método), por variación de R_1 y R_2 es posible anular la corriente en el galvanómetro, es decir, compensar U_x; si en estas condiciones se producen variaciones conocidas $\pm \Delta U$ de la tensión U y se leen las correspondientes α en el galvanómetro (cuya sensibilidad se regula mediante la resistencia adicional r de modo que a la máxima variación corresponda la máxima desviación), se realiza el tarado del dispositivo de medida, es decir, se determina la función

$$\alpha = f(\pm \Delta U) \quad [1]$$

Hecho el tarado, se aplica a sus extremos AB la tensión variable $U \pm \Delta U$, resultando así determinadas las variaciones $\pm \Delta U$ en función de α.

Interesa determinar las condiciones de máxima sensibilidad del dispositivo de medida; estando éste compensado, podemos escribir las siguientes ecuaciones:

$$U_x = R_1 I \quad [2]$$

$$U = I (R_1 + R_2) \quad [3]$$

Si consideramos el caso que U aumenta la cantidad ΔU, aumento al que corresponde el incremento ΔI de corriente en el potenciómetro, tendremos

$$U_x = R_1 (I + \Delta I - i) - i R_g \quad [4]$$

siendo i la intensidad de la corriente que se deriva al circuito del galvanómetro y R_g la suma de la resistenci interna de éste y de r.

Simplificando la [4] de acuerdo con la [2] y reemplazando el valor de ΔI deducido de la ecuación

$$\Delta U = \Delta I (R_1 + R_2) \quad [5]$$

que resulta de la [3], se tiene, siendo C la constante de intensidad del galvanómetro

$$i = \frac{R_1}{R_1 + R_g} \frac{\Delta U}{R_1 + R_2} = C \alpha \quad [6]$$

de donde deducimos la relacción de efecto (desviación del galvanómetro) a causa (variación ΔU de la tensión), es decir la sensibilidad

$$S = \frac{\alpha}{\Delta U} = \frac{1}{C\,(R_1 + R_2)\left(1 + \frac{R_g}{R_1}\right)} \qquad [7]$$

De esta última ecuación deducimos las siguientes conclusiones, comprobadas experimentalmente:

a) Para valores dados de C y R_g, la sensibilidad es inversamente proporcional a la suma de R_1 y R_2, siempre que las variaciones de R_g/R_1 sean pequeñas respecto a la unidad; en caso contrario, aumenta muy poco S al disminuir la suma de R_1 y R_2; la disminución de esta suma está limitada por la carga máxima que admiten sus componentes y por la potencia máxima que es capaz de suministrar la fuente en estudio.

b) Si se mantiene constante C, $R_1 + R_2$ y R_g y se aumenta R_1 (y por tanto proporcionalmente U_x) la sensibilidad aumenta siempre que las variaciones de R_g/R_1 sean grandes respecto a la unidad; en caso contrario, S aumenta muy poco al aumentar R_1.

Teniendo en cuenta estas conclusiones, la aplicación del método estudiado ha dado el siguiente resultado: utilizando un galvanómetro de aguja de una resistencia interna de 97 Ohm y cuya constante de intensidad C vale $3{,}10^{-7}$ A, una variación de tensión ΔU de 2 V ha producido en el galvanómetro una desviación de aproximadamente 100 divisiones, siendo U igual a 220 V y utilizando como U_x un elemento de acumulador; en estas condiciones puede medirse una variación mínima de 0,02 V que representa aproximadamente el uno por diez mil de la tensión U.

La ecuación [6] nos indica que existe proporcionalidad entre causa y efecto, de modo que el tarado se reduce a determinar la desviación que produce en el galvanómetro la máxima variación de tensión que se quiere medir.

Como se ha hecho notar más arriba, no es necesario disponer de una tensión igual a aquella U, alrededor de la cual se quieren medir las pequeñas variaciones, para hacer el tarado; si éste se hace, por ejemplo, con una tensión igual a la mitad de U, no hay más que tomar para R_1 y R_2 valores mitad que los determinados.

Puede observarse que el dispositivo de medida estudiado no es sino una variante del conocido método de oposición o compensación.

IV

A fin de independizarnos de una fuente de corriente a tensión constante, se pensó en idear dispositivos de medida alimentados en lo posible solamente con la misma fuente de corriente cuyas variaciones de tensión se quiere medir.

Con este propósito se ha utilizado como parte del circuito de medida un dispositivo D (fig. 3) que permita mantener constante la intensidad I de la corriente, aún variando la tensión U dentro de ciertos límites.

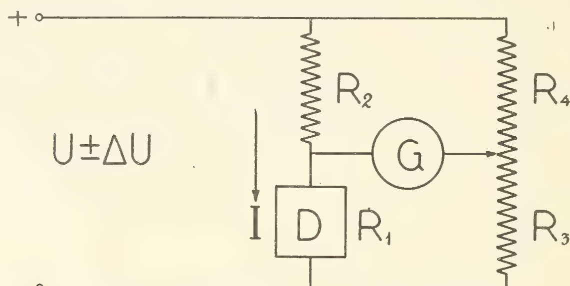


Fig. 3

De esta manera, la diferencia de potencial en R_2 será constante al variar U en la forma indicada; si se completa el circuito con las resistencias R_3 y R_4 y el galvanómetro G, permaneciendo U constante será posible anular la corriente que circula por el galvanómetro variando R_3 y R_4. Produciendo entonces variaciones $\pm \Delta U$ de la tensión aplicada y leyendo las correspondientes desviaciones α en el galvanómetro, se realiza el tarado del dispositivo de medida, lo que nos permitirá después realizar la operación inversa.

Este dispositivo de medida es en realidad un puente de Wheatstone con las siguientes características: fuente de alimentación de tensión variable y resistencia R_1 del elemento D también variable con la tensión; en efecto, si por la manera de trabajar de D, la intensidad I de la corriente permanece constante al aumentar o disminuir U, es porque su resistencia R_1 aumenta o disminuye en la misma proporción.

Habiendo equilibrado el puente en la forma antes indicada, una variación de tensión $\pm \Delta U$ lo desequilibra por variación de R_1, y circulará por el galvanómetro una corriente de intensidad

$$\pm i_g = (U \pm \Delta U) \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{R_g(R_1+R_2)(R_3+R_4)+R_1R_2R_3+R_2R_3R_4+R_3R_4R_1+R_4R_1R_2} \quad [8]$$

suponiendo despreciable la resistencia interna de la fuente de la corriente.

Como dispositivos D que cumplan la condición fijada, se han ensayado: *a*) Lámparas de filamento de hierro en atmósfera de hidrógeno; *b*) Lámparas electrónicas de dos electrodos.

V

Como se sabe, las lámparas de filamento de hierro en atmósfera de hidrógeno están caracterizadas por la propiedad de mantener

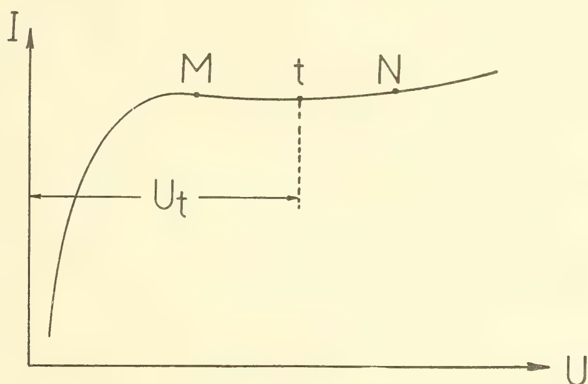


FIG. 4

constante la intensidad de la corriente, al variar la tensión dentro de ciertos límites. La fig. 4 muestra la característica

$$I = f(U) \quad [9]$$

de un tipo de esas lámparas.

Refiriéndonos al circuito de medida de la fig. 3, debe elegirse R_2 de modo que

$$U - I R_2 = U_t \quad [10]$$

siendo U_t la tensión de trabajo de la lámpara. Las variaciones de tensión $\pm \Delta U$ deben mantenerse dentro de los límites correspondientes a los puntos M y N de la característica.

La lámpara usada es una Philips que regula 0,2 A entre 35 y 100 V; en realidad, la intensidad de la corriente no permanece rigurosamente constante; utilizando el método de medida de pequeñas variaciones de la intensidad de una corriente que se estudia más adelante, se ha constatado que una variación de 1 V de la tensión de trabajo de la lámpara produce una variación en el valor de la intensidad de 0,1 mA aproximadamente, es decir 0,5 ‰ del valor nominal. Este hecho no importa, porque aun suponiendo que tenga influencia en el funcionamiento del dispositivo de medida a construirse, el tarado del mismo nos dará cuenta de toda influencia de dicha variación. Se ha elegido U_t aproximadamente igual a 65 V, de modo que ha resultado R_2 aproximadamente 775 *Ohm* para U igual a 220 V; como R_3 y R_4 se han usado resistencias de 190 y 450 *Ohm* aproximadamente; como galvanómetro se ha utilizado en primer término un milivoltamperemetro con las siguientes características: 10 *Ohm* de resistencia interna, 45 mV y 150 divisiones.

El tarado del dispositivo de medida se ha hecho utilizando el siguiente circuito:

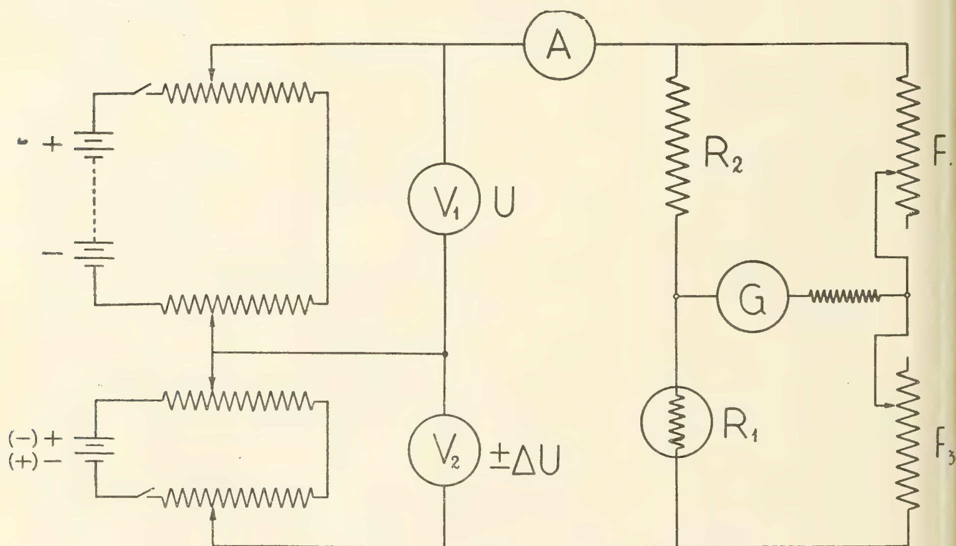


Fig. 5

Las fuentes de corriente, formadas por baterías de acumuladores, son dos: una proporciona la tensión constante U, que se ha

tomado en este caso igual a 220 *V*, por querer medir variaciones de tensión alrededor de dicho valor; como el valor de esta tensión coincide con un número entero de divisiones de la escala del voltímetro V_1, con la ayuda de una lupa podemos regularlo con un error de lectura absolutamente despreciable. La otra fuente de corriente con su respectivo potenciómetro nos permite producir las variaciones $\pm \Delta U$, leídas con un voltmetro V_2 de alcance conveniente.

La realización del tarado ha permitido llegar a las siguientes conclusiones:

a) Existe prácticamente proporcionalidad entre las variaciones de tensión ΔU y las desviaciones α en el galvanómetro.

b) No existen diferencias sensibles de α para valores de ΔU en más o en menos respecto a U.

c) Las conclusiones *a*) y *b*) permiten reducir el tarado a la determinación del valor α correspondiente a un valor dado de ΔU, por ejemplo 2 *V*.

d) La sensibilidad obtenida para los valores numéricos indicados de los elementos que integran el circuito es bastante buena, ya que una variación de tensión de 2 *V* ha producido una desviación en el galvanómetro de 50 divisiones aproximadamente, lo que equivale a una amplificación de 50 respecto a la desviación en el mismo aparato utilizado como voltmetro para el alcance de 300 *V*.

e) Para dicho circuito el consumo, indicado por el amperemetro *A*, es aproximadamente de 0,55 *A*, el que puede o no ser aceptable según el carácter de la fuente en estudio; puede reducirse el consumo aumentando el valor de las resistencias R_1 y R_4, pero la sensibilidad disminuye si se usa el mismo galvanómetro; por ejemplo, reduciendo el consumo a la mitad, la sensibilidad disminuye en la misma proporción; se ha constatado también que un aumento del consumo a 3 *A* con la correspondiente disminución de las resistencias mencionadas, no significa ninguna ganancia en la sensibilidad.

f) Utilizando el galvanómetro de 97 *Ohm* de resistencia interna, mencionado al final del capítulo III, puede reducirse el consumo prácticamente al mínimo (que son los 0,2 *A* correspondiente a la corriente de trabajo de la lámpara) y ganar mucho en sensibilidad; en efecto, para una varia-

ción de tensión de 0,4 *V* se ha obtenido una desviación en en el galvanómetro de unas 100 divisiones. Es un poco difícil trabajar con esta sensibilidad tan elevada, notándose pequeñas oscilaciones de la aguja del galvanómetro, producidas por contactos flojos, especialmente de las resistencias y también por el mismo funcionamiento de la lámpara. Estas pequeñas oscilaciones de la aguja desaparecen prácticamente colocando en serie con el galvanómetro una resistencia de 50.000 *Ohm,* obteniéndose en estas condiciones una desviación de unas 75 divisiones para una variación de tensión de 2 *V*. Trabajando con este tipo de galvanómetro es necesario tapar la lámpara, porque la variación de pérdida por irradiación y convexión produce desviaciones apreciables de la aguja.

g) Debido a la inercia térmica del filamento de la lámpara es necesario esperar hasta que alcance su régimen.

h) Es evidente que el consumo del dispositivo puede reducirse cuando así lo exija la fuente en estudio, usando una lámpara con corriente de trabajo más reducida; pero es difícil encontrarlas en plaza.

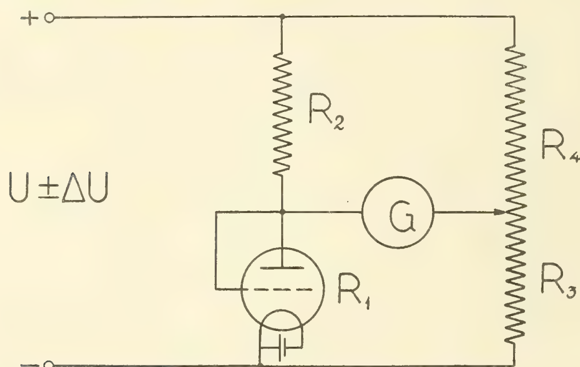


Fig. 6

VI

En lugar de la lámpara de filamento de hierro puede utilizarse como elemento *D* una lámpara electrónica conectada en la forma que indica la figura 6.

La lámpara electrónica debe tener una saturación bien definida, por lo que se ha elegido un triodo de tipo antiguo, con filamento

de tunsgteno; su característica como diodo es la que muestra la figura 7.

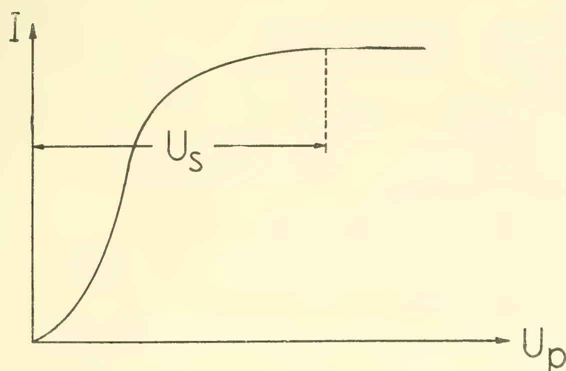


FIG. 7

Siendo U_s la tensión de saturación para una corriente de filamento dada, debe elegirse R_2 de modo que

$$U - I R_2 \geqq U_s \qquad [11]$$

Habiendo equilibrado el puente, si la tensión aplicada U varía, I permanece teóricamente constante, la resistencia interna R_1 del diodo aumenta, el puente se desequilibra y la desviación acusada por el galvanómetro será una medida de la causa que la ha producido, previo tarado del dispositivo hecho en la forma indicada.

Trabajando con este circuito de medida pueden anotarse las siguientes observaciones:

a) Debe recurrirse a una fuente de tensión auxiliar para alimentar el filamento.

b) La saturación no es en realidad bien definida, de modo que la corriente de placa varía al variar la tensión; esto en realidad no constituye un inconveniente, porque el tarado del dispositivo de medida se encarga de tener en cuenta esas variaciones.

c) Usando como galvanómetro el milivoltamperemetro antes mencionado, la sensibilidad es mala debido a su pequeña resistencia interna y al valor elevado de las otras resistencias que intervienen en el circuito; una variación de tensión de 4 V produce solo una desviación de 4 divisiones.

En cambio con el galvanómetro de aguja se ha obtenido una desviación de 100 divisiones para una variación de 1 V; pero el funcionamiento es completamente irregular, debido a que una variación de solo 1 ‰ de la corriente de filamento (que corresponde a una variación de la desviación de la aguja del amperemetro de filamento de un décimo de división) produce aproximadamente una desviación de 100 divisiones.

La gran influencia de una variación imperceptible de la corriente de filamento, que hace prácticamente inutilizable el dispositivo estudiado, nos sugirió la idea de aprovechar el hecho señalado, alimentando el filamento (con una resistencia conveniente en serie) con la misma fuente de tensión variable, como lo muestra la figura 8; con lo que se elimina también la fuente auxiliar que alimentaba el filamento

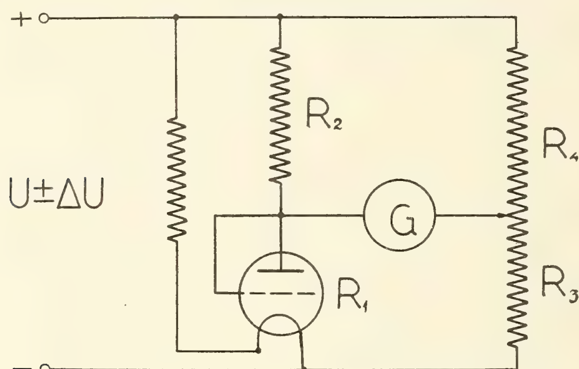


Fig. 8

En estas condiciones se aprovecha fundamentalmente el desequilibrio que produce en el puente una variación de la tensión, al variar la resistencia interna R_1 del diodo por la variación de la corriente de placa, producida por una variación de la corriente de filamento.

Además en este caso, al contrario de lo que ocurre en el anterior, un aumento de la tensión U significa una disminución de R_1, por aumentar la corriente de placa I. Es posible ponerse en condiciones de medida tales, que para variaciones $\pm \Delta U$ alrededor de una tensión U dada, la variación de R_1 resulte lineal, lo que facalita el tarado y uso del dispositivo de medida.

Usando como galvanómetro el milivoltamperemetro, una variación de tensión de $2V$ ha producido una desviación de 65 divisiones, resultado muy aceptable; el funcionamiento es estable, pero el consumo se eleva considerablemente respecto al caso anterior (de 0,03 A aumento a 0,5 aproximadamente) debido a la forma de alimentación del filamento.

Utilizando el galvanómetro de aguja, el funcionamiento es inestable aun con una resistencia de 100.000 *Ohm* en serie, debido especialmente a los contactos deficientes de las resistencias variables En las condiciones indicadas una variación de 0.2 V produjo una desviación de 50 divisiones.

En definitiva, al dispositivo de medida de la figura 8, alimentado exclusivamente por la fuente de tensión variable, representa una buena solución del problema, utilizando como galvanómetro el milivoltamperemetro.

VII

Puede hacerse una combinación de los dos dispositivos de medida estudiados, resultando en la figura 8 substituída la resistencia R_3 por la lámpara de filamento de hierro y modificando convenientemente el valor de la resistencia R_4. En estas condiciones, una misma variación de tensión tiene que producir un desequilibrio mayor, por variar en sentido inverso R_1 y R_3. La mayor sensibilidad resultante no se observa en forma apreciable utilizando el milivoltamperemetro. En cambio con el galvanómetro de aguja puede observarse que la sensibilidad se triplica: una variación de 0,2 V produce una desviación de 150 divisiones. Pero el funcionamiento en este caso es muy inestable por las causas ya señaladas, razón por la cual esta combinación no resulta práctica.

VIII

Las lámparas de filamento metálico, convenientemente conectadas en los lados de un puente de Wheatstone, solucionan también satisfactoriamente el problema propuesto.

Usando como galvanómetro el milivoltamperemetro, una variación de tensión de 2 V ha producido las siguientes desviaciones:

a) De 15 divisiones, conectando una lámpara de 40 W como R_1.
b) De 20 divisiones, conectando una en R_1 y otra en R_4.

c) De 40 divisiones, conectando 4 en paralelo en R_1; el consumo de 0,55 *A*, aproximadamente el doble que en los casos anteriores.

d) De 75 divisiones, conectando 4 en paralelo en R_1 y otras 4 también en paralelo en R_4; consumo aproximadamente 1 *A*.

e) Utilizando en el caso *a*) el galvanómetro de aguja con 10.000 *Ohm* en serie, una variación de 2 *V* ha producido aproximadamente una desviación de 100 divisiones.

Conviene que la tensión aplicada a las lámparas sea reducida (unos 30 *V* para lámparas de 200 *V*) porque en esas condiciones de trabajo la variación de resistencia del filamento es máxima.

Las indicaciones del galvanómetro son muy estables, de modo que el uso de este método significa una excelente solución técnica del problema. Utilizando en el caso *b*) un galvanómetro de aguja portátil de resistencia interna adecuada, puede construirse un dispositivo transportable de gran sensibilidad y excelente seguridad de funcionamiento y simplicidad.

IX

Conectando en uno de los lados del puente una lámpara de neon, resulta una gran solución para el caso que la fuente en estudio no permita un consumo elevado; en efecto, este resulta de unos 20 *m A* y la sensibilidad muy elevada, pues una variación de 0,1 *V* produce en el galvanómetro una desviación de 60 divisiones.

El uso de la lámpara de neón tiene el inconveniente que el dispositivo tarda un cierto tiempo antes de estabilizarse, debiendo cubrirse la lámpara para evitar que la variación de las pérdidas térmicas produzcan oscilaciones de la aguja del galvanómetro.

X

Refiriéndonos ahora a la medida de pequeñas variaciones de la intensidad de una corriente, puede presentarse el caso análogo al considerado respecto a las tensiones: que a dichas variaciones correspondan desviaciones muy pequeñas de la aguja del amperemetro que mide la corriente total, resultando necesario, por lo tanto, que ellas se traduzcan en desviaciones apreciables de un instrumento indicador convenientemente conectado.

Una variante del método de compensación, análoga a la considerada en el capítulo III, permite resolver el problema en forma satisfactoria, utilizando el circuito de medida representado en la figura 9.

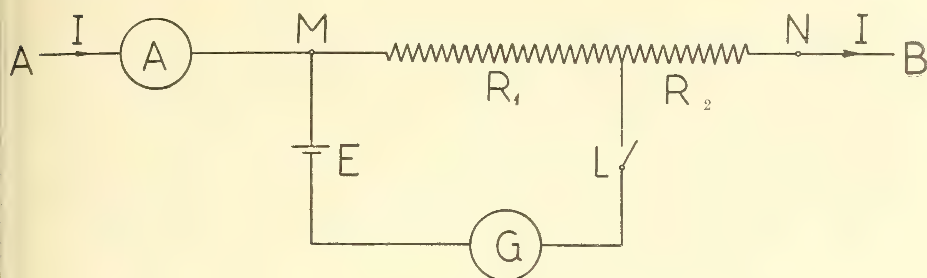


FIG. 9

En el conductor *AB*, por el que circula la corriente de intensidad *I* cuyas variaciones se quieren medir, se intercala la resistencia *MN* formada por las partes R_1 y R_2 de valor variable. Completando el circuito en la forma indicada con un galvanómetro y una fuente auxiliar, se compensa la f.e.m. de esta para *I* constante; realizado a continuación el tarado del dispositivo, puede este usarse para el fin propuesto, ya que las variaciones de *I* producirán en R_1 una variación de la caída de potencial que se traducirá en una desviación en el galvanómetro.

La sensibilidad obtenida es muy buena; siendo *I* aproximadamente igual a 0.5 *A* medida con el amperemetro *A* de 150 divisiones y alcance de medida 0.75 *A*, una división de su escala equivale a 5 *mA*; produciendo esta variación de *I*, ella se traduce en el galvanómetro de aguja ya citado en una desviación de un poco menes de 100 divisiones; de modo que podríamos medir una variación mínima de *I* de 0,05 *mA* (10.000 veces menor que *I*) que corresponde aproximadamente a una desviación de una división en el galvanómetro.

Para determinar las condiciones de máxima sensibilidad, escribamos las ecuaciones

$$R_1 I = E \qquad [12]$$

$$R_1 (I + \Delta I - i_g) - R_g i_g = E \qquad [13]$$

que corresponden a la compensación y al desequilibrio respectivamente, siendo ΔI la variación de *I* (en este caso suponemos un

incremento), i_g la intensidad de la corriente derivada al galvanómetro de resistencia R_g; de esas dos ecuaciones deducimos

$$i_g = \frac{R_1}{R_1 + R_g} \Delta I \qquad [14]$$

siendo evidente que la sensibilidad será tanto mayor cuanto más se acerque el valor de i_g al de ΔI, esto es, cuanto mayor sea R_1 y menor R_g.

Cuando se trata de medir variaciones de valores muy grandes de I, la resistencia MN resulta constituída por un hilo tendido de sección conveniente.

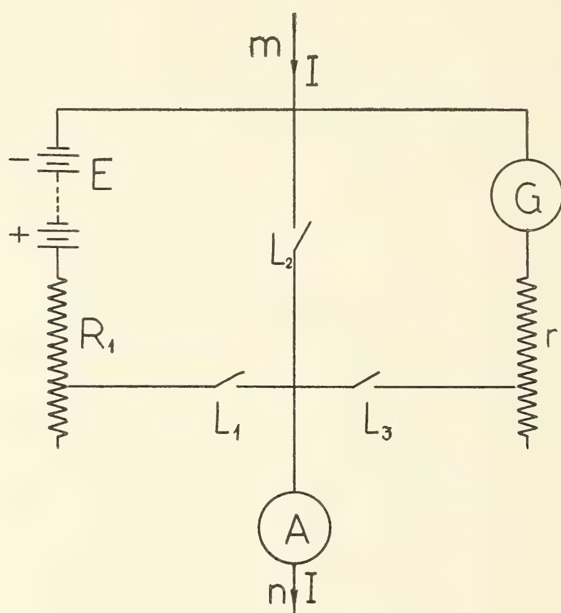


Fig. 10

Consideramos la solución estudiada más satisfactoria que la propuesta por Krutzsch en su trabajo titulado: Messung geringer Anderungen starker Ströme, publicado en Archiv für Elecktrotechnik, año 1926, tomo XVII, pág. 465; el circuito de medida correspondiente es el que muestra la figura 10.

En el conductor MN circula la corriente de intensidad I, medida por el amperemetro A, cuyas pequeñas variaciones se quieren determinar; la manera de operar es la siguiente:

a) Estando la llave L_2 cerrada y las L_1 y L_3 abiertas, el amperemetro A indicará el valor normal de I;

b) Se abre la llave L_2 y se cierra la L_1, estando la R_1 toda conectada, para después regularla hasta que el amperemetro vuelva a indicar el valor normal de I;

c) Se cierra la llave L_3 estando r toda intercalada, para después eleminarla poco a poco, regulando simultáneamente R_1 hasta que se anule la corriente en el galvanómetro, es decir, hasta que se compense la f.m.e. E de la fuente auxiliar con la caída de potencial en R_1.

En el método que proponemos deben realizarse solo dos pasos:

a) Estando la llave L abierta, se regula I hasta que el amperemetro indica su valor normal; este paso es necesario porque la introducción de la resistencia MN puede modificar el valor de I;

b) Se cierra la llave L y se compensa la f.e.m. E de la fuente auxiliar.

Pero la desventaja mayor del método a que se refiere la figura 10, es que por la fuente auxiliar circula la corriente de intensi-

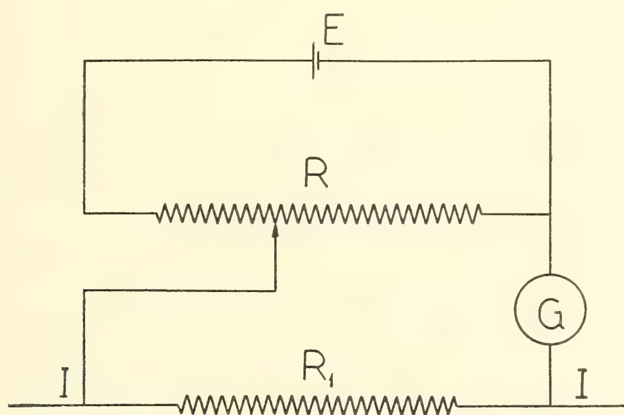


FIG. 11

dad I (en el caso particular que exista compensación) o de valor poco diferente en el caso más general que exista desequilibrio. La fuente auxiliar debe tener características que respondan a este hecho, y su f.e.m. varía evidentemente durante su descarga, con las

consecuencias consiguientes para la validez de la compensación realizada. En el método a que se refiere la figura 9, la fuente auxiliar trabaja prácticamente a circuito abierto, de modo que se mantiene la validez de la compensación hecha al principio.

Etzrodt, en Archiv für Electrotechnik, año 1927, tomo XVIII, pág. 693, hace unas observaciones al trabajo mencionado de Krutzsch y manifiesta que la medida de las pequeñas variaciones de la intensidad de una corriente puede hacerse en forma más simple con el esquema de la fig. 11 es decir, por aplicación directa del método de oposición.

La variante que proponemos en la figura 9 es evidentemente más simple.

INSTITUTO DE ELECTROTÉCNICA DE LA PLATA
JULIO DE 1938

LA FUERZA ELECTROMOTRIZ DE POLARIZACION Y EL POTENCIAL QUIMICO DEL HIDROGENO Y OXIGENO ATOMICOS

Por el

Dr. VIRGILIO TEDESCHI

Si en un circuito recorrido por una corriente está intercalado un electrolito o un sistema de electrolitos entre dos electrodos, el sistema gastará o engendrará energía eléctrica, según se manifieste en él una fuerza electromotriz contraria o dirigida en el mismo sentido de la corriente. La energía eléctrica gastada es igual al producto de la fuerza electromotriz y por la cantidad de electricidad que pasa, y suponiendo que la energía eléctrica se convierta totalmente en energía química, o viceversa, tendremos:

$$e\,q = J\,C \quad \text{y} \quad e = \frac{J\,C}{q}$$

representando q la cantidad de electricidad expresada en coulomb, J la relación entre la pequeña caloría y el joule, y C las « calorías de constitución » o, si se quiere, « de ionización » absorbidas o producidas en la transformación química.

Es esta la ecuación establecida por Lord Kelvin, la cual expresa solamente una aproximación.

Aplicando la ecuación a la transformación de un equivalente-gramo obtenemos:

$$e = \frac{J\,C}{F} \quad \text{o sea} \quad e = \frac{4{,}186 \times C}{96540} = \frac{C}{23062}$$

representando F el número de Faraday.

En el caso del elemento Daniell, por ejemplo, las calorías de substitución de un equivalente-gramo de zinc a un equivalente-gramo

de cobre son 25050, y resulta $e = 1{,}086$ volt, valor que coincide casi exactamente con las medidas galvanométricas.

Sin embargo Fabre, Braun y otros demostraron que una pequeña parte de la energía química puede transformarse directamente en calor, y en tal caso la energía eléctrica resulta inferior a la energía química, y en otros casos, la energía eléctrica es superior, y la pila se enfría y absorbe calor del exterior. La pila Daniell pertenece a esta última categoría, o sea la energía libre que se manifiesta en el proceso de transformación que en ella se cumple, es superior al calor en el cual podría transformarse directamente la energía química.

A una conclusión idéntica a la de los autores citados, llegó teóricamente Helmholtz, basándose en el segundo principio de la termodinámica. Su ecuación final aplicable a todas las pilas reversibles es la siguiente:

$$e = \frac{JC}{F} + T\frac{\partial e}{\partial T}$$

Es claro que el término de corrección es $T\frac{\partial e}{\partial T}$ que puede ser positivo (caso de la pila Daniell) o negativo, lo que sucede en la mayoría de los elementos reversibles.

De la fórmula precedente deducimos:

$$C = \frac{Fe}{J} - \frac{F}{J}T\frac{\partial e}{\partial T}$$

Que nos dice que el calor secundario, o sea el que es absorbido o desarrollado en el proceso, es proporcional al valor del coeficiente de temperatura $\frac{\partial e}{\partial T}$, y es negativo si tal coeficiente es positivo, o viceversa. En otras palabras, si el coeficiente es positivo, o sea e aumenta con la temperatura, la pila (haciendo abstracción del calor de Joule) se enfría, y si es negativo, se calienta. Por lo demás tal coeficiente tiene, en general, valores muy pequeños (+ 0,000034 en la de Daniell), y, por consiguiente, no se incurre en grave error, si se calcula la fuerza electromotriz teniendo en cuenta únicamente el primer término de la fórmula de Helmholtz, o sea aplicando la ecuación de Lord Kelvin.

Esta ecuación, llamada comúnmente fórmula de Thompson (Lord Kelvin)-Helmholtz, ha sido comprobada por numerosos investiga-

dores, principalmente por Bouty y Jahns, y puede también deducirse, siempre aplicando los principios de la termodinámica y la ecuación de Clapeyron, de la fórmula fundamental de la teoría de Nernst:

$$e = \frac{R\,T}{F} \log n \frac{P}{p}$$

en la cual P es la tensión de disolución del metal y p la presión osmótica de los iones del mismo metal.

¿Es la ecuación de Thompson-Helmholtz aplicable al voltámetro común, en la cual O_2 y H_2 son los productos finales de la electrolisis? Es probable, puesto que si el voltámetro en la práctica no constituye un sistema perfectamente reversible, lo es en teoría, aunque no haya sido determinado su coeficiente de temperatura. Por este último motivo, nos contentaremos con aplicar la ecuación de Lord Kelvin, o sea despreciaremos el segundo término:

$$e = \frac{4{,}186 \times 34000}{96540} = 1{,}474 \text{ volt},$$

valor éste que coincide bastante con la f. e. m. máxima de la pila de gas de Grove.

Si la fuerza electro-motriz de polarización se determina durante la electrólisis, o en el primer instante después de interrumpida la corriente que ha causado el proceso electrolítico, los resultados son muy distintos.

Innumerables son las investigaciones sobre polarización a partir de las más antiguas y clásicas de Fechner, Poggendorf y Lenz (1831-1843). Según Crova y Exner, la fuerza electromotriz de polarización se mantiene igual a la corriente polarizante a medida que ésta aumenta, pero hasta cierto valor, después del cual su aumento se hace más lento, llegando a un máximo, según Crova, de 2,7 volt y según Exner, de 2,23 volt. Sawinoff da valores distintos según el electrolito empleado, y Tafel y otros encuentran que la f. e. m. de polarización depende también de la naturaleza de los electrodos, habiendo Koch y Wüllner obtenido hasta 3,5 volt con electrodos de platino. En general todos los investigadores están de acuerdo con Lenz, en considerar la fuerza electromotriz del voltámetro como la suma de dos fuerzas electromotrices; la del ánodo y la del cátodo. Así Sawinoff para el H_2SO. da 2,31 v., valor que resulta de la suma de 1,20 v. al ánodo y 1,11 v. al cátodo, mientras para otros electrolitos

la f. e. m. de polarización resulta bastante distinta, llegando a un máximo de 2,93 v. (1,42 án. + 1,47 cát.) para el Na_2SO.. Según varios investigadores la f. e. m. depende no solamente del material que constituye los electrodos, sino también de sus dimensiones, y Max Le Blanc, que ha efectuado numerosas investigaciones sobre polarización con diferentes electrolitos, mediante un procedimiento que consiste en disminuir la fuerza electromotriz de la corriente que atraviesa el voltámetro provocando la electrólisis, hasta que su intensidad se anule (como es notorio tal corriente nunca se anula completamente), encontró en el caso del H_2SO. una f. e. m. de polarización de 1,67 v., y valores muy cercanos en el caso de otros ácidos, bases y sales alcalinas, valores, como se ve, bastante próximos al calculado mediante la fórmula de Lord Kelvin, y próximos también a la f. e. m. de la pila de gas.

Los resultados obtenidos por los investigadores difieren entre sí, como se ve, lo suficiente para justificar nuevas determinaciones, al resultado de las cuales, como veremos, puede atribuirse una notable importancia teórica.

Los procedimientos que he empleado son un poco distintos de los de otros investigadores, y están basados, la mayoría de ellos, en una medición de la f. e. m. en el primer instante después de interrumpida la corriente polarizante.

La fig. 1 es el esquema de uno de los dispositivos:

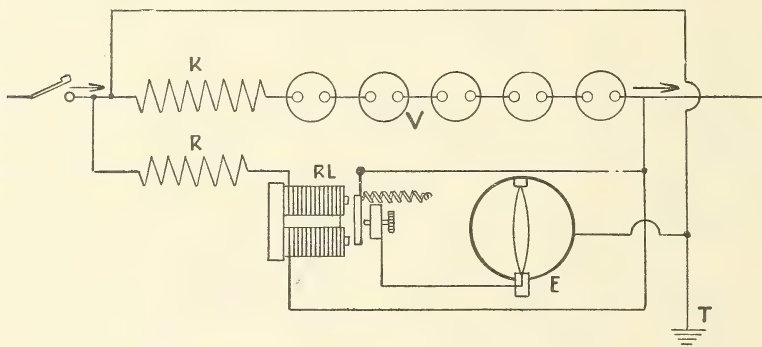


Fig. 1.

La corriente polarizante pasa por una serie de voltámetros. *V*. Al interrumpir la corriente polarizante una especie de relais *RL* establece el contacto de uno de los polos de la serie de voltámetros con el electrómetro bifilar de Wulff *E*, mientras el otro polo está en comunicación permanente con la caja metálica del mismo y con tierra *T*. Durante el pasaje de la corriente, el electroimán del relais

impide tal contacto. *RR* son dos resistencias complementarias. Entre la interrupción de la corriente polarizante, y la comunicación con el electrómetro, no transcurre sino una fracción mínima de segundo.

Otro dispositivo se basa en el procedimiento común del potenciómetro modificado de tal manera que al interrumpir la corriente polarizante, la corriente no pase en el circuito del galvanómetro sino por un tiempo brevísimo, en caso contrario, como la f. e. m. de polarización disminuye rápidamente, el desequilibrio que se establece podría comprometer la integridad del mismo galvanómetro.

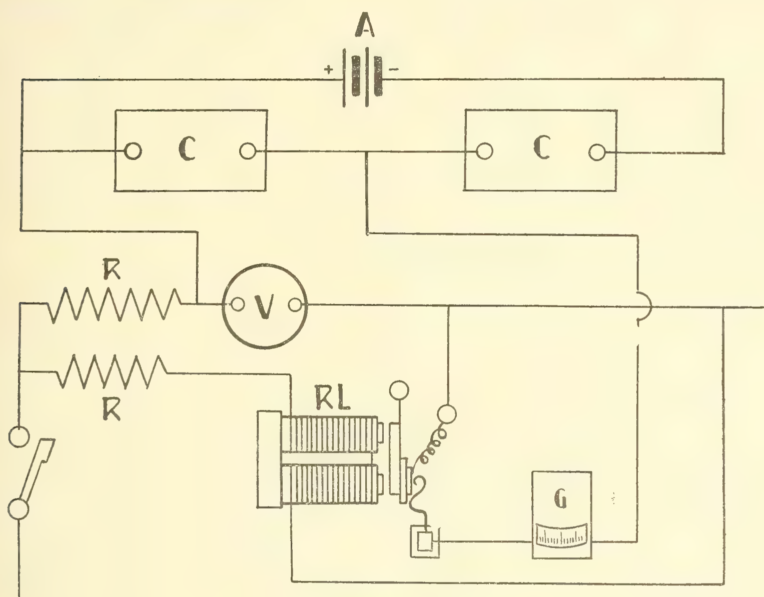


Fig. 2.

El esquema del dispositivo está representado en la fig. 2. *A* es un acumulador de dos elementos; *C*, *C* dos cajas de resistencia; *V* el voltámetro con electrodos de carbón; *RL* el relais, que establece un contacto brevísimo con el circuito del galvanómetro *G*, al interrumpir la corriente polarizante. Considero superflua una descripción detallada de tal relais que fácilmente puede imaginarse. El galvanómetro debe ser muy sensible y de poca inercia. En algunas de mis determinaciones he usado el oscilógrafo construído por la casa Siemens, o el electrómetro capilar de Ostwald.

Los resultados de numerosas determinaciones efectuadas pueden resumirse brevemente:

La f. e. m. de polarización aumenta con la densidad de la corriente a nivel de los electrodos, y tiende a un máximo que no depende ni de la naturaleza del electrolito, si los productos finales de la electrolisis son los mismos, o sea el H_2 y el O_2, ni de la naturaleza de los electrodos, si éstos son inatacables y de estructura suficientemente porosa como para mantener ocluída cierta cantidad de gas.

La concentración de hidrogeniones y de oxidriliones de la solución no modifica la f. e. m. de polarización, lo que está de acuerdo no sólo con la ecuación termodinámica de Lord Kelvin y de Holmholtz, sino también con la ecuación de Nernst basada en la teoría osmótica.

En efecto, la ecuación misma debe, en este caso, escribirse así:

$$e = \frac{R\,T}{F} \log n \frac{P}{p} + \frac{RT}{F} \log n \frac{P'}{p'}$$

puesto que las fuerzas electro-motrices de los dos electrodos se suman.

De la fórmula precedente deducimos:

$$e = \frac{RT}{F} \log n \frac{P\,P'}{p\,p'}$$

en la cual P y P' son las tensiones de disolución del hidrógeno condensado en la superficie del cátodo, y del oxígeno condensado en la del ánodo, tendiendo este último, asociándose al agua, a pasar en solución en forma de iones OH'. Ahora bien, pp' es el producto de las presiones osmóticas de los hidrogeniones y de los oxidriliones, producto que no se altera al modificarse la concentración de una de las dos especies de iones, siendo proporcional al producto de las concentraciones de los $H^{\cdot}$ y OH' que, como es notorio, se mantiene constante.

Los valores de la f. e. m. de polarización, a partir de una intensidad de corriente suficiente para producir un desarrollo bastante abundante de gas, oscilaron entre 2,41 v. y 2,78 v., habiendo alcanzado este último valor, con una gran intensidad de la corriente polarizante, y por consiguiente con un valor elevado de la densidad de la corriente a nivel de los electrodos, que eran de pequeñas dimensiones, y muy próximos unos a otros.

Con los métodos precedentemente descriptos, he determinado también separadamente el potencial de cada electrodo con respecto al líquido, utilizando un tercer electrodo que llamaré pasivo, obte-

niendo valores que sumados me han dado un total superior a la f. e. m. medida entre el cátodo y el ánodo. Por ejemplo, en un caso en que esta última era de 2,7 v., he obtenido, para el cátodo, 1,46 v., y para el ánodo, 1,48 v., valores que sumados dan 2,94 v.

Con un procedimiento análogo al empleado por primera vez por Fuchs, y más tarde por Le Blanc, que consiste en la determinación del potencial de cada electrodo en relación al electrodo pasivo, durante el pasaje de la corriente polarizante, he obtenido valores todavía mayores.

De esta falta de concordancia entre los resultados de las mediciones de los potenciales de los dos electros efectuadas separadamente y en conjunto, no he podido encontrar ninguna explicación satisfactoria.

La fig. 3 presenta un esquema del dispositivo empleado:

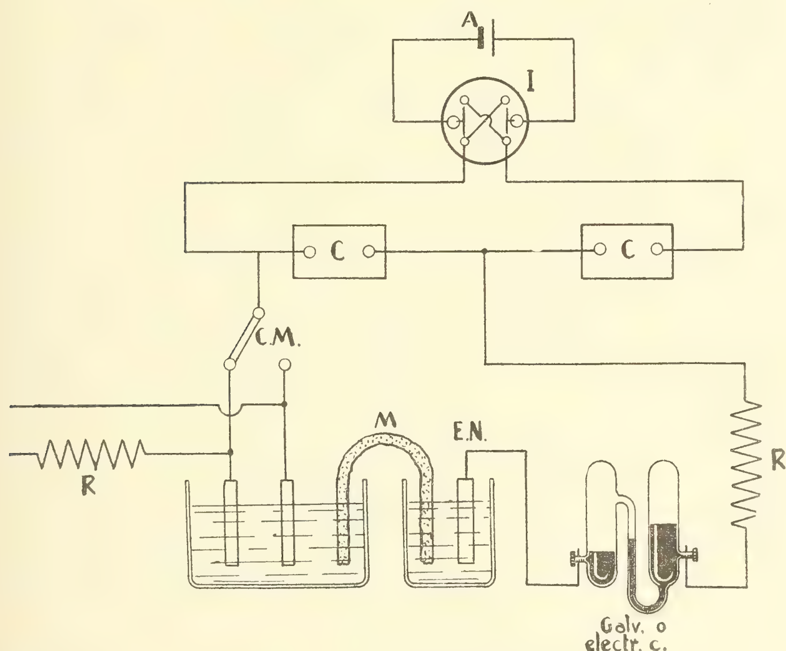


Fig. 3.

CC son dos cajas de resistencia, *I* un inversor, *CM* un conmutador, *M* una mecha empapada en el electrolito que establece una comunicación con un recipiente, separado del voltámetro, en el cual está colocado el electrodo pasivo, que puede ser un electrodo impolarizable del calomel, en el cual caso hay que hacer las debidas correcciones, teniendo en cuenta la f. e. m. del mismo electrodo.

Con este dispositivo he obtenido, p. ej., en una determinación para el cátodo 1,71 v. y para el ánodo 1,48 v., lo que da una f. e. m. total de 3,19 v. o sea algo superior a 3 v.

Resultados más de acuerdo con los de otros investigadores, he obtenido con un procedimiento análogo al usado por Nernst en 1894, y Glaser y Bose en 1898. Consiste éste en emplear un electrodo de pequeña dimensión y otro de gran superficie. En este último la acumulación de los productos de la electrolisis por unidad de superficie es prácticamente nula, y por consiguiente puede considerarse nula la correspondiente f. e. m. de polarización, dependiendo el valor de ésta únicamente del electrodo pequeño.

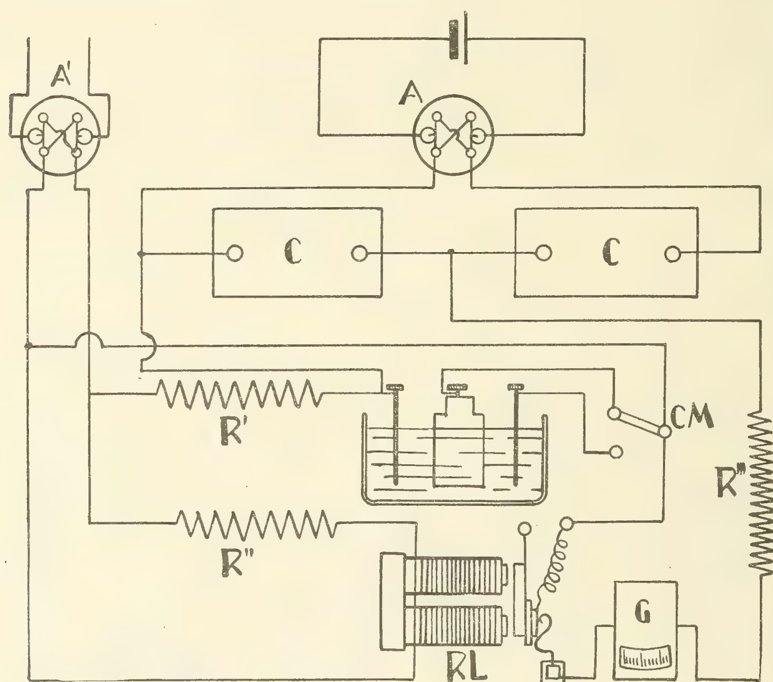


Fig. 4.

En la figura 4, que representa un dispositivo que permite determinar sucesivamente la f. e. m. del electrodo negativo, del positivo y de los dos en conjunto, *A* y *A'* representan dos inversores; *C C*, dos cajas de resistencia; *RL*, el mismo relais mencionado antes, que establece un contacto momentáneo en el circuito en el cual está intercalado un galvanómetro *G* de pequeña inercia, un oscilógrafo, un electrómetro capilar o un galvanómetro de cuerda de Einthoven, y *CM* un conmutador; $R'R''$ y R''' son resistencias suplementarias.

Con este dispositivo, utilizando como electrodos pequeños dos puntas de lápiz y como electrodos de grandes dimensiones una lámina de carbón de casi dos decímetros de cuadrados superficie, en un caso en que la f. e. m. entre los dos electrodos de pequeña superficie era de 2,38 v., he obtenido, por ejemplo, para el cátodo 0,98 v. y para el ánodo 1,42 v., cuyos valores sumados dan 2,40 v. con una diferencia de apenas 0,02 v.

¿Cómo explicar el hecho de que la f. e. m. de polarización sea tan superior, llegando con cierta intensidad de la corriente polarizadora a un valor casi doble del que se calcula con la fórmula de Lord Kelvin?

Suponer que la diferencia dependa del hecho de no tener en cuenta el segundo término de la fórmula de Thompson-Helmholtz, no es una explicación adecuada. Habría que atribuir el coeficiente de temperatura signo positivo, lo que es excepcional, y sólo sucede en pilas, como en la de Daniell, en las que el metal de la sal que actúa como despolarizador, posee una tensión de disolución extremadamente débil ($4{,}8 \times 10^{-20}$ atmósferas para el Cu, según Le Blanc) y absorbe calor al ionizarse; además tal coeficiente debería tener valores elevadísimos, lo que es todavía menos probable.

Después de los trabajos de Le Blanc sobre electrolisis, se han introducido conceptos que me parece poco justificados, y aptos a engendrar oscuridad, destruyendo la noción de reversibilidad, puesto que obligan casi a considerar bajo puntos de vista distintos la fuerza contra-electromotriz de polarización durante el pasaje de la corriente electrolizadora, y la fuerza electromotriz que se manifiesta después, en el fenómeno inverso.

Según Le Blanc, habría una especie de tenacidad con la cual cada ion retiene su carga, siendo necesaria una cierta fuerza eléctrica para despojarlo de la misma. Así, para que se inicie la electrolisis, hay que llegar a un valor determinado de la f. e. m., suficiente para descomponer los iones, a la que denomina valor de descomposición. De tal modo explica, este autor, el hecho de que en una mezcla de sales metálicas, los cationes distintos se separen con potenciales diferentes, y si éstos van aumentando, aparezcan en el cátodo en un orden determinado, que corresponde al orden creciente de su tenacidad.

La teoría de Nernst da una explicación más satifactoria del fenómeno. La supuesta tenacidad no es más que la tensión de disolución, que empieza a manifestarse apenas se haya depositado sobre los electrodos la más pequeña cantidad de los productos de la electrolisis.

Al mismo orden de ideas pertenece la suposición de que un voltámetro constituya una asociación de dos condensadores. Los iones no cederían inmediatamente sus cargas a los electrodos, formando en contacto con los mismos, o en gran proximidad, una capa eléctrica, a la cual correspondería en la superficie del electrodo una carga de signo opuesto. Esta doble capa eléctrica podrá aumentar indefinidamente, pero cuando la fuerza eléctrica sea suficientemente elevada para vencer la tenacidad con la cual los iones retienen su carga, éstos cederán la misma a los electrodos, iniciándose la electrolisis. Es evidente que no es posible imaginar en qué consista propiamente el obstáculo que impide a los iones llegar en contacto con los electrodos, y ceder a los mismos su carga, o sea, de acuerdo con las ideas actuales, ceder a éstos los electrones en exceso, o substraerle los electrones en defecto. Es éste otro punto débil de la teoría, además del que he señalado antes.

La misma teoría no ofrece ninguna explicación adecuada del hecho de que existan, por manera de decir, dos valores característicos de la f. e. m. de polarización: el valor de descomposición de Le Blanc, o sea la f. e. m. mínima por arriba de la cual el fenómeno de la polarización se hace sensible, y una corriente continua y constante de intensidad apreciable pasa por el circuito, y una f. e. m. máxima, a la cual nos acercamos tanto más, cuanto más intensa sea la corriente polarizante.

El hecho notable es que el potencial químico, empleando tal denominación para indicar la energía libre, referida a un equivalente-gramo, o sea la que puede transformarse en energía eléctrica en el proceso de oxidación del hidrógeno, aparece en la electrolisis muy superior a la que se manifiesta en la combustión de un gramo de hidrógeno.

¿Cómo explicarlo? La hipótesis que propongo es la siguiente: el hidrógeno y el oxígeno que se desprenden en contacto con el cátodo y el ánodo, respectivamente, se encuentran en estado naciente o sea atómico. El exceso de f. e. m. corresponde a la mayor energía de los dos cuerpos en tal estado. Si realmente el valor 2,78 v. representa el máximo, tendremos, despreciando el calor secundario:

$$C = \frac{96540 \times 2{,}78}{4{,}186} = 64114 \text{ calorías,}$$

y el calor en exceso con respecto al que desarrolla la combustión de un gramo de hidrógeno, será:

$$64114 - 34000 = 31114 \text{ calorías.}$$

El estado atómico es sumamente inestable; los átomos se unen continuamente formando las moléculas H_2 y O_2, con desarrollo de calor, o sea con desaparición de energía libre, que ya no puede transformarse en energía eléctrica.

Se establece así un estado de equilibrio entre los átomos libres que se forman en el proceso de electrolisis y los que desaparecen como tales.

El valor de la f. e. m. de polarización, dependerá del estado de saturación de los electrodos en hidrógeno y oxígenos nacientes, estado de saturación que evidentemente aumentará con la intensidad de la corriente, llegando a su punto máximo cuando la f. e. m. sea debida casi exclusivamente a los átomos libres, puesto que los que se asocian para formar moléculas, se eliminan espontáneamente en forma de burbujas gaseosas que se desprenden de los electrodos.

En las consideraciones que anteceden, he omitido hablar de los potenciales debido a las posibles variaciones de concentración del electrolito, y de las potenciales de difusión, potenciales en general débiles, y que además no juegan ningún papel en la fórmula termodinámica de Lord Kelvin.

BIBLIOGRAFIA

HELMHOLTZ. *Berl.* Ber. 1883, p. 647.
NERNST. *Theoretische Chemie*, 1913.
NERNST. *Zeitschr. f. phys. Chem.*, **2** p. 613, **4** p. 140, 1889 y W. A. **45**, p. 360.
JAHN. W. A. **28** pags. 21, 491, 1886 y **50** p. 189, 1893. *Zeitsch. f. phys. Chem.* 28, 1895.
P. JANET. *Eclairage électrique*, 12 Octubre 1895, p. 49.
LE BLANC. *Lehrbuch aer Electrochemie - Zeit f. plys. Chem.*, 8, 1891, p. 289.
JONES. *Trattato di Chimica Fisica*, edición italiana, 1923.
HOLLARD. *La Théorie des Jons et l'Électrolyse*, 1912.
CHWOLSON. *Traité de Physique*, edición francesa, t. IV.

A NEW WOODBORING LEPIDOPTERON, INJURIOUS TO FRUIT TREES IN ARGENTINA

(Family *Stenomidae*)

By AUGUST BUSCK

BUREAU OF ENTOMOLOGY AND PLANT QUARANTINE, UNITED STATES DEPARTMENT OF AGRICULTURE

Timocratica haywardi, new species

Face and head somewhat roughly scaled, white. Antenna ¾, white, outer half dusky, smooth above in the male biciliate on under side; in the female simple; in both sexes with basal joint heavily thickened with scales. Labial palpus long, recurved, smooth, pointed; second joint long, thickened, with smooth scales, slightly roughened at tip, inner side pure white, outer side with basal three-fourths reddish yellow and apical fourth white, and upper side with a deep black streak from base to middle; apical joint less than half the length of second, slightly thickened, with smooth scaling, pointed at apex, pure white, with extreme apex deep black. Maxillary palpus three-jointed, short, pendant, loescly scaled, white, with extreme base yellow. Tongue medium, spiraled, base clothed with white scales. Ocelli minute, black. Thorax smooth, white. Fore wing with costa nearly straight, slightly arched; apex rounded; termen oblique, rounded; white, with a silky sheen and with basal third of costal edge narrowly yellow; cilia white; under side white, faintly suffused with light yellow and with costal area above the cell darker yellow; veins faintly light yellow; cilia and terminal edge pure white. Hind wing white above and below, slightly yellowish along costa on under side. Fore wing with 12 veins, all separate, 2, 3, 4, and 5 approximate from end of cell; 7 to apex. Hind wing with 8 veins, 3 and 4 connate or short-stalked, 5 closely approximate to 4, 6 and 7 closely approximate, connate or short-stalked. Abdomen white. Front legs with coxae deep yellow, margined exte-

riorly with black; femora yellow sprinkled with black; tibiae with upper half yellow, lower half black; tarsal joints black. Middle and hind legs white, with yellow tarsal joints and conspicuous black claws.

Male genitalia (figs. 1, 1*a*, 1*b*) with uncus strong, slightly curved, flattened, with lateral edges parallel and apex V-shaped; gnathos with long arms and spoon-shaped tip; harpe elongate, rounded at tip, inner side clothed on outer half with stout bifurcate spines.

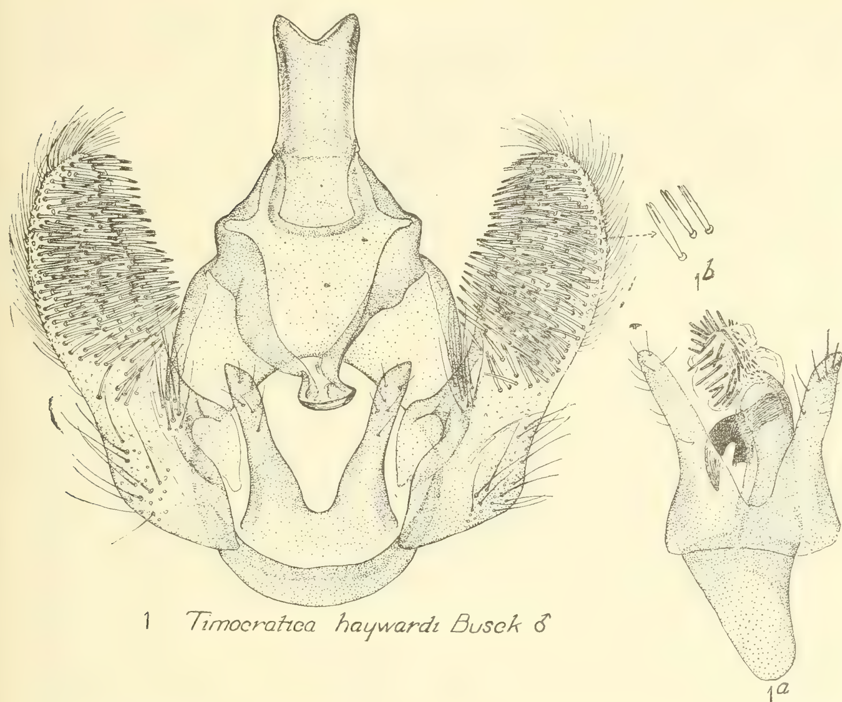
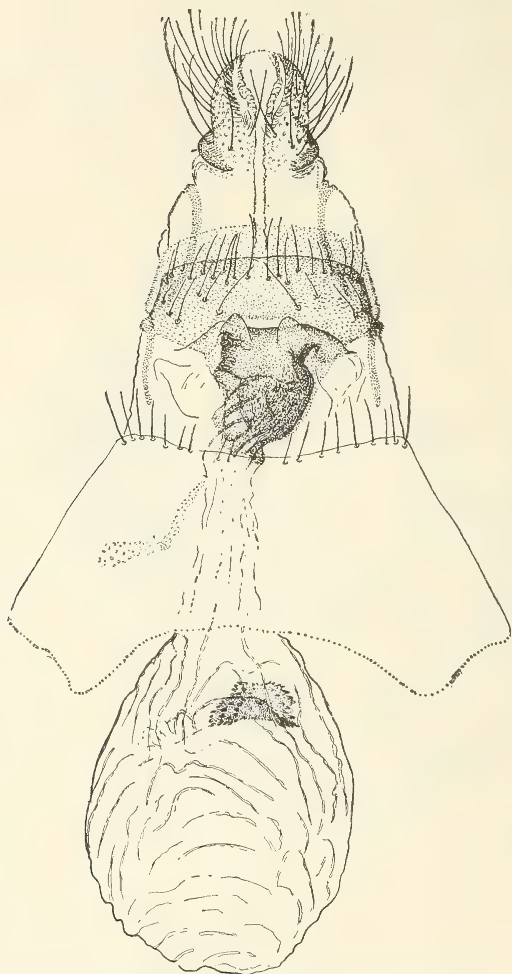


Fig. 1, *male genitalia with aedoeagus removed.* - Fig. 1 a, *Aedoeagus and anellus.* - Fig. 1 b, *Furcate spines of the harpes, much enlarged.*

Vinculum simple; anellus rectangular, with two long lateral processes nearly as long as the base is wide; aedoeagus short, stout; penis armed with one large, strongly chitinized hook and several stout, but smaller spines.

Female genitalia (fig. 2) with lobes of the ovipositor small; ductus bursae short, heavily and irregularly sclerotized on terminal third next to the ostium, longitudinally wrinkled on other two-thirds of its length; bursa moderate, oval in outline, signum

a spiny oval plate, inwardly bent on the middle, bursa wall finely wrinkled.



2. *Timocratica haywardi* Busck ♀

Fig. 2. - *Female genitalia.*

Alar expanse, 32 - 40 mm.

Type. — U. S. National Museum Nº 52792.

Type locality. — Concordia (Entre Ríos) Argentina.

Food plants. — *Psidium, Eugenia edulis,* and several cultivated fruit trees, including apple, plum, peach, and others.

Named in honor of the collector, Mr. KENNETH J. HAYWARD, who reared the species from caterpillars boring in the solid live wood of trunks and branches of the food plants. Mr. HAYWARD states that the species is of economic importance, doing severe damage to fruit trees.

In the United States National Museum are specimens of this species, reared from branches of coffee, together with a branch tunnelled by the larva longitudinally for several inches in the center of the hardwood.

The species belongs in a group of several very similar large white moths, difficult to distinguish from one another except by details of the genitalia and of the coloration of the feet and underside of the wings.

At my suggestion Mr. HAYWARD sent speciments, under his Nº 3258, to the late EDWARD MEYRICK, who erected the genus *Timocratica* and who has described most of the known species.

His reply was one of the last entomological opinions he rendered, as he died a few days later, on March 31, 1938.

« Nº *3258 Stenoma* n.sp. I consider nearest *maturescens* MEYRICK. These unicolorous species are a difficult sutdy, being very similar and probably numerous. In accordance with your request I do not name it. The larval habits are a surprise to me and very interesting; the polyphagous taste however is not unusual with stemborers, the texture of the skin being perhaps more important than the taste. Probably the allied species of this genus (which I do not agree to be *Timocratica* MEYRICK) may be equally indiscriminate in their choice ». (MEYRICK, in litt.).

I agree with my late, eminent friend, that Mr. HAYWARD'S species is nearest to *Timocratica maturescens* MEYRICK, the type of which is in the United States National Museum. *T. haywardi* is a somewhat smaller species, with more rounded apex of the fore wing; the tibiae of the middle and posterior legs are white, not yellow as in *maturescens,* and the underside of the fore wing lacks the fuscous apical edging found in MEYRICK'S species.

MEYRICK'S objetion to the inclusion of the white species in *Timocratica* with the typically brown species was based (aside from the color) on the forking of veins 2 and 3 in the fore wing, as found in some of his brown species. This character, as Mr. MEYRICK himself admitted, is not constant but varies within the species (even within his brown species), as it does in many species of the family *Stenomidae,* and is thus not a reliable generic character.

The genitalia of both male and female are so closely similar in the brown and in the white species that I am constrained to include them all in one genus.

(The drawings were prepared by Eleanor A. Carlin, of the Bureau of Entomology and Plant Quarantine).

Resumen

El autor describe una nueva especie de lepidóptero de la familia *Stenomidae,* la *Timocratica haywardi,* que dedica a su descubridor, el entomólogo Kenneth J. Hayward. Las orugas que taladran el leño vivo de los troncos y ramas de *Psidium* sp., *Eugenia edulis,* manzano, ciruelo, duraznero y otros frutales, fueron criados por el precitado entomólogo en Concordia, provincia de Entre Ríos, quien las considera una plaga importante de estas especies. En el Museo Nacional de Estados Unidos, también existen ejemplares de esta nueva especie criados de ramas de cafeto. Por indicación del señor Busck, el entomólogo Hayward remitió ejemplares de la nueva especie al microlepidopterólogo Edward Meyrick, creador del género *Timocratica,* quien la colocó cerca de *maturescens* Meyrick. Esta opinión fué una de las últimas emitidas por el afamado autor recientemente fallecido.

CISSITES MACULATA Swederus (Col. *Meloidae*) SA LARVE PRIMAIRE

PAR LE DR. A. CROS

RESUMEN

El autor describe la larva primaria del coleóptero meloido *Cissites maculata* SWED., especie propia de las Américas del Sur y Central (con excepción de Chile, según P. DENIER) confundida durante mucho tiempo con su congénere *Cissites auriculata* CHAMP., que habita el Norte de América y también México, Guatemala, Costa Rica y la isla Barbada (Antillas).

Se trata de una larva que vive como parásita en los nidos de los himenópteros malíferos del género *Xylocopa*, llamados entre nosotros mangangaes, hábito que fué observado por primera vez, en el año 1825, por el R. P. GUILDING y ratificado sesenta años más tarde por FLEUTIAUX y SALLE, según las observaciones de VITRAC.

La novedad de este trabajo consiste en que por primera vez, se da a conocer la larva primaria de un representante del género *Cissites*, el que fué hallado por el especialista en Meloidos entomólogo Pedro DENIER, en Yerba Buena, Tucumán, en el nido de *Xylocopa eximia* PÉREZ.

Décrite par SWEDERUS en 1787 sous le nom de *Cucujus maculatus* (Vetensk. Ac. Nya Handl. 1787 p. 199, pl. viii, fig. 8), cette espèce habite exclusivement le Nouveau Monde. D'après. G. CHAMPION (Biologia centrali-americana, Ins. Col., vol. IV, part 2, Heteromera (pars), 1889-1893, p. 371-372) elle est commune dans la région tropicale de l'Amérique du Sud et remonte au nord dans l'Amérique centrale et jusqu'au Mexique. M. Pierre DENIER (Coleopterorum americanorum familiae Meloidarum Enumeratio synonymica. Revista Soc. Entom. Argentina, Vol. VII, 14-XI-1935, p. 151) lui donne pour habitat l'Amérique centrale, les Antilles et toute l'Amérique du Sud, à l'exception du Chili.

Au dire de CHAMPION elle a été longtemps confondue avec le *Cissites auriculata* CHAMP. qui habite l'Amérique du Nord, le sud-ouest de l'Arizona, le Mexique, le Guatemala, Costa Rica, les Antilles (Barbade). C'est à ce dernier *Cissites* que doit être rapporté

d'après lui l'*Horia maculata* de DUGES et de LECONTE et HORN, ainsi que l'insecte de la Barbade mentionné par LANDSDOWN GUILDING.

Le *Cissites maculata* est assez variable comme coloration : aussi en a-t-on décrit plusieurs variétés. La forme typique a les élytres noires à la base et à l'apex, et présente dans l'intervalle diverses macules noires. CHAMPION considère comme une simple variété de cette espèce *Horia apicalis* Perty du Brésil, dont les élytres ne présentent aucune macule entre les taches basales et apicales. Il signale également une variété à elytres noires qui se rencontre en Colombie.

M. PIC (De l'utilité des noms de variétés. Bull Soc. Ent. Fr., 1929, N. 4, p. 80-82) a désigné sous le nom de *Championi* cette variété à élytres noires, qui existe également dans la République Argentine, d'après M. PIERRE DENIER. Enfin dernièrement (1932) M. le Dr. J. G. BETREM (Beiträge zur Kenntniss des Tribus der *Horiini* der Familie der *Meloidae* (Col.). I. Die Systematik der *Horiini*. Treubia, vol. XIV, livr. 1, déc. 1932, p. 87) a décrit une variété *intermedia* qui ne présente qu'une ou deux macules entre les taches basales et apicales.

Le Révérend LANDSDOWN GUILDING qui eut l'occasion d'observer le *Cissites maculata* à Cayenne (Guyane française), fut le premier à faire connaître son genre de vie (Trans. linn. Soc. London, XIV, 1825, p. 316, pl. VIII, fig. i, h : XV, 1826, p. 511-512 (pars) : il montra que cet insecte se développait en parasite dans les nids d'un hyménoptère mellitère, la *Xylocopa teredo*. Il décrivit et figura la larve secondaire se nourrissant du miel de cet hyménoptère, et donna également un dessin de la nymphe. Celle-ci se trouvait dans une cavité creusée probablement par la larve au-dessous de la cellule de la Xylocope. Mais cet observateur n'a pas vu les oeufs ni la larve primaire, et ne parle pas de l'hypnothèque dont il aurait pu voir la dépouille à côté de la nymphe. Mais il est fort excusable, car la forme contractée des larves des *Meloidae* n'était pas encore connue. Il résulte néanmoins de son observation, quoique incomplète, que le parasitisme du *Cissites maculata* chez une Xylocope est indiscutablement établi.

Soixante-sept ans plus tard Ed. FLEUTIAUX et SALLÉ (Liste des Coléoptères de la Guadeloupe, Ann. Soc. Ent. Fr., 1889, p. 433) firent connaître l'existence de ce Coléoptère à la Guadeloupe, et son parasitisme probable chez une antre espèce de Xylocope, *Xylocopa aeneipennis* DE GEER, d'après les observations de VITRAC qui avait vu maintes fois ce *Cissites* sortir d'un nid de cet hyménoptére.

Mais les premiers états de ce coléoptère étaient demeurés inconnus jusqu'à nos jours. Cette lacune vient d'être comblée, au moins en partie. En effet, mon excellent Collègue et Ami, M. Pierre DENIER, de Buenos Aires (République Argentine) a eu l'amabilité, dont je ne saurais trop le remercier, de me communiquer pour en faire l'étude, une préparation de la larve primaire de cet insecte, dont l'étiquette porte les indications suivantes :

« Tucumán, Yerba Buena, ♀ en nido de *Xylocopa eximia* Pérez (det. E. E. BLANCHARD, leg. J. BOSQ). *Cissites maculata* SWED. Triungulino obtenido de un desove en cautiverio ».

A cette préparation étaient jointes de très belles microphotographies de la larve en question, à des grossissements divers, exécutées par Mm. le Dr. Miguel JÖRG et Pierre DENIER. Elles sont d'ailleurs reproduites dans le présent travail.

Il ressort de ce qui précède que cette espèce de *Cissites* n'est pas inféodée exclusivement à une seule espèce de Xylocope, mais que suivant les contrées elle peut se développer aux dépens des espèces locales, sans toutefois s'adresser à un autre genre de Mellifères.

Je n'ai malheureusement aucun renseignement sur l'époque de la ponte, ni sur le nombre et l'aspect des oeufs et la durée de l'incubation. Peut-être M. BOSQ qui a obtenu la ponte et son éclosion, et M. Pierre DENIER qui possède une nymphe de ce *Cissites*, pourront-ils donner dans des travaux personnels quelques indications sur ces divers points, de manière à compléter l'histoire de la vie évolutive de cet intéressant parasite.

Je me bornerai donc à décrire la larve primaire qui m'a été confiée, et dont la légitimité d'attribution ne saurait évidemment être mise en doute.

DESCRIPTION DE LA LARVE PRIMAIRE

Aspect général. — Larve hexapode, d'une couleur uniforme jaune clair, chitinisée, de forme naviculaire ou plutôt pisciforme, convexe sur le dos, aplanie à la face ventrale, composée de 13 segments : la tête, 3 segments thoraciques et 9 segments abdominaux, dont le dernier porte deux fines soies caudales divergentes, dirigées en dehors et plus ou moins recourbées ; à extrémité antérieure ogivale, grossissant d'avant en arrière jusqu'au niveau du mésothorax, ayant sa plus grande largeur à ce niveau, diminuant ensuite progressivement de largeur d'avant en arrière depuis le mésothorax jusqu'à l'extrémité de l'abdomen.



FIG. 1 (x 82).

Longueur sans les soies caudales : 1 mill. 7 ; avec les soies caudales : 1 mill. 85 ; largeur maximum au niveau du mésothorax : 0 mill. 4.

Tête de forme ogivale en avant, élargie fortement en arrière, à angles postérieurs presque droits réunis par une crête semi-circulaire transversale, en arrière de laquelle existe un rétrecissement marqué qui constitue une sorte de cou s'invaginant sous le bord antérieur du prothorax ; à bord posterieur rectiligne ; plus longue

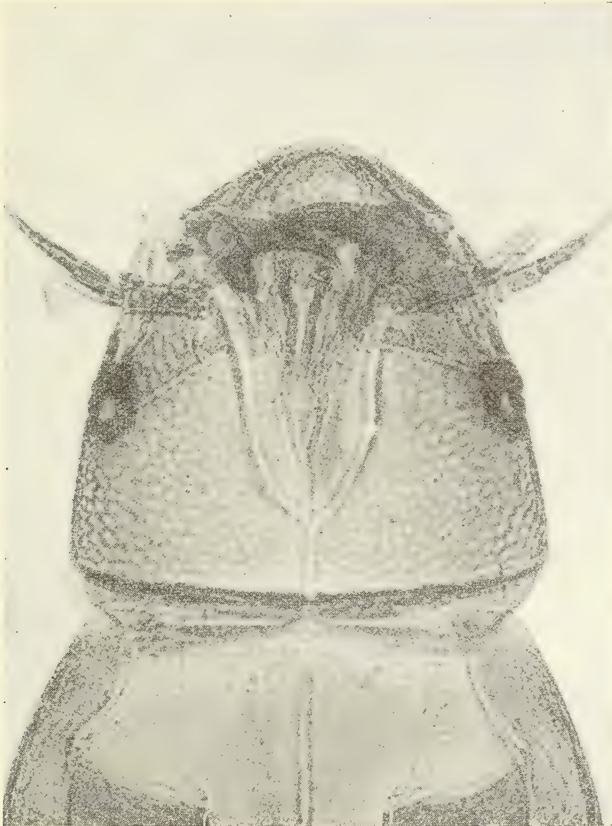


Fig. 2

que large, d'un quart plus longue que le prothorax ; ayant sa plus grande largeur au niveau de ses angles postérieurs, légèrement plus large à ce niveau que le bord antérieur du premier segment thoracique. Elle présente en arrière à sa face dorsale, sur la ligne médiane, d'arrière en avant sur un cinquième de sa longueur, une ligne suturale claire qui se bifurque en avant en Y (ligne de déhiscense),

dont les deux branches formant un angle de 60 degrés environ s'incurvent bientôt en dedans, de manière à devenir à peu près parallèles et se diriger en avant; parvenues au tiers antérieur de la tête, elles se recourbent en dehors, et vont se perdre sur les parties latérales un peu en avant de la base des antennes. A la face inférieure, les deux hémicranes se rejoignent à peu près sur le tiers postérieur de la tête; la suture s'élargit un peu en avant, et présente bientôt de chaque côté une large échancrure gnathale semi-circulaire qui apparaît au niveau d'une ligne transversale passant un peu en avant des yeux, et occupe de chaque côté de la ligne médiane un quart de la largeur de la tête, et loge le maxillaire correspondant.

Chétotaxie. — La chétotaxie, sur l'unique sujet examiné, ne paraît pas très régulière: sur chaque hémicrane, il y a trois poils en arrière, l'un situé un peu avant la bifurcation de la ligne de déhiscence, les deux autres plus en avant suivant une ligne qui du côté droit est à peu près droite, parallèle à la branche droite de la suture en Y; du côté gauche ils forment avec le premier une ligne brisée, le poil situé le plus en avant étant fortement rejeté sur le côté. Un quatrième poil se trouve près du bord postérieur de la tête, plus rapproché de la ligne de déhiscence que du bord latéral de la tête. Il existe en outre sur chaque hémicrane deux poils au voisinage des yeux à leur côté interne. Sur le segment céphalo-frontal compris entre les deux branches de la ligne de déhiscence se trouvent de chaque côté deux poils situés non loin de la branche correspondante de cette ligne, l'un sur le trajet d'une ligne transversale qui passerait légèrement en arrière des yeux, l'autre sur une ligne passant en avant de ces organes, un peu en arrière des antennes. Sur le bord antérieur de la tête, on voit de chaque côté deux poils assez longs, dirigés horizontalement en avant.

Sauf ces derniers, tous les poils céphaliques sont très petits et difficilement visibles si ce n'est à un très fort grossissement.

Yeux simples, situés sur les bords latéraux de la tête près de son tiers postérieur, à une certaine distance en arrière de la base des antennes, offrant une lentille hémisphérique bombée transparente, entourée d'une zône circulaire de pigment d'un noir intense.

Antennes situées un peu en avant des yeux sur les bords latéraux de la tête, composées de trois articles cylindriques: le 1er. court, en rondelle, aussi long que large; le 2e moins large que le 1er, plus long que large, ayant une fois et demie la longueur du 1er, portant à son extrémité distale deux poils minuscules et une

petite surface arrondie sans aucun relief, représentant l'organe sensoriel; le 3e article en bâtonnet, plus mince que le 2e, d'un quart environ plus long que lui, porte latéralement en arrière un peu au-dessus du milieu de sa hauteur un poil assez visible, et supporte à son extrémité apicale une très forte et très longue soie presque aussi grosse à sa base que le 3e article lui-même, et qui va en s'effilant de plus en plus jusqu'à devenir imperceptible. Cette soie a une longueur bien supérieure à celle de la tête (un quart en plus environ). Le 3e segment porte en outre à son extrémité apicale deux petits poils divergents, et à son tiers inférieur un pore arrondi assez volumineux.

Lèvre supérieure indistincte, probablement soudée au clypeus; celui-ci formé par le rebord antérieur de la tête présente de chaque côté à une distance assez considérable de la ligne médiane un poil assez développé bien visible, et plus en arrière un second un peu moins robuste, et un troisième en avant de la base des antennes. La lèvre se dessine à la face inférieure du clypeus sous la forme d'un bourrelet en demi-cercle bordé de poils très petits, nécessitant un très fort grossissement pour être mis en évidence; encore n'en distingue-t-on nettement que la base d'implantation sous forme d'un point rond. Une rangée transversale de petits poils analogues existe sur le milieu de cette demi-circonférence.

Mandibules robustes, fortement colorées en brun rougeâtre, situées assez loin en arrière du sommet de la tête, en avant de la base des antennes; se croisant au repos sur presque toute leur longeur, cylindro-coniques; à pointe recourbée assez aiguë présentant sur leur bord interne des encoches assez profondes délimitant six dents. Une apophyse formant un renflement considérable existe à la base de la mandibule, portant en dessous un condyle articulaire saillant, arrondi à son extrémité libre qui s'articule avec une surface cotyloïde existant dans le céphalo-frons à la partie correspondante.

Maxillaires allongés, à stipe globuleux, plus épais à la base qu'au sommet qui est arrondi, et porte quelques petits poils; son bord interne paraît inerme. Son aspect général est celui d'un cône à sommet émoussé, à bords arrondis à la base. Il porte près de sa base, en dehors, une forte et très longue soie, très robuste à son origine qui va en s'effilant progressivement, extrêmement fine à son extrémité, débordant obliquement la tête au-dessous des yeux, et se prolongeant sur cette préparation jusqu'au niveau de ses angles postérieurs où elle se recourbe en demi-cercle en dedans. La

longueur de cette soie atteint presque celle de la tête. A côté d'elle, à sa base, le stipe porte quelques autres patits poils. Cardo transversal assez fort.

Palpes maxillaires de trois articles presque d'égale grosseur: le 1er. court, en rondelle cylindrique, une fois et demie plus large que long; le 2e. également cylindrique, ayant à peu près la même grosseur, deux fois plus long que large, portant un petit poil à son extrémité distale sur son bord postérieur; le 3e. aussi long que les deux premiers réunis, un peu plus mince à la base où il est un peu étranglé, un peu élargi sur son tiers moyen, surtout en dehors, ce qui le fait paraître comme un peu courbe; il porte un peu au-dessus de la moitié de sa longueur, en dehors, un petit poil, un autre en dedans au tiers supérieur. Il se termine par une surface plane portant plusieurs petites papilles dont une plus développée.

Lèvre inférieure très difficile à bien voir. Elle m'a paru étre étroite, à grand diamètre transversal, à bord libre excavé, à angles antérieurs fortement arrondis, à bord postérieur rectiligne, portant vers le milieu de ses bords latéraux les palpes labiaux.

Palpes labiaux très difficiles à voir nettement; composés de deux articles cylindriques, le 1er très court, en rondelle, le 2e en forme de bâtonnet un peu plus mince que le 1er et de longueur double.

Mentum un peu plus large que la lèvre inférieure, se continuant avec la *Gula* sans ligne de démarcation bien nette, en forme de lamelle en triangle très allongé, portant vers son milieu deux poils de petites dimensions qui ne sont visibles qu'à un très fort grossissement.

Prothorax d'un tiers environ moins long que la tête, ayant à son bord antérieur à peu près la même largeur que celle-ci, beaucoup plus large qu'elle (d'un quart environ) à son bord postérieur, à bords latéraux un peu convexes, à bords antérieur et postérieur rectilignes. Son tergite est parcouru d'avant en arrière sur sa ligne médiane par une ligne suturale claire (ligne de déhiscence) faisant suite à la partie rectiligne de la suture en Y de la partie postérieure de la tête. Près de son bord antérieur existe une rangée transversale de petits poils espacés formant une ligne courbe dont la partie centrale est plus éloignée du bord du segment que les parties latérales; une bordure similaire plus régulière existe près du bord postérieur. Vers le milieu du tergite existe de chaque côté de la ligne de déhiscence et à quelque distance de celle-ci un petit poil isolé; un autre poil isolé analogue se voit de chaque côté

vers le tiers antérieur du segment plus en dehors, un peu plus près du bord latéral que de la ligne médiane. Le tergite forme un large repli latéral qui embrasse la face ventrale jusqu'à la hanche correspondante de la 1ère paire de pattes. Le sternite paraît simplement membraneux ne présentant qu'une chitinisation peu caractérisée. Il donne insertion de chaque côté aux hanches de la 1ère paire de pattes, qui sont rattachées à un renforcement chitineux semi-circulaire près du bord latéral du sternite. A la jonction de son tiers postérieur avec le tiers moyen, entre les hanches de la première paire de pattes, on voit deux poils assez forts, situés non loin l'un de l'autre de chaque côté de la ligne médiane; deux autres poils analogues, mais plus petits, existent non loin du bord antérieur.

Mesothorax d'environ un tiers moins long que le prothorax, d'une largeur à peine supérieure à celle du bord postérieur de ce dernier; présente comme lui à sa face dorsale une ligne suturale claire médiane antéro-postérieure (ligne de déhiscence) faisant suite à celle qui existe sur le prothorax et sur la tête. Comme le prothorax, il présente deux rangées transversales de petits poils, l'une près du bord antérieur, dont les deux poils voisins de la ligne de déhiscence de chaque côté, sont placés plus en arrière et peu plus développés, et une près du bord postérieur. En outre, un poil isolé se voit de chaque côté au tiers antérieur, plus rapproché du bord latéral que de la ligne médiane. Comme pour le prothorax, le tergite forme un repli latéral s'étendant jusqu'à l'insertion des hanches de la 2e paire de pattes. Le sternite, également comme celui du prothorax, est d'apparence membraneuse; il présente à son tiers antérieur de chaque côté de la ligne médiane un poil analogue à ceux qui existent à ce niveau chez le prothorax, mais plus écartés entre eux; en outre, à la jonction du tiers postérieur avec le tiers moyen, existent deux autres poils, un de chaque côté, beaucoup plus développés que les précédents et plus rapprochés l'un de l'autre. Le mésothorax donne attache à sa face inférieure à la 2e paire de pattes, dont les hanches sont reliées à un renforcement chitineux demi-circulaire de la membrane ventrale. Sur le repli latéral formé par le tergite existe de chaque côté, un peu en dessous, près de son angle antérieur, un gros stigmate rond.

Metathorax de même longueur que le mésothorax, mais un peu moins large; porte comme lui à la face dorsale une ligne de déhiscence médiane, un peu moins nette, moins caractérisée, comme simplement ébauchée, en arrière surtout. La disposition des poils dor-

saux est semblable à celle du mésothorax. Le tergite présente également de chaque côté un rebord latéral, mais moins développé que chez les deux segments précédents, de sorte que le sternite membraneux est proportionnellement plus large que sur le mésothorax. Il offre comme ce dernier de chaque côté de la ligne médiane un poil au tiers antérieur et un autre au tiers postérieur. Ces poils sont plus forts que les poils similaires du mésothorax, et plus écartés entre eux; les poils de la paire postérieure son plus rapprochés entre eux que ceux de la paire antérieure. A sa face inférieure, ce segment donne attache à la 3e paire de pattes dans les mêmes conditions que les deux segments précédents aux pattes correspondantes.

Abdomen composé de 9 segments bien apparents, avec revêtement chitineux aussi bien à la face ventrale qu'à la face dorsale. Les huit premiers ont tous sensiblement la même longueur, qui est de près de moitié moindre que celle du métathorax; celle du 9e au contraire est à peu de choses près la même que celle du métathorax. Leur largeur va en diminuant progressivement et régulièrement du 1er au dernier; celle du 1er est d'environ un cinquième plus petite que celle du métathorax, celle du dernier n'est que du quart de celle du premier segment de l'abdomen. Tous les segments portent sur le bord postérieur de leur tergite une rangée de poils robustes équidistants au nombre d'une dizaine; le poil situé à l'extrémité du bord latéral de chaque côté est plus long que les autres. Il existe en outre sur le disque des tergites, un peu en arrière de leur milieu, une autre rangée de poils moins nombreux et de taille un peu moindre. A la face ventrale, le sternite du 1er segment ne porte en bordure postérieure que 4 poils, et deux poils au milieu du segment, un de chaque côté de la ligne médiane, à une certaine distance de celle-ci. Les 7 suivants en portent 8, plus 2 poils paramédians au centre du sternite. Le 9e segment porte à sa face dorsale sur la partie médiane une rangée de 4 poils, et plus en arrière, entre cette rangée et son bord postérieur qui est arrondi, une deuxième rangée de 4 poils. Sur le bord postérieur du tergite s'insèrent deux soies caudales divergentes d'une longueur peu supérieure à celle du segment. Ce segment a un tergite sensiblement plus long que le sternite. Il semble y avoir en arrière du 9e segment, à la face inférieure, un rudiment d'un segment anal présentant un petit tergite chitinisé, présentant également quelques petits poils en bordure. Ce tergite rudimentaire nécessite une grande

attention pour ne pas passer inaperçu. Le sternite de ce segment anal, s'il existe, est caché sous le 9e segment. Cette conformation me semble pouvoir être comparée à ce que Ch. Riley a décrit sous le nom de « subjoint » chez la larve d'*Epicauta vittata* F.

Pattes composées d'une hanche, d'un trochanter soudé au fémur, d'un fémur (ou cuisse), d'un tibia et d'une griffe ou tarsungulum.

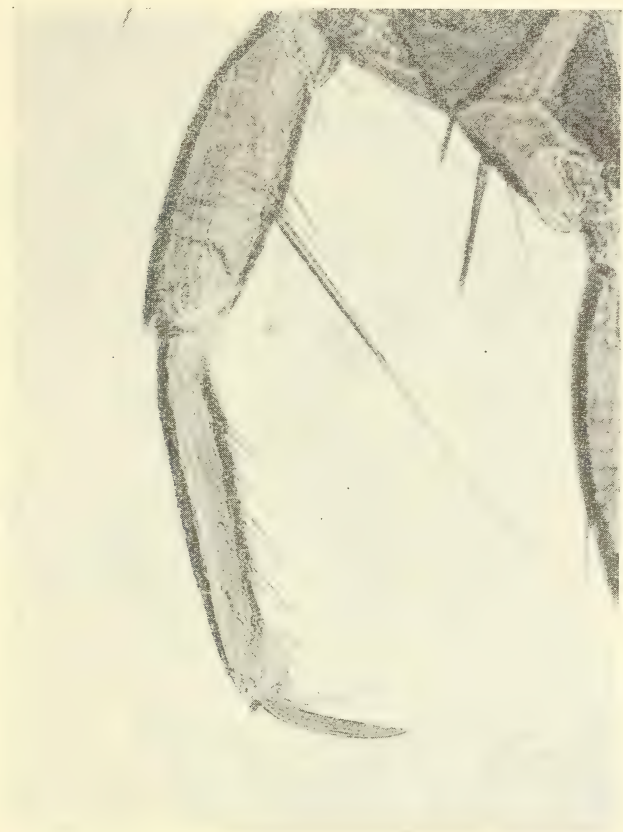


Fig. 3

Hanche en tronc de cône aplati, à bord interne droit, à bord externe un peu convexe; plus large que longue à sa base, mais le côté externe est plus long que le côté interne, la base un peu excavée. Les hanches de la 2e paire sont moins volumineuses que celles de la 1ère paire, et celles de la 3e encore moins fortes que celles de la 2e; en outre les hanches de la 1ère paire sont plus rapprochées l'une de l'autre que celles des deux autres, dont l'écartement

est une fois et demie plus considérable. Elles portent près de leur bord inférieur, et à la partie inférieure de leur bord externe quatre poils spiniformes, très robustes, dont le plus externe est particulièrement développé, et quelques autres poils plus médiocres disséminés.

Trochanter un peu arqué, concave à la face supérieure, convexe à la face inférieure, assez mince à son articulation avec la hanche, élargi à sa réunion au fémur auquel il est soudé obliquement; il est pourvu sur sa convexité de trois robustes poils épineux, dont un plus gros et plus long que les deux autres.

Fémur un peu renflé au milieu, un peu comprimé latéralement, portant à sa face supérieure, à la jonction du tiers moyen avec le tiers inférieur, un poil spiniforme obliquement dirigé vers le genou, et sur sa face latérale, à peu près au même niveau, vers le milieu de cette face, un autre poil analogue. Sur son bord inférieur vers son milieu existe une très robuste et très longue soie dont la longueur dépasse sensiblement celle du tibia et du tarsungulum réunis. Cette soie offre cette particularité remarquable, qu'au lieu de se terminer en pointe effilée, comme le font d'ordinaire les soies de cette sorte, elle se termine par un renflement ampullaire très caractérisé. Cette longue soie est insérée un peu obliquement sur le fémur, et absolument rectiligne, comme si elle était rigide. Près de cette soie, et un peu en amont, existe un poil spiniforme semblable aux autres poils existant sur la cuisse.

Tibia en bâtonnet cylindrique, un peu comprimé latéralement, portant sur tout son pourtour un grand nombre de poils spiniformes obliquement dirigés vers le bas, également accusés sur le bord interne des tibias des trois paires, où ils sont au nombre de 5 ou 6, peu accusés sur le bord externe des tibias de la 1ère paire, plus apparents sur ceux de la 2e et surtout de la 3e paire. Les tibias vont en augmentant de longueur de la première à la troisième paire d'une manière assez sensible, ceux de la 3e paire ayant une fois et demie la longeur de ceux de la première.

Tarsungulum. — La patte se termine par un ongle tarsal qui paraît tout d'abord avoir un aspect falciforme, mais qui vu à un très fort grossissement présente à son extrémité quelques fines dentelures. A sa base prend naissance un poil onguiculaire conique, pointu, très robuste, n'ayant que la moitié environ de la longueur de l'ongle tarsal proprement dit. Celui-ci présente à sa base, en dessous, un renflement assez marqué, et c'est de ce renflement

que se détache le poil onguiculaire, faisant avec lui un angle très aigu. J'ai essayé de voir s'il n'y aurait pas deux poils onguiculaires semblables, un à droite, l'autre à gauche de l'ongle tarsal, comme chez les larves des *Lyttinae* et autres, d'autant plus qu'au point d'implantation de ce poil onguiculaire on distingue comme deux pores piligères contigus. Malgré l'examen le plus attentif, je n'ai pu arriver à en apercevoir un second. Ce poil onguiculaire paraît donc bien être unique, et en ce cas le tarsungulum serait bifide, comme cela existe très nettement chez les larves d'*Horia Debyi* Fairm. et d'*Horia insularis* Cros.

———

Caractères distinctifs. — Cette larve se caractérise par sa taille : 1 mill. 7, sa belle couleur jaune clair, ses longues soies fémorales avec un renflement ampullaire terminal, son tarsungulum formé d'un ongle tarsal bien développé, pourvu d'un poil onguiculaire n'ayant que la moitié de la longueur de cet ongle tarsal, et beaucoup moins fort que lui.

Ces caractères permettent de la distinguer sans la moindre difficulté de la larve du *Cissites auriculata* Champ., espèce de l'Amérique centrale, qui constitue avec *C. macutla* toute la représentation de la tribu des *Horiini* dans le Nouveau Monde. *C. auriculata* a comme *C. maculata* une couleur jaune, et son tarsungulum est du même type ; mais sa taille n'est que de 1 mill. 2, par conséquent sensiblement plus petite, et ses soies fémorales ne présentent pas de renflement terminal appréciable.

En ce qui concerne cette particularité des soies fémorales, qui n'avait pas encore été signalée, j'ai fait un examen comparatif des autres larves de la tribu des *Horiini* en ma possession, et j'ai constaté que la larve d'*Horia Debyi* Fairm. caractérisée d'autre part par son tarsungulum bifide d'un type spécial, présent cette même disposition qui m'avait échappé, comme elle avait echappé à M. le Prof. Dr. E. Bugnion, qui le premier a décrit cette larve sous le nom de *Cissites testaceus* Fabr.. Semblable particularité existe également, ainsi que j'ai pu m'en assurer, chez la larve d'*Horia insularis* Cros (= *H. Roepkei* Betr.), qui présente la même conformation générale, et notamment la même forme de tarsungulum que celle d'*H. Debyi,* mais dont la taille est de moitié plus petite, ce qui rend cette constatation très difficile. J'ai retrouvé également ce caractère sur une larve de la tribu des *Horiini,* d'es-

pèce inconnue, provenant du Congo belge, capturée à Kimpese (District des Cataractes) par la R. P. SCHEPENS sur *Xycolopa flavorufa* DE GEER var. *combusta* SM.. Cette larve, encore inédite, mais dont la description paraîtra très prochainement, m'a été obligeamment communiquée pour étude par M. FRITZ CARPENTIER, Docteur en Sciences, Conservateur à l'Université de Liège (Belgique). Elle a une taille analogue à celle de *Cissites maculata* (1 mill. 75), mais elle est d'une couleur ferrugineuse, ce qui suffit à différencier les deux espèces. *Cissites maculata* se sépare du reste sans difficulté de toutes les autres larves des *Horiini* de l'Ancien Monde, toutes de couleur jaune, ayant des tarsungulums analogues aux siens, mais dont aucune ne présente des soies fémorales terminées par un renflement appréciable, et qui d'ailleurs ont toutes une taille inférieure à la sienne : *Horia fabriciana* BETREM (= *H. testacea* FABR. = *H. africana* AURIV.) long. : 1 mill. 2 ; *H.* (*Synhoria*) *maxillosa* FABR., long. : 0 mill. 8.

Cet examen comparatif m'a conduit en outre à me rendre compte que les larves d'*Horia fabriciana* BETREM (=*H. africana* AURIV.), *H.* (*Synhoria*) *maxillosa* FABR., *Cissites auriculata* CHAMP., auxquelles j'avais cru pouvoir attribuer des tarsungulums avec un ongle tarsal falciforme portant à sa base deux poils onguiculaires, un de chaque côté (type en fourche à trois branches), n'en présentent en réalité qu'un seul, comme *Cissites maculata.* Du moins sur aucune de ces larves je n'ai pu apercevoir nettement deux poils onguiculaires.

Je profite de cette occasion pour rectifier une autre erreur que j'ai commise au sujet de la larve d'*Horia* (*Synhoria*) *maxillosa* FABR. (Révision des espèces africaines et orientales des genres *Horia* FABR. et *Cissites* LATR., avec description de larves inédites. Bull. Soc. Roy. Ent. d'Egypte, séance du 9 janvier 1924, p. 24-80, 2 fig.). J'ai dit (p. 69) que chez cette larve il semblait y avoir de chaque côté de la tête deux ocelles contigus et juxtaposés de haut en bas. J'ai commis la même erreur pour la larve de *Cissites auriculata* CHAMP. (Révision des Genres *Horia* FABR. et *Cissites* LATR. Note rectificative et complémentaire. Bull. Soc. Roy. Ent. d'Egypte, 1927, fasc. 2-4, séance du 11 octobre 1927, p. 103-115, 2 fig.). Or j'ai pu me convaincre depuis lors que je m'étais illusionné, et qu'elles n'ont en réalité l'une et l'autre, comme dailleurs toutes leurs congénères, que des yeux simples, un de chaque côté de la tête.

Larves primaires de la tribu des *Horiini* actuellement connues de moi

Espèces américaines

1. *Cissites auriculata* Champion.
2. *Cissites maculata* Swederus.

Espèces orientales et africaines

3. *Horia Debyi* Fairmaire.
4. *Horia insularis* Cros (=*H. Roepkei* Betrem).
5. *Horia fabriciana* Betrem (= *H. testacea* Fabricius 1787 nec 1781; = *H. africana* Aurivilius).
6. *Horia* (*Synhoria*) *maxillosa* Fabricius.
7. *Horia* (*Synhoria*) sp. (Espèce originaire du Congo belge, encore inédite, dont la description paraîtra très prochainement).

Explication des figures

(D'après des microphotographies exécutées par MM. le Dr. Miguel Jörg et Pierre Denier).

Fig. 1. — *Cissites maculata* Sweder. Larve primaire. Vue d'ensemble (× 82).
Fig. 2. — Détails de la tête.
Fig. 3. — Une patte de la 2e paire.

a) Tarsungulum montrant les dentelures apicales de l'ongle tarsal;
b) Soie fémorale avec son renflement ampullaire terminal.

Bibliographie

La présente liste bibliographique n'a pas la prétention d'être complète: elle ne comprend que les travaux se rapportant plus particulièrement à *Cissites maculata* Swed, et aux larves primaires des espéces appartenant à la tribu des *Horiini*. Mais on trouvera dans Borchmann (Coleopterorum Catalogus, *Meloidae Cephaloidae*), et dans les ouvrages de C. J. Gahan et du Dr. J. G. Betrem indiqués ci-dessous, la liste à peu près complète des publications concernant les *Horiini* en général. Les lecteurs que ces questions peuvent intéresser sont priés de vouloir bien s'y reporter.

Beauregard (H.). — Les Insectes Vésicants, 1890, p. 311.

Betrem (Dr. J. G.). — Beiträge zur Kenntniss des Tribus der *Horiini* der Familie der *Meloidae* (Col.). I. Die Systematik der *Horiini*. Treubia, vol. XIV, livr. 1, Déc. 1932, p. 85-101, 7 fig., pl. VII.

BORCHMANN (R.). — Coleopterorum Catalogus auspiciis et auxilio. W. JUNK editus a S. SCHENKLING. Pars 69, *Meloidae - Cephaloidae,* 1917, p. 175.

BUGNION (Dr. E.). — Le *Cissites testaceus* Fab. des Indes et de Ceylan. Métamorphoses et appareil génital. Bull. Soc. Ent. d'Egypte, 1909, 4e fasc., octobre-décembre, p. 182-200, pl. I, II et III.

CHAMPION (G. C.). — Biologia centrali-americana, Col. IV, part 2, *Heteromera,* 1889-1893, p. 371. Trans. ent. Soc. London, 1896, p. 52.

CROS (Dr. A). — Révision des espèces africaines et orientales des Genres *Horia* Fabr. et *Cissites* Latr., avec description de larves inédites. Bull. Soc. Roy. Ent. d'Egypte, 1924, p. 24-80, 2 fig. — Révision des Genres *Horia* Fabr. et *Cissites* Latr. Note rectificative et complémentaire. Bull. Soc. Roy. Ent. d'Egypte, 1927, fasc. 2-4, p. 103-115, 2 fig. — *Horia testacea* Fabr. (=*H. africana* Auriv.). Sa larve primaire. Bull. Soc. Roy. Ent. d'Egypte, 1929, fasc. 1-3, p. 1-7.

DENIER (P.). — Colepterorum americanorum familiae *Meloidarum.* Enumeratio synonymica. Revista Soc. Ent. Arpentina, vol. VII, 14-XI-1935, p. 151.

DUGÉS (E.). — La Naturaleza, I, 1869-1870, p. 103, pl. I, fig. 4.

FLEUTIAUX et SALLÉ. — Liste des Coléoptères de la Guadeloupe. Ann. Soc. Ent. France, (6), IX, 1889, p. 433.

GAHAN (C. J.). — Notes on the coleopterous Genera *Horia* Fabr. and *Cissites* Latr., and a List of the described species. Ann. and Magaz. Nat. Hist., 1908, Nº 8, p. 199-204.

GUILDING (L.). — Trans. linn. Soc. London, XIV, 1825, p. 316, pl. VIII, fig. 6 (larve). — XV, 1826, p. 511-512 (pars).

LECONTE and HORN. — Classification of the Coleoptera of North America, Smith. Misc. Coll., vol. XXVI, 2nd édit., p. 417, 1883.

NEWPORT (G.). — The natural History of *Meloë.* Second Memoir. The History and general Anatomy of *Meloë* and its affinities. Read January 19th 1847. Trans. linn. Soc. London, 1851, t. XX.

PERTY. — *Horia apicalis.* Del. anim. art. Bras., 1830, p. 66, pl. XIII, fig. 14.

PIC (M.). — De l'utilité des noms dans les variétés. Bull. Soc. Ent. France, 1929, Nº 4, p. 80-82.

SWEDERUS. — Vetensk. Ac. Nya Handl., 1787, p. 199, pl. VIII, fig. 8.

BREVE ENSAYO SOBRE DON PEDRO DE CIEZA DE LEÓN Y LOS CARACTERES DE LA CONQUISTA INCAICA

POR

ALBERTO M. SALAS

(*Conclusión*)

De acuerdo con la capacidad económica que ellos evidencian, se determinaba la naturaleza y cantidad del tributo. Si la comarca era abundante de tierras feraces y laborables, o si en riscos y laderas podían construir sus ingeniosos andenes, tributaban los productos de su agricultura intensiva, verdadero milagro en algunas regiones; si había nutridos rebaños y en los pobladores del lugar, habilidad para el tejido, se contribuía con las telas que vestirían al Inca y a sus ejércitos; si minas de oro o de plata, se ponían a trabajar en ellas número determinado de indígenas, y mientras éstos pabagan su tributo con el metal precioso, otros lo cumplían cultivándoles las tierras. (1) Al considerar estos temas muéstrase Cieza como uno de los cronistas mejor informados, tanto al referirse a la manera de determinar el tributo como al tratar de sus calidades.

Algunas objeciones podrían hacerse a su testimonio. La más importante, la hemos señalado al considerar la Crónica, es que trata un poco blandamente el régimen tributario, que todo le parece natural y lógico, aun lo más inicuo.

Ante los tributos humanos, debidamente confirmados por Cobo, nuestro cronista, un cristiano, recordémoslo, conserva una impasibilidad que sorprende y desconcierta. Véase la flema con que relata el hecho: «...los cuales (mujeres y niños) sacaban del pueblo sin ninguna pesadumbre, porque si un hombre tenía un solo hijo o hija a ese tal no le tomaban, pero si tenía tres o cuatro tomábales una para pagar el servicio». (2)

(1) Cieza, *ibíd.*, XVIII, 64 a 70.
(2) Cieza, *ibíd.*, XVIII, 68.

Este y no más es todo el comentario que semejante tributo logra de nuestro cronista. Aunque la conformidad de aquellos que eran despojados de sus hijos fuera cierta, supongámoslo, creemos más sincero y natural el comentario del padre Cobo, quien aunque considera esta costumbre de « bárbaros », dentro del mundo de sus ideas, de sus resignaciones, no deja de censurarla reciamente como cristiano y europeo. No sería difícil además, que Cieza conocida la existencia del tributo, supiera también su destino, muy digno de tal recaudo, cual era ofrecer a sus dioses cruentos testimonios de fe o acrecer el serrallo del Inca.

Cuanto tributo gravita sobre el imperio, ya sea arrastrar sus enormes sillares del Cuzco hasta Quito, construir las hermosas carreteras, que como las calzadas romanas, aun se admiran, el no menos pesado de la guerra y sus trabajos auxiliares, o el arrancar los metales a la tierra, renovándose por mitas, son para nuestro Cieza de León, tributos suaves y fáciles de cumplir, adjetivos que cuida mucho no olvidar cuando se refiere a cualquier trabajo impositivo. Pero quien lea la Crónica con atención advertirá que el autor rehuye con cuidado su propia opinión, y sólo habla de la conformidad del indígena y del bienestar que les nace de esos trabajos.

Garcilaso de la Vega, como es de rigor, idealiza más que Ceiza este pacífico acatamiento, y tanto, que en su crónica, los trabajos antes que fatigas cotidianas, parecen placeres y entretenimientos de pueblo ocioso. Su parcialidad llega al extremo de decirnos, lo supo Prescott, que « El oro, la plata y piedras preciosas... no eran de tributo obligatorio que fuesen los indios obligados a darlo...» (1). Esto que yo transcribo sólo para dar idea de la parcialidad de Garcilaso, es impugnado por el mismo cronista, (cosa que ignoró Prescott, puesto que el argumento no es para desdeñarse) al decir, páginas más adelante: « Los mineros y fundidores de los metales y los demás ministros que andaban ocupados en aquel oficio no pagaban otro tributo sino el de su trabajo y ocupación. ...Eran obligados (!!) a trabajar dos meses y no más...» (2).

Refiriéndose en general a los tributos dice: «..y aunque no dexaba de haber algunas molestias por causa del tributo, o del servicio del Rey o de los curacas, los llevaban con gusto y contento, así por la pequeña cantidad ...y por las ayudas de costas que tenían, como

(1) Garcilaso, *ibíd.*, t. 3º, VII, 41.
(2) Garcilaso, *ibíd.*, t. 3º, XIV, 97.

por los muchos provechos que de aquellas pequeñas ocupaciones se les seguían...» (1).

Alguien acaso podría descubrir la conformidad de las anteriores palabras, con éstas que a nuestro juicio expresan la verdad que no pudo recatar el interés de Garcilaso: « Por esta causa en tiempo de los Incas eran estimados y tenidos por hombres ricos los que tenían muchos hijos y familia; porque los que no los tenían, muchos de ellos enfermaban por el largo tiempo que se ocupaban en el trabajo hasta cumplir con su tributo ». (2). Esta nueva traición que la conciencia le juega Garcilaso, refleja, según pensamos, sino toda, en parte, la verdad de las cosas, la realidad que Cieza no penetró o intentó disfrazar. Esta opinión nuestra, podría poner en tela de juicio cuanto hemos dicho acerca de las dotes políticas de los Incas, juicio no tan personal ni subjetivo, puesto que hemos procurado fundamentarlo en expresiones y hechos inequívocos. No pretendemos decir que los Incas exageraran crueldades, ni que con trabajos impositivos echaran por tierra la prudencia de las medidas que adoptaban con respecto a la religión, las costumbres, el gobierno, sino tan solo, que las cosas no suceden de la manera que Garcilaso y Cieza las relatan. Hacemos, sí, cuestión de matices.

Pensamos, por otra parte, que si muchos eran los trabajos, como inadvertidamente confiesa Garcilaso, y muy poca la libertad de aquel pueblo industrialmente ocupado, era éste el sistema mediante el cual se logró erigir un imperio incaico, y esta la condición que se avenía más con la psicología de sus individuos, que no la libertad, que luego de la conquista española fueron recibiendo gradualmente, y ante la cual se sintieron extraños y desconcertados. Dejamos constancia de que no es ésta, opinión tan propia que no la hayamos leído en la obra del mismo Cieza, y en la de algún otro cronista, ni tan arriesgada que no la confirmen los pobres resultados que con otros sistemas se logran del indígena americano, elemento racial abatido y casi inerte. Y si en su favor debemos mencionar hechos, allí están las misiones jesuíticas, que reglando íntegramente la vida y el trabajo de los indígenas, reduciendo la libertad y disciplinando a sus individuos en provecho de la colectividad, obtuvieron admirables resultados, a los cuales, en estos tiempos se trata de llegar con fortuna varia. Recapitulando, pues, mucho nos admira la «imper-

(1) GARCILASO, *ibíd.*, t. 3º XV, 102 y 103.
(2) GARCILASO, *ibíd.*, t. XV, 108.

sonalidad » de Cieza ante hechos que sin lugar a dudas extrañarían a un europeo, y su franca impavidez ante la contribución de seres humanos, detalles éstos, que a nuestro juicio, lo repetimos, disimulan una disculpa.

Por no dejar cabos sueltos, y por justificar, aunque en mínima parte el enunciado del capítulo, apelando al testimonio de otros cronistas, particularmente recurriendo al de Garcilaso, acabaremos en muy pocas líneas la descripción de este aspecto económico. Por otra parte, esta brevísima síntesis, podrá ampliarse con la lectura de la obra de Prescott que llevamos ya mencionada, y a la cual, en este sentido, pese a que ha sido escrita hace poco menos de una centuria, nada podría agregársele de nuevo e importante.

Todas las tierras laborables eran divididas en tres porciones, de las cuales una se destinaba al Sol, otra al Inca, y la tercera se parcelaba entre las familias del lugar, entregándose a cada una de ellas, una *chácara,* cuyas dimensiones dependían del número de sus individuos. Esta propiedad era inalienable y según asevera Garcilaso, anualmente era renovada la repartición, para que, cambiando todos los años de usufructuario, no se hiciera fuerte el vínculo que une al hombre a la tierra que labra. Cada varón, la mujer era libre de tributo, cuando menos de faenas agrícolas, estaba obligado a cultivar y cuidar de las tierras del Sol y del Inca, hecho lo cual, podía entonces, beneficiar las suyas. Ya hemos advertido las otras clases de tributos, razón por la cual nos disculpamos de hacerlo nuevamente, repitiendo, sin embargo, que ellos en cantidad y calidad, dependían estrictamente de los recursos de cada provincia. Los tributos recaudados, ya fueran del Inca o del Sol, eran almacenados en los depósitos, que en gran número estaban convenientemente distribuídos por todo el imperio.

Lo exigido en nombre del Sol era destinado al sostenimiento del nutrido clero peruano, de sus sacerdotes, adivinos, « casas de recluídas », etc., lo cual no quiere decir que el Inca dejara de acudir a ellos en caso de ingentes necesidades. Los del Inca, ya fueran alimentos, vestidos, armas, etc., se destinaban, en parte a la numerosa corte cuzqueña, y a vestir y municionar los grandes ejércitos y guarniciones ordinarias. Es necesario advertir que en lo referente a los depósitos, reclama Cieza los fueros de cronista bien informado y hasta los del mejor, y lo que de ellos escribimos ahora, lo extraemos de él, viéndose cumplidamente informado (1).

(1) Cieza, *ibíd.,* XI.

En caso de hambres y necesidades de una provincia, dícenos, se extraían de los mencionados depósitos, siempre bien provistos (hay cronista que afirma haber visto en ellos alimentos de 10 años atrás) lo necesario para librarse de la penuria, y que ella lo tornaba cuando acaecía cosecha abundante. Agrega, además, que se dispensaban de ellos, alimentos a los imposibilitados de lograrlos por sus propios medios, de donde en el Perú no existían menesterosos.

Estos depósitos que levantábanse en las ciudades, los más grandes en las capitales de provincia, o alejados de ellas, a la vera de los caminos, y llamados aquí *tambos* y « aposentos reales », indistintos para Cieza, son la causa primordial del orden observado en la tributación, del constante nivel de bienestar material, al amparar a provincias y comarcas de calamidades de hambres, y sin duda lo son también de más de un éxito del ejército incaico, merced a ellos perfectamente equipado.

En lo demás, los nuevos territorios eran organizados suprimiéndose toda propiedad particular; hasta los grandes rebaños eran fiscales, permitiéndose, como cuenta Carcilaso, la propiedad de algunas cabezas de sus ganados a los curacas y dignatarios, ley comunista mucho más elástica y tolerante cuando se refería a la casta de orejones y curacas.

CAPITULO III

A) Imposiciones religiosas

La religión ha significado siempre, para cualquier conquistador, una de las resistencias más difíciles de vencer, un problema cuya solución, es capaz, por sí sola, de dar la pauta de sus talentos.

La actitud del Señor Inca ante los credos de los nuevos vasallos es una nueva afirmación de sus habilidades políticas.

La unidad religiosa, junto con la lingüística, es uno de los elementos culturales de mayor importancia en la formación de un sentimiento nacional y de vínculos de verdadera hermandad. Esto procuraron y lograron los incas, imponiendo el culto al Sol sobre todos los dioses locales, y obligando en todo su imperio el uso de un mismo idioma.

Con respecto a la religión, nuestro cronista es uno de los menos explícitos, limitándose a decir en cierto pasaje de su crónica: «...y con pensar que bastaba que ellos mandasen por todas partes adorar

el Sol y a los más sus dioses, sin entremeterse en prohibir religiones», ([1]), según lo cual podemos afirmar que bastaba a su ortodoxia imponer el culto de sus dioses, sin importarles mucho que los súbditos continuaran en la adoración de sus viejos ídolos. Aunque esto es cierto en parte, no lo es del todo a fuer de incompleto, ya que ignoró Cieza, los detalles y circunstancias más interesantes. Si bien es innegable que la actitud de los incas era de transigencia y de tolerancia, no por ello renunciaban a atraerles por completo a su religión y de imponerles con especial cuidado el culto y doctrina de sus dioses «deslumbrándoles con su espléndido y pomposo ceremonial» ([2]).

El testimonio de Garcilaso, ampliamente corroborado por casi todos los cronistas que se ocuparon de este asunto, es el más cumplido, y al dar las causas de esta tolerancia relativa, es el que mejor traduce las dotes políticas de los conquistadores peruanos: «No echaban por tierra —dice— los dioses ajenos luego que conquistaban la provincia, por la honra della, porque los naturales no se desdeñasen del menosprecio de sus dioses, hasta que los tenían cultivados en su vana religión» ([3]). Cabe la aclaración que al decir Garcilaso «... hasta que...» etc., se refiere, puede verse en la misma página, a la renuncia voluntaria que hacían ellos de sus dioses, luego de desengañarse de sus «burlerías».

El padre Cobo, contradiciendo aparentemente a Cieza, pero en verdad, confirmándole, dice que procedían «...quitándoles los usos y ritos que antes tenían, o del todo o en parte, haciéndoles recibir los suyos» ([4]). El «en todo» se referiría, según pensamos, a los dioses de comarcas insignificantes y poco temibles, circunstancias que eximirían a los Incas de proceder con consideraciones.

Aceptando como cierta la tolerancia del Inca ante la religión de los sometidos veremos que ella no estaba basada en los principios de concordia y respeto mutuo, que son los que la inspiran en las sociedades democráticas actuales. Por el contrario, la benevolencia incaica, disfrazaba, con exacto sentido de las circunstancias, uno de sus más originales medios de pacificación.

Es cosa indudable que el Inca ordenaba que se llevaran al Cuzco, a veces al mismo templo del Sol (Morua), a la guaca o ídolo hacia el

([1]) Cieza, *ibíd.*, XXV, 99.
([2]) Prescott, *ibíd.*, Libro 1º, II, 89.
([3]) Garcilaso, *ibíd.*, t. 3º, XII, 77.
([4]) Cobo, *ibír.*, t. 3º, XXIII, 225.

cual tuviera más devoción el pueblo dominado, en donde era servido y reverenciado por sus fieles, que desde sus lugares acudían a ello por mitas (1). Así lo afirman Garcilaso (2), Acosta (3), Morua (4) y Blas Valera, testimonios, que atendiendo su número y a sus calidades, no son como para permitir la más mínima duda.

Mediante este habilísimo procedimiento logró el Inca transformar a la ciudad del Cuzco en una verdadero Caaba, convertir a la capital de su imperio en ciudad santa y capital de fe.

Las provincias y comarcas conquistadas no dependían solamente de las autoridades del Cuzco por providencias guerreras y gubernamentales, sino que les unía a ellas algo más firme y duradero, un lazo espiritual. Las consecuencias de esta medida, verdaderamente sabia y digna de encomio, son varias. No solo se logró con ella que las provincias no se revelasen, por temor de ver ofendidos a sus dioses en rehenes, sino que como dice Cobo: «...residían siempre en aquella ciudad (el Cuzco) y corte de indios de todas las provincias del reino, ocupados en la guarda y ministerio de sus ídolos donde aprenden los usos y costumbres de los cortesanos; y como se mudaban por sus mitas y turnos, vueltos a su patria, guardaban y enseñaban a los suyos, cuanto habían visto y aprendido en la corte» (5).

Puede advertirse que era éste otro de los medios que usaban para irradiar hacia los rumbos del *Tahuantinsuyu* sus costumbres, sus creencias, su mismo espíritu.

En esto como en lo tratado anteriormente, no anda Sarmiento por los términos medios, y su opinión es nuevamente desfavorable a los Incas, esta vez, no en cuanto a sus sentimientos o instintos, por hablar más de acuerdo con él, sino a su capacidad. «Y mandó —dice, refiriéndose a *Inca Yupanqui*— por todas las tierras que había conquistado, que tuviesen y venerasen las guacas del Cuzco arriba nombradas dándoles nuevas ceremonias para el culto dellas, y quitándoles sus antiguos ritos» (6). Para Sarmiento, pues, la inhabilidad del conquistador inca, llega al extremo de destruir los señores y dioses de los naturales, para unir así, a la inevitable reacción de la libertad perdida, la que provoca una fe avasallada.

(1) Cobo, *ibíd.*, t. 3º, XXIII, 225.
(2) Garcilaso, *ibíd.*, t. 3º, XII, 77.
(3) Acosta, *ibíd.*, 46.
(4) Morúa, Martín de, «Historia de los Incas, Reyes del Perú».
(5) Cobo, *ibíd.*, t. 3º, XXIII, 225 .
(6) Sarmiento, *ibíd.*, 77.

B) La unidad lingüística

Acerca de lo que se entiende comunmente por unidad política, caben muchas consideraciones, especialmente sobre su cohesión positiva. Las unidades políticas evidenciadas de manera precisa en los mapas, suelen ser contrariadas por la realidad, y en este sentido, refiriéndonos a territirios que han sido colocados bajo un mismo poder soberano, ya sea por conquistas o por alianzas, etc., se ha hecho clásico un imperio como el de Francisco José, y aun en nuestros días, por citar el más conocido, un estado como el Yugoeslavo, semillero y bullicio de irredentismo.

La historia en su transcurrir de siglos, nos muestra muy pocos estados territoriales, productos de conquistas, que constituyan una verdadera unidad política, no sólo de cosas, sino también de sentimientos. El imperio romano fué uno de esos milagros. Si se desmembró y en su suelo se constituyeron muchas nacionalidades, no fué porque germinara en el pueblo subyugado, que nunca así existió, odio hacia el conquistador, puesto que si hubo de haber un vencedor y un vencido, pronto se amalgamaron y confundieron; si todo aquel portentoso edificio se derrumbó, fué porque el estado romano, por lenta y natural evolución había llegado a la senilidad, y débil y mermado el vigor de antaño, no pudo soportar la ola bárbara. Si en su inmenso territorio existió unidad suma, no se debió sólo a las medidas de orden político, social y económico, sino que en buena parte, a una sabia medida espiritual, a la imposición pacífica o violenta, lo mismo da, del idioma latino. Y si a semejante medida la hemos llamado espiritual es porque sus consecuencias trascienden las simples ventajas de orden material, como el suprimir los inconvenientes derivados del empleo de muchos idiomas dentro de un mismo estado, porque el idioma es valuarte de nacionalismo y porque obligando a los pueblos a olvidar el propio y adoptar el del conquistador, empleaba el romano, a nuestro juicio, el más eficaz procedimiento para diluir nacionalidades.

Idéntico proceder observaban los incas en sus conquistas; los medios empleados eran los mismos, sin desdeñar la violencia. Así llegaron a imponer, por buenas o por malas, en un ámbito de más de mil leguas de extensión, el uso de una misma lengua, el quichua, a quien los cronistas conocen con el nombre de « lengua general ».

Dice Cieza que mandábanles «...que se gobernasen por sus leyes y costumbres y que todos hablasen la lengua general» (1).

Pero la percepción de Cieza en este aspecto, requiere algunas acotaciones. Según nos dice, esta imposición, intolerante en cuanto respecta al conocimiento del quichua no lo era tanto por lo que se refiere a su uso, ya que afirma: «... que si no era cuando algunos orejones andaban visitando las provincias, nunca en ninguna dejaron de hablar en lengua natural» (2). Esta tolerancia que les atribuye Cieza, no sabemos si será cierta, ni nos detenemos a considerarla, está muy de acuerdo con su visión material del asunto. Según él, se impone su uso «...para quitar inconvenientes y que unos a los otros se entendiesen» (3), y aun para Garcilaso, que enuncia como una de las causas que lo motivan «...por no tener delante de sí tanta muchedumbre de intérpretes como fuera menester para entender y responder a tanta variedad de lenguas y naciones como había en su imperio» (4). Como se advierte hasta aquí ambos reparan en las ventajas materiales. En cuanto atañe a Garcilaso, su opinión no se detiene ante los hechos sensibles, los supera. Mucho nos extraña, en verdad, que Prescott, sincero admirador de la conquista incaica, atribuya tan poca importancia a esta obliagción, basándose, cierto es, en el testimonio de Cieza, cosa que le disculpa, pero no haciendo caso, si es que reparó en ello, de lo que dice Garcilaso quien pese a lo transcripto anteriormente, conoció las verdaderas causas que movían esta disposición, o si no se quiere hacer a los Incas padres conscientes de tan sabia medida, sus íntimas consecuencias. Garcilaso, en la misma página que contiene la transcripción anterior, circunstancia que hace más inexplicable que Prescott no lo tomara en cuenta, agrega a lo dicho, el segundo y más importante objeto de esta providencia: «... hablándose y comunicándose lo interior de los corazones, se amasen unos a otros como si fuesen de una familia y parentela y perdiesen la esquivez que les causaba el no entenderse» (5). Esta penetración de Garcilaso, que le da en este aspecto indubitable superioridad sobre Cieza, la atribuimos más que a una investigación profunda y acabada, a una visión más aguda y sutilizada por su cultura, de todos conocida.

(1) Cieza, *ibíd.*, XVII, 62.
(2) Cieza, *ibíd.*, XXIII, 90.
(3) Cieza, *ibíd.*, XXIII, 90.
(4) Garcilaso, *ibíd.*, t. 4º, XI, 95.
(5) Garcilaso, *ibíd.*, t. 4º, XI, 95 y 96.

Para impartir la enseñanza de su lengua, utilizaban los incas, principalmente, dos medios. El primero de ellos, el más importante, eran los *mitimaes,* función ésta que engrandece más su cometido dentro de la conquista, y de la cual trataremos al ocuparnos de ellos en particular. El otro vehículo de difusión lo constituían los *curacas* de las regiones dominadas que con sus familias debían residir cierto tiempo en el Cuzco, para admirar y aprender el orden político de los incas, a la vez que para aprender su idioma y difundirlo en sus tierra, al regresar a ellas [1].

CAPITULO IV

Los Mitimaes

Sin duda que ninguna de las instituciones incaicas, nacidas de la conquista y por la conquista misma, ha llegado a tal grado de eficacia, ni ninguna que se nos muestre con tales caracteres de originalidad, ni que manifieste, como la de los mitimaes, la sabiduría política de los incas. Es llegada la hora de aclarar el significado de esta palabra que rato ha que venimos mentando.

Sirve para designar, dice Cieza, «...a los que son transportados de una tierra en otra» [2] ; de igual modo los define Garcilaso, afirmando que «...quiere decir trasplantados o advenedizos, que todo es uno» [3].

Muy raros son los temas en que los cronistas del Perú coinciden totalmente en sus manifestaciones, hallándose en sus obras y con respecto a algunos temas, la religión v. gr., las noticias más contradictorias y desconcertantes. Dejamos constancia que no nos referimos a los juicios personales que tal o cual cosa pudo provocar en ellos, sino tan solo a sus descripciones. El tema de los mitimaes por el contrario, constituye un verdadero punto de reposo para el investigador de esta cultura, obligado por visiones erróneas o interesadas a un intenso trabajo de crítica. Todos, creemos que sin excepción, conocieron su existencia y alcanzaron su importancia capital en el imperio, y algunos como Cieza, Garcilaso y Cobo, los han tratado con una extensión y profundidad que no dejan lugar a dudas. Desde

(1) Garcilaso, *ibíd.,* t. 4º, XII, 98.
(2) Cieza, *ibíd.,* XXII, 84.
(3) Garcilaso, *ibíd., t.* 4º, XI, 94.

luego, Cieza es quien desarrolla el tema en forma más sistemática y amplia, y es por ello que le seguiremos muy de cerca en esta descripción, sin desdeñar a los restantes, introduciendo una pequeña modificación en el orden impuesto a las tres clases de *mitimaes* que establece.

Distingue una clase a la cual enumeramos como primera, compuesta de guerreros *mitimaes,* es decir, de guerreros traídos de otras tierras, que establecidos en presidios cuidaban de las fronteras. Debe tenerse en cuenta que allí donde virtualmente terminaba el estado incaico, comenzaban los eriales de pueblos tan indómitos, que no había logrado sujetarles el poder cuzqueño.

Cieza menciona expresamente los presidios establecidos en las fronteras con los « Chunchos y Moxos Cheriguanaes, que los más dellos tienen su tierras a la decaída de las sierras y son gentes bárbaras y muy belicosas y que muchos dellos comen carne humana... » (1). Cosa cierta es que los chiriguanos seguían siendo indómitos y belicosos hasta hace muy pocos años, y que aun conservan muchos de los hábitos que los hicieron temibles a los ojos de los incas. No menos guerreros eran los indígenas del Norte de Quito, cuya frontera, también era asiento de estos mitimaes, y que, ya sea por su valor o porque la conquista incaica no se hubiera hecho sentir sobre ellos con todo su rigor, supieron mantenerse libres y aun envestir los reales incaicos.

Estos guerreros aunque de oficio, no recibían paga alguna, puesto que el guerrear era su tributo y porque en el Perú no se conocían soldadas ni dineros. Su alimentación era provista por los naturales cuya comarca defendían, sobrentendiéndose, no lo dice Cieza, que estos alimentos provenían del tributo debido al Inca.

Podría preguntarse quien esto leyere, por qué «...sacaban para soldados destas capitanías, mitimaes de las provincias que conocían...», entendiendo por tales, a aquellas provincias de fidelidad cierta y probada, en lugar de reclutarlos en los mismos lugares. Cieza, que conoció perfectamente las causas, podría responder muy claramente diciendo: «..porque la fuerza de la guerra no estuviese en una nación, ni presto supiesen concertar alguna rebelión o conjuración» (2). La prudencia de esta medida, según pensamos, no escapará a nadie, máxime si se tiene en cuenta lo que afirma Sarmiento, que los dichos mitimaes eran naturales del Cuzco o cerca de él.

(1) Cieza, *ibíd.*, XXII, 86 y 87.
(2) Cieza, *ibíd.*, XXII, 87.

De acuerdo con el testimonio del padre Cobo, también se establecían estas guarniciones en las cabezas de provincias. Si consideramos que Cobo menciona una sola clase de *mitimaes,* o que mejor dicho, dentro de ellos no establece división expresa alguna, esta noticia no contradice en nada a la anterior de Cieza, antes bien, la complementa.

La segunda clase, la primera en la ordenación de Cieza, era la que cumplía oficios más importantes, o si se quiere, más específicos. Esta, para nosotros, constituye la clase de *mitimaes* por antonomasia.

Es Cieza quien nos ha de describir sus múltiples oficios, y de confirmarla como un elemento de dominio principalísimo. Dice al efecto, de manera no breve pero clara y terminante: «...después que por ellos había sido conquistada alguna provincia o traída nuevamente a su servicio, tuvieron tal orden para tenella segura y con brevedad los naturales y vecinos dellas supiesen como las habían de servir y de tener... y para que estuviesen pacíficos y quietos... transmutaban de las tales provincias la cantidad de gentes que dellas parecía covenir que saliese... y de las tierras y provincias que de tiempo largo tenían pacíficas y amigables y que habían conocido voluntad para su servicio mandaban salir otras tantas y más y entremetellos en las tierras nuevamente ganadas y entre los indios que acababan de sojuzgar para que dependiesen de ellos las cosas arriba dichas, y las impusiesen en su buena orden y pulicía, para que mediante este salir de unos y entrar de otros, estuviese todo seguro con los gobernadores y delegados que se ponían...» (1). En esta cita extensa, pero concluyente, se hallarán compendiados los principales objetos a que obedecía la imposición de los *mitimaes.* El primero por más fundamental, era precaver las nuevas tierras de sublevaciones, mandando salir de ellas un cierto número de familias, y trayendo a sus lugares, otras tantas de las provincias sobre cuya fidelidad no cabía duda, «...y entre ellos —añade Cobo— muchos orejones de la sangre real». Estos *mitimaes,* así establecidos y dotados de las mismas tierras que poseían en su anterior asiento, nos referimos a los que « metían » en comarcas recién dominadas, vivían a la vez que aleccionando con su ejemplo y costumbres, vigilando constantemente a los nuevos vasallos, naciendo de esta manera, un mutuo respeto o recelo, y «...los mitimaes temían a los naturales y los naturales a los mitimaes y todos entendían en obedecer y servir llanamente ». Este era el primer objeto que los guiaba, dire-

(1) Cieza, *ibid.,* XXII, 84 y 85.

mos el más inmediato, porque en cuanto a importancia no queda en plano muy secundario el que significa Cieza al decir, un tanto lacónicamente: «... para que los impusiesen en su buena orden y pulicía», el de imponer en cuanta región y comarca se conquistaba, un mismo tipo de cultura, cuando menos en sus elementos básicos para obligar esa uniformidad en la lengua, en las costumbres y aún en el traje que tanto admiró al conquistador español.

Afirma el padre Cobo que los *mitimaes* guardaban los usos y costumbres de los pueblos a donde eran conducidos, pero que conservaban su traje peculiar ([1]). Esto a fuer de ambiguo puede resultar inexacto, por lo cual requiere una aclaración: que los que debían observar las costumbres de las provincias en que eran instalados, serían los que sacaban de las recien avasalladas a las que ya conocían el orden incaico, y no como puede suponerse, que naturales del Cuzco llevados « a hacer mitimaes » en Quito, v. gr., fueran a aprender las costumbres de los quiteños, cuando las cosas sucedían al revés. En cuanto a que conservaban « el traje, divisas y señales...» es cierto sólo en lo que respecta a los dos últimos adornos, porque el traje no difería un punto en todas las regiones del Perú, y si tales señas conservaban era para facilitar su identificación.

Mientras Cieza, sin decirlo de manera explícita, da a entender que estos *mitimaes* se imponían en todas las conquistas, y lo mismo significan Cobo y Balboa, Garcilaso constriñe su aplicación a alguna provincia «...belicosa de quien se temía por estar lejos del Cozco y por ser gente feroz y brava...» ([2]). Estos términos son facilmente conciliables con las noticias que proporciona Cieza, si consideramos que Garcilaso afirma que la trasmutación que se hacía en tal provincia, era total o parcial. La total, sin duda se ejercería sólo en las provincias cuyas son las cualidades que acaba de enumerar el Inca, y como dirá Sarmiento de Gamboa, con otras circunstancias, que pronto hemos de detallar.

Esta mudanza de pueblos, ya racional y altamente inspirada, por lo que atañe a sus fines, no lo era menos en su realización, que nada tenía de arbitrario.

Atendíase muy particularmente a las condiciones climáticas a las cuales estaban habituados los que habían de ser *mitimaes,* y evitaban que éstos sufrieran las consecuencias de los fuertes contrastes en que es tan pródigo el ambiente peruano, mandando «...poblar

(1) Cobo, *ibíd.,* t. 3º, XXIII, 222.
(2) Garcilaso, *ibíd.,* t. 4º, XI, 93.

otra tierra del temple y manera de donde salían, si fría, fría; si caliente, caliente » [1]. El padre Cobo amplía esta noción diciendo que la mudanza no se realizaba caprichosamente, «...sino a las tierras que fuesen del mismo temple y calidad o muy conformes a las que dejaban y en que se habían criado » [2], por donde se ve, que hacían cuenta de la « calidad », no sólo del temple, es decir, de la naturaleza del terreno que abandonaban. Sarmiento de Gamboa, aunque más tarde se contradiga, expresa esto con mayor claridad. « Y mandó (*Inca Yupanqui*), que se poblasen en valles semejantes a los de su natural... [3]. Todo esto puede significar Cieza con la palabra « manera », de su última cita, aunque no comprometemos opinión. Hemos aludido anteriormente a determinadas circunstancias y procederes, citados unicamente por Sarmiento de Gamboa, y que según opinamos, sólo se aplicaría a los pueblos que habían ofrecido tenaz resistencia a los incas, o que una vez dominados, se hubieran rebelado contra su poder. Cuenta Sarmiento que *Inca Yupanqui*, el mismo de la cita anterior, y he aquí la contradicción anunciada, se hizo construir con barro un simulacro de su reino, « y puestos los modelos y descripciones delante del Inga tanteólos, y considerando llanos y fortalezas, mandó a los visitadores que mirasen bien lo quél hacía. Y luego empezó a derribar las fortalezas, que le parecía, y a aquellos pobladores mudábalos a sitio llano, y a los del llano pasábalos a las cuchillas y sierras tan lejos unos de otros y cada uno tan lejos de su natural que no se pudiesen volver a él » [4]. Y aunque Sarmiento afirmara renglones más adelante, lo que en parecidos términos dijeran Cieza, Garcilaso, etc., creemos que esta medida se aplicaría en las circunstancias antedichas, conociendo el *Inca Yupanqui*, que un pueblo alejado del ambiente en que transcurrió su vida, en que se desarrollaron varias de sus generaciones haciéndose cada vez más estrecha la adaptación del uno al otro, sufre quebranto en su ánimo, y de belicoso y guerrero, desterrado de su medio natural, tórnase manso y acobardado en el extraño.

Vemos por esto que los españoles, que aplicaron idénticas medidas a pueblos levantiscos y montaraces, (el caso más típico es el de los Quilmes, que desde el Aconquija fueron trasldados al partido de la provincia de Buenos Aires que lleva su nombre, y mudados de

(1) CIEZA, *ibíd.*, XXII, 85.
(2) COBO, *ibíd.*, XXIII, 223.
(3) SARMIENTO, *ibíd.*, 81.
(4) SARMIENTO, *ibíd.*, 80.

un ambiente montañoso a una llanura litoral) no fueron los que inventaron este procedimiento, sino que sólo lo imitaron de los incas, maestros en el difícil arte de sojuzgar pueblos.

Curioso es hacer notar que los incas se valieron de los *mitimaes* hasta para tener pacífica la ciudad del Cuzco, que «... estaba afirma Cieza — llena de gentes extrangeras, todo de industria, porque habiendo muchos linajes (léase ayllos) no se conformasen para levantamiento ni otra cosa...» (1).

La tercera clase de mitimaes tiene todo el aspecto de una institución colonizadora. He aquí como la describe Cieza: «Y era que si por acaso andando conquistando la tierra de sierras o valles o campaña o en ladera aparejada para la labranza y crianza y que fuese de buen temple y fértil qeu estuviese despoblada ...luego con mucha presteza mandaban que de las provincias y comarcas que tuviesen el mismo temple que aquellos...viniesen tantos que bastasen a poblarlos...» (2).

El Inca, mediante estos *mitimaes* colonos, lograba doble beneficio: el de disminuir la población de algunas regiones y facilitar la sustentación de la restante, y al entregar a la labranza nuevas tierras, obtenía más cuantiosas contribuciones, ventaja ésta, que sin duda alguna, se reflejaba en todo el estado. La colonización era protegida con medidas sabias, prudentes y de verdadero estímulo. A los nuevos pobladores se les abastecía de provisiones en tanto que las pudieran obtener de sus heredades; y otorgábaseles una no pequeña franquicia, cual era el no exigírseles tributo durante un cierto número de años «...para que con mayor voluntad entendiesen en sus poblaciones» (3).

De exprofeso hemos omitido al considerar la clase anterior de los *mitimaes,* uno de sus oficios, por creer que conviene más a ésta que tratamos que no a aquélla. Y este oficio, era, según Cieza, que cuando en un pueblo, debido a condiciones adversas del suelo, no se daba algún producto necesario, (coca generalmente) y cerca de su asiento, y aun hasta veinte y treinta leguas (4) había tierras propicias para ello, se destacaba un cierto número de individuos para que fuesen allí y sembrasen y cosechasen aquello de que tenían necesidad. Cobo agrega a esto que recogida la cosecha, tornábanse con ella

(1) Cieza, *ibíd.*, XXII, 89.
(2) Cieza, *ibíd.*, XXII, 89.
(3) Cieza, *ibíd.*, XXII, 88.
(4) Cobo, *ibíd.*, XXIII, 226.

a sus pueblos. Este mismo cronista, en todo de acuerdo con Cieza, en cuanto se refiere a la descripción del oficio, hace cuestión de nombres, al negarles el de *mitimaes,* cosa en que nosotros no paramos mientes.

Todas estas clases de *mitimaes,* fueron establecidas, así lo afirma Cieza, por *Inca Yupanqui,* el noveno Inca, y aunque algunos indígenas se la atribuían a *Viracocha Inca,* agrega: « Yo hice tanta averiguación sobre ello, que torno (a) afirmar haberlo inventado Inca Yupanqui » (1). Y no se equivocó al afirmar con tan grande convicción, ya que son varios los cronistas que lo confirman, y entre ellos Sarmiento de Gaboa. Si duda que la conformidad que sobre el tema se observa en todos los cronistas, obedecerá a la misma supervivencia de los mitimaes, que ellos pudieron ver y aun distinguir de la masa de la población natural. Cieza les ha visto en el Cuzco y en las provincias que recorrió; y Jiménez de la Espada acota estas manifestaciones diciendo que « Mucho después de haberse escrito esto, todavía se diferencian las casas de los mitimaes de las de los naturales de algunos pueblos de Quito, en la forma de sus techos y chimeneas » (2).

Vemos pues, que si un ejército bien aguerrido y disciplinado, lograba las conquistas y acrecentaba sin cesar el imperio incaico, en cientos y cientos de leguas, era el *mitimae* quien velaba por la paz de las tierras domeñadas, quien en verdad engarzaba la nueva gema en el *Tahuantinsuyu,* imponiendo su ley, amalgamando tribus y endebles estados, en un solo pueblo, modelándoles un mismo espíritu, una misma conciencia y educándolos en la obediencia sumisa, en el respeto y la veneración del Sol y del Inca, del padre y del hijo, del Dios y del Rey.

Conclusiones

Por lo que concierne a la primera parte de este trabajo, ellas son casi innecesarias, puesto que el tema ha sido desarrollado de manera concreta, y creemos que tanto los propósitos como los resultados son evidentes e inequívocos. Podemos repetir sin embargo, que ya se atienda a su posición en el tiempo, ante los intereses oficiales o a las fuentes que utilizó, Cieza es un cronista realmente privilegiado. Hemos dicho, y pensamos que queda demostrado, que fué diligente en la

(1) Cieza, *ibíd.*, XXII, 89.
(2) Cieza, *ibíd.*

búsqueda del detalle y de la verdad que supo discriminar entre todas las noticias e informes que recogió; que sintió por la cultura incaica una admiración sana y medida, que nunca le impulsa a los excesos de Garcilaso. Esto con algunas reservas, producto de un análisis que tal vez se considere exagerado, un leve matiz, un dejo de simpatía que no afecta a la verdad substancial del relato.

En la segunda parte del trabajo queda expuesta mediante la glosa y la crítica del testimonio de Cieza, en particular, y de los cronistas clásicos, las modalidades típicas de la conquista incaica; sus imposiciones religiosas y culturales que demuestran un avanzado conocimiento de la naturaleza humana, y la originalísima institución de los mitimaes, lo más propio y admirable de toda ella.

No ha sido éste el único objeto perseguido en esta segunda parte, si acaso lo hemos logrado, sino que en lo posible tratamos de objetivar algunos conceptos vertidos anteriormente sobre Garcilaso y Sarmiento de Gamboa, sin querer darle a ellos el carácter de definitivos. Hemos cotejado sus testimonios con el de Cieza, antes que para valorar los suyos, aquilatar el de éste, cosa que ha demostrado, haciendo abstracción de los resultados logrados en la primera parte, nunca tan teóricos que ellos no fueran rigurosamente objetivados, que su visión de los hechos, puede ser, a veces, incompleta, pero equivocada muy raramente, y siempre de manera involuntaria.

Tenemos la osadía de pensar que con este pequeño estudio hemos hecho más sólido y legítimo el título de « Príncipe de los Cronistas del Perú » que Jiménez de la Espada diera don Pedro de Cieza de León.

FIN

BIBLIOGRAFIA

FOLLETOS RECIBIDOS EN LA ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS

POR C. C. D.

Nº 566-567-568. — GUICHARD (M.), *De la sensation à la Méthode de Mesure. Essai historique sur les mesures en Chimie avant et avec Lavoisier; Id. après Lavoisier.* Tres folletos respectivamente de 40, 40 y 48 páginas; 10 francos cada uno. 1937.

Constituyen los tres primeros fascículos de la serie dirigida por el autor, profesor de la Sorbona.

En el primer libro, después de varias disquisiciones filosóficas, se llega a la conclusión de que todas nuestras sensaciones encierran bastante elemento cuantitativo para conducirnos a rudimentos de medida o de amojonamientos que utilizamos lo mejor que podemos en la vida corriente y en la iniciación de toda ciencia, utilizando especialmente la memoria. Se esfuerza luego en ver cómo, después de cierto estudio de evolución, las ciencias han reemplazado progresivamente nuestros medios por mejores métodos de medida. Se ocupa de este tema y llega a las conclusiones siguientes:

I. Tenemos una sensación específica S cuantitativa, pero poco precisa.

II. Descubrimos un fenómeno P, visible generalmente, y que se nos aparece en las mismas circunstancias que la sensación S y que parece tener la misma causa.

III. La experiencia nos revela una sensibilidad y una fidelidad más perfecta y extensa hacia lo muy grande y lo muy pequeño en el fenómeno P, que en la sensación S.

IV. Abandonamos completamente S y en el laboratorio utilizamos exclusivamente P merced a un método de medida que conduce a una observación precisa y fácil.

En los dos últimos fascículos observa que la evolución de la química es una de las partes más instructivas de la historia de las ciencias. En esos libros, el autor se esfuerza en mostrar cómo ha penetrado la medida progresivamente en la química, hasta instalarse en ella, en la actualidad, como triunfadora.

Al final llega a esta conclusión: que no obstante el esfuerzo de 500 sabios que han realizado 7000 mediciones en 92 elementos, no existe hoy ningún peso atómico conocido con aproximación de un diez milésimo.

Todos los cálculos de oficina, no mejorarán nuestros conocimientos sobre ese particular y deben buscarse las cifras exactas allá donde están es-

condidas o sea en el laboratorio. Formula como última cuestión, la siguiente pregunta: ¿han muerto las mediciones? y al respecto contesta en forma apológica.

Nos. 261 al 263. — METZGER (HÉLENE), *Attraction Universelle et Religion Naturelle chez quelques commentareurs anglais de Newton.* Tres folletos de 224 páginas en total. Precio: 12, 15 y 25 francos. 1938.

Constituyen los fascículos IV, V y VI de la serie «Philosophie et Histoire de la pensée scientifique», dirigida por Federico Enriques.

Se trata de un estudio del pensamiento religioso de los comentadores de Newton. El primer folleto, de 54 páginas, contiene la Introducción filosófica.

El segundo, de 62 páginas, trata especialmente el estudio de algunas variaciones teológicas relativas al tema de la atracción universal, en Isaac Newton, en Ricardo Bentley, en William Whiston y en John Toland.

El tercero, de 110 páginas, se ocupa del mismo tema relativamente a Samuel Clarke, George Cheyne, William Derham, Andrew Baxter y Joseph Priesley.

Vienen, finalmene, una vista de conjunto, las conclusiones, y un Indice general alfabético de nombres.

Transcribimos el último parágrafo de dicho trabajo:

«La teología natural de la física newtoniana es solidaria, desde luego, de la emoción de la investigación mediante la que el espíritu del sabio se somete por entero a la inspiración que ha recibido como obsequio graciable; es también solidaria de la emoción del descubrimiento que pone de repente en manifiesto la armonía del sistema del mundo, resucitando o avivando nuestro sentimiento religioso. Sobre estas bases emotivas fundamentales construye el espíritu del pensador un monumento teológico cuyos puntos de apoyo científicos son suministrados por el dualismo de la *inercia* y de la *atracción* o, si se quiere, de la *materia* y de la *fuerza.* Apenas ese dualismo —que desde el punto de vista científico puede considerarse como una tara—, viene a fallar, la teología natural salida del newtonismo, se derrumba por completo dejando, ajena una a otra, la física general que puede independizarse de lo divino, y la religión que se liberta por entero de toda empresa científica. Tales son, por lo menos, las conclusiones que, como terminación de nuestro trabajo, parecen deber imponerse».

LEVI-CIVITA (T.), *Sul Calculo effetivo del periodo in un caso tipico di prima approssimazione* (8 págs. 17 × 24,5). Lima, 1937.

Famiglie di superficie isoparametri che nell'ordinario spazio euclideo (8 págs. 19,50 × 28,50). Roma, 1937.

La Trigonométrie des Petits Triangles Curvilignes sur une surface (34 págs. 16 × 24,50). París, Gauthier-Villars, 1938).

Estos tres folletos del eminente profesor de Roma que nos honró el año ppdo. con su visita constituyen: los dos primeros, tiradas aparte de estudios que sobre el tema que cada uno indica, publicara el autor en la *Revista*

de Ciencias, bajo el patrocinio de la Facultad de Ciencias Biológicas, Físicas y Matemáticas de la Universidad Mayor de San Marcos del Perú (Lima), y en los « Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei » (Vol. XXVI, serie 6ª, 2º sem., fasc. 11, Roma, diciembre 1937).

El tercero, contiene lo expuesto en una conferencia dada por el autor en la Reunión Internacional de los Matemáticos, tenida en París en julio 1937 bajo el patrocinio de la Societé Mathématique de France.

En dicha conferencia, después de recordar algunos antecedentes históricos del tema, el autor empieza considerando el caso de pequeños triángulos planos constituídos por tres arcos de circunferencia, tópico que desarrolló en una de las conferencias que dió en Buenos Aires el año ppdo.

Se ocupa, después, de la representación local de las curvas planas; luego de la curvatura geodésica y de las fórmulas de Frenet para una curva trazada en una superficie; cuerda geodésica que parte de un punto; ángulo con la curva en dicho punto; longitud de la cuerda. Después de lo anterior, encara el triángulo de las cuerdas geodésicas y las relaciones entre los lados y los ángulos; relaciones trigonométricas. Al final trae indicaciones generales sobre las aproximaciones de orden superior.

RABINOVICH (MARCOS), *Cuestiones de Medianería en el derecho civil argentino.* Un tomo (16 × 24); 150 páginas; Buenos Aires, J. Lajouane & Cia. $ 6 a la rústica; $ 8 encuadernado. (Folleto recibido en la Sociedad Científica Argentina).

Después de exponer las diversas doctrinas y jurisprudencias sentadas sobre ese tema de medianería, y de hacer un análisis crítico de las mismas, el autor sostiene otras soluciones que considera más en armonía con el texto y el espíritu de las leyes vigentes en el derecho civil argentino.

En las tesis sentadas por el Dr. Marcos Rabinovich, mencionaremos que, según él, la separación de heredades no es una obligación sino un derecho renunciable; que deben distinguirse las paredes divisorias de las de carga; que el término « servicio de una pared », significa cargarla con construcciones, y que únicamente en este caso hay obligación de satisfacer la medianería; y que el precio de la parte alzada debe determinarse conforme a su valor actual y no a los gastos de su construcción; que para poder reconstruir una pared no medianera, debe adquirirse su medianería; que no pueden alzarse las paredes medianeras divisorias salvo cuando se carguen, etc., etc.

Todas esas cuestiones no tienen, evidentemente, un carácter matemático: cada cual las entiende a su manera y lo mejor sería guiarse exclusivamente por la equidad y la lógica si no fuese necesario, a la vez, ajustarse a la letra confusa del código.

El autor trae, al final, una bibliografía del tema, y su trabajo constituye una contribución para cuando se reforme el actual código en esa parte del mismo.

C. C. D.

SOCIOS ACTIVOS

Aguilar, Félix
Albizzatti, Carlos M.
Alessi, Juan M.
Alvarez, Raúl J.
Alvarez de Toledo, Belisario
Allende Lezama, Luciano P.
Anastasi, Camilo
Anchorena, Juan E.
André, Enrique de
Andrioletti, Juan Luis
Añón Suárez, Vicente
Aparicio, Francisco de
Aráoz Alfaro, Gregorio
Arce, Manuel J.
Arditi Thompson, H.
Armani, Aquiles
Arnaudo, Silvio J.
Avila Méndez, Delfín
Bado, Atilio A.
Bachmann, Enesto
Baglietto, Eduardo E.
Balbiani, Atilio
Baliani, Luis M.
Bancalari, Agustín
Bandoni, Alfredo J.
Barabino Amadeo, S.
Barbieri, Antonio
Bargna, Juan L.
Barilari, Mariano J.
Barral Souto, José
Barrancos, Leónidas A.
Becke, Alejandro von der
Berrino, Juan B.
Bertino, José Carlos
Besio Moreno, Nicolás
Bianchi Lischetti, A.
Biggeri, Carlos
Blaquier, Juan
Boaglio, Santiago
Bolognini, Héctor
Bonanni, Cayetano A.
Bontempi, Luis
Bordas, Alejandro F.
Bordenave, Pablo E.
Borzacow, Wladimiro
Borruat, Luis
Borzi, Ana María
Bosch, Gonzalo
Bosisio, Anecto J.
Bottaro, Juan C.
Bozzini, Luis (h.)
Briano, Juan A.
Bunge, Juan C.
Buontempo, Guillermo
Burkart, Arturo
Butty, Enrique
Buzzo, Alfredo
Buzzo, Eduardo B.
Caillet Bois, Teodoro
Calandra, Raúl E.
Canale, Humberto
Canal Feijoo, Bernardo
Capelli, Pedro F.
Carabelli, Juan José
Carbia, Rómulo D.
Carbone, Esteban
Carbonell, José J.
Cárcova, Enrique de la
Carelli, Antonio
Carelli, Humberto H.
Caride Massini, Pedro
Carman, Ernesto
Carrea, Juan Ubaldo
Casacuberta, Antonio
Castellanos, Alberto
Castello, Manuel F.
Castiñeiras, Julio R.
Celasco, Juan L.
Ceppi, Héctor
Cernuschi, Félix
Clos, Enrique C.
Cock, Guillermo E.
Coni, Bazán, F. A.
Curti, Orlando P.
Curutchet, Luis
Chanourdie, Enrique
Chizzini Melo, Aníbal F.
D'Ascoli, Lucio
Dassen, Claro C.
Dasso, Héctor
Dasso, Ricardo L.
De Cesare, Elías A.
De Fina, Armando L.
De la Ini, Juan E.
Dellepiane, Luis J.
Deulofeu, Venancio
Díaz, Emilio C.
Dieulefait, Carlos E.
Doello-Jurado, Martín
Dobranich, Jorge W.
Domínguez, Juan A.
Dubecq, Raúl E.
Dueñas, José
Duhau, Luis
Dupont, Enrique
Durañona y Vedia, A.
Durrieu, Mauricio
Edelberg, Benjamín
Escudero, Antonio
Escudero, Pedro
Faré, Santo S.
Fernández, Alberto J.
Fernández Díaz, A.
Fernández Long, S.
Figini, Angel
Figuerero, Hernando W.
Fischer, Gustavo Juan
Flores, Emilio M.
Floriani, Luis
Florit. Carlos J.
Forn, Carlos J.
Fossa Mancini, E.
Franceschi, Alfredo
Fürnkorn, Divico A.
Gadda, Carlos Manuel
Galmarini, Alfredo G.
Gando, Alfredo R.
Gandolfi Herrero, Augusto
Gandolfo, José S.
Gascón, Alberto
Gaspar, Fernando L.
Géneau, Carlos E.
Gerardi, Donato
Ghigliazza, Sebastián
Giagnoni, Bartolomé E.
Giannone, José
Gradín, Carlos
Grieben, Arturo
Gutiérrez, Ricardo J.
Haussler, Emilio
Herbin, Luis A.
Hermitte, Enrique
Herrera Vegas, M.
Herzer, Bernardo
Hickethier, Carlos F.
Hofmann, Herbert
Hortal, José Angel
Houssay, Bernardo A.
Hoyo, Arturo
Igartúa, Luis María
Irigoyen, Luis H.
Isetta, José
Ivanissevich, Ludovico
Jorge, José M.
Jakob, Cristofredo
King, Diarmid O.
Kinkelin Pelletán, J. C. de
Knoche, Walter
Kraglievich, Nicolás T.
Krapf, Eduardo
Labarthe, Julio
Lagunas, Simón
La Menza, Francisco
Laporte, Luis B.
Larco, Esteban
Lasso, Alfredo L.
Latzina, Eduardo
Ligniéres, Roberto
Lizer y Trelles, C. A.
Lombardi, Alberto
Loudet, Osvaldo
Loyarte, Ramón G.
Lugones, Arturo M.
Llauró, José
Mac Donagh, E. J.
Magnin, Félix J.
Mognin, Jorge
Mainini, Carlos
Mallol, Emilio
Mamberto, Benito
Marcó del Pont, E.
Marchionatto, Juan B.
Maresca, Antonio J.
Marini, Tomás L.
Martignone, Eduardo
Marotta, F. Pedro
Marotta, R. Armando
Mata, Leopoldo
Méndez, Julio
Meoli, Gabriel
Meoli, Humberto
Mercau, Agustín
Meriggi, Juan C.
Mermoz, Francisco A.
Molfino, José F.
Molina Carranza, L.
Molle, Clotilde C.
Montes, Vicente E.
Moreno, Evaristo V.
Nágera, Juan José
Natale, Alfredo
Natale, Ernesto
Negrete, Lucía
Negri, Mario L.
Nelson, Ernesto
Nielsen, Juan
Oliveri, Alfredo B.
Ortega Belgrano, Raúl
Ortiz, Aníbal A.
Ortiz de Rosas, Jorge
Otamendi, Gustavo
Ottonello, Héctor
Páez, José María
Page, Franklin Nelson
Paitoví y Oliveras, A.
Paquet, Carlos
Parodi, Edumndo
Parodi, Lorenzo R.
Pasman, Raúl G.
Pasman, Rodolfo E.
Pastore, Franco
Paz Anchorena, José M.
Pérez Hernández, A.
Perrone, Cayetano
Pestalardo, Agustín
Pini, Aldo S.
Platz, Hubert
Podestá, Juan Carlos
Polti, Modesto
Posadas, Carlos
Quinos, José Luis
Quinterno, Bruno F.
Quiroga, Pedro R.
Raimondi, Alejandro
Raffo, Bartolomé M.
Ramaccioni, Danilo
Ramallo, Carlos M.
Ratto, Héctor R.
Rebuelto, Antonio
Rabuelto, Emilio
Reoce, William Asher
Repetto, Blas Angel
Repossini, José

Ringuelet, Emilio J.
Rissotto, Atilio A.
Rivarola, Rodolfo
Robles, Angel A.
Rodríguez Aravena, S.
Rodríguez, Germinal
Rodríguez, Miguel
Roffo, Angel H.
Roffo, Juan
Roldán, Raimundo
Romero Brest, Enrique
Rokotnitz, Otto
Rospide, Juan
Rossell Soler, Pedro
Ruata, Luis E.
Ruíz Moreno, Isidoro
Ruiz Moreno, Adrián
Rumi, Tomás J.
Sabaria, Enrique
Salomón, Hugo
Sánchez, José Ricardo
Sánchez, Gregorio L.
Sánchez Díaz, Abel
Sánchez Sorondo, M. G.
Sanromán, Iberio
Santángelo, Rodolfo
Sarhy, Juan F.
Sarrabayrouse, Eugenio
Savon, Marcos A.
Schnack, Benno J.
Schmidt, Max
Schulz, Guillermo
Selva, Domingo
Selzer, Samuel
Sesma,, Angel
Sheahan, Juan F.
Silva, Leónidas L.
Simonoff, Miguel
Simons, Hellmut
Siri, Luis
Sobral, Arturo
Solari, Emilio F.
Solari, Miguel A.
Soler, Frank L.
Sordelli, Alfredo
Spinetto, David J.
Spota, Víctor J.
Storni, Segundo R.
Suárez, Angel
Talana, Alberto F.
Talana, Jorge
Tarragona, José
Tedeschi, Virgilio
Tello, Eugenio
Torre Bertucci, Pedro
Torello, Pablo
Tossini, Luis
Trelles, Rogelio A.
Trucco, Sixto E.
Valeiras, Antonio
Valentini, Argentino
Valentinuzzi, Máximo
Vallebella, Colón B.
Vanossi, Reinaldo
Varela, Rufino
Varela Gil, José
Vecchi, Arístides de
Vela Huergo, Julio
Verdaguer, Juan
Veyga, Francisco de
Vidal, Eduardo
Vignati, Milcíades A.
Villalobos D., C.
Vignaux, Juan C.
Vinardell, Alberto
Volpatti, Eduardo
Wainer, Jacobo
Wauters, Carlos
Wernicke, Raúl
White, Guillermo J.
Wysztelewski, W. de
Zamboni, Agustín
Zappi, Enrique V.
Zavalla, Carlos M.
Zuloaga, Angel M.

SOCIOS ADHERENTES

Bazzanella, José
Cotlar, Mischa
Devoto, Carlos Alberto
Ferramola, Raúl
Folcini, Martín L. G.
García, Eduardo D.
Glücksmann, Carlos E.
Goyena, Ricardo J.
Gorchs, Agustín C.
Laclau, Juan Pedro
Magne de la Croix, P. A.
Mailhos, Luis E.
Milesi, Emilio Angel
Quevedo Capdevila, Eduardo A.
Recoder, Roberto F.
Repetto, Cayetano
Rusconi, Carlos
Sadosky, Manuel
Somonte, Eduardo
Vistalli, Alina M.
Wechsler, Wolf

CASAS ADHERENTES

Angel Estrada y Cía.
Benvenuto y Cía.
Lutz, Ferrando y Cía.
Hijos de Atilio Massone
Otto Hess, S. A.
T. Gr. "Tomás Palumbo"
Jacobo Peuser, S. A. Itda.

SOCIO VITALICIO

Huergo, Eduardo María

MIEMBROS PROTECTORES DE LA ORGANIZACION DIDACTICA DE BUENOS AIRES

Anchorena, Juan E.
Besio Moreno, Nicolás
Tornquist, E. y Cía. (Lda.)

SECCION CORDOBA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Juan Olsacher; Vice-presidente, Dr. Miguel Fernández; Vice-presidente, Ing. Daniel A. García; Secretario de actas, Dr. Guillermo V. Stuckert; Secretario de correspondencia, Prof. Tulio Mácola; Tesorero, Sr. Bernardo Pilotto; Pro-tesorero, Dr. Carlos C. Hosseus; Vocales: Ing. Clodoveo Pascualini; Ing. Jorge E. Bobone; Ing. Luis Chechi; Ing. Ambrosio L. Taravella; Dr. Federico Padula; Dr. José Carlomagno; Dr. Meade L. Zimmer; Sr. Enrique Sparn.

SOCIOS ACTIVOS

Aguiar, Henoch D.
Bobone, Jorge E.
Brandan, Ramón A.
Broglia, Alberto A.
Buteler, Jesús E.
Camilloni, Carlos
Carlomagno, José
Chaudet, Enrique
Checchi, Luis
Deheza, Eduardo
Del Viso, Jacinto
Devoto, Heraclio A.
Esteban, Fernando
Fernández, Miguel
Fontana, Lorenzo P.
García, Daniel
Godoy, Salvador A.
Gómez, Calixto A.
Gordillo, Pedro N.
Hosseus, Carlos Curt
Lofayette Zimmer, M.
Larrauri, Agustín C.
Lutzow Holm, Olaf.
Mácola, Berardo A.
Mácola, Tulio
Mirizzi, Pablo Luis
Ninci, Raúl T.
Olsacher, Juan

Padula, Federico
Pasqualini, Clodoveo
Peláez J. Gambastiani de
Pilotto, Bernardo
Rothlin, Edwin
Schmiedecke, Augusto
Sigal, Moisés
Sparn, Enrique
Stuckert, Guillermo V.
Taravella, Ambrosio L.
Tarragó, Emeterio
Trebino, Natalio
Urciolo, Victorio
Vanni, Alberto
Vercello, Carlos
Yadarola, Mauricio L.

SECCION SANTA FE

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Gustavo A. Fester; Vice-presidente, Dr. José Piazza; Secretario de correspondencia, Ing. Quím. Francisco A. Bertuzzi; Secretario de actas, Ing. Quím. José Cruellas; Tesorero, Ing. Quím. Enrique Virasoro; Vocal 1º, Ing. José Babini; Vocal 2º, Prof. Rolando Hereñú; Vocal suplente 1º, Prof. Julio Salaber; Vocal suplente 2, Ing. Quím. Guillermo Berraz; Encargado de Biblioteca y Canje, Ing. Quím. Rodolfo Rouzaut; Encargado de Publicaciones, Ing. José Babini.

SOCIOS ACTIVOS

Anadón, Leónidas
Ariotti, Juan Carlos
Babini, José
Benet, Pedro José
Berraz, Guillermo
Bertuzzi, Francisco A.
Bonazzola, César J.
Borruat, Luis (hijo)
Borzone, Rodolfo
Bossi, Celestino
Caballero, Martín A.
Camo, José María
Cerana, Miguel
Claus, Guillermo
Cohan, Marcos
Courault, Pablo
Crouzeilles, A. L. de
Cruellas, José
Christen, Carlos
Christen, Rodolfo G.
Damianovich, Horacio
Falco, Federico
Fester, Gustavo A.
Frenguelli, Joaquín
Gollán, Josué (h.)
Gschwind, Eduardo P.
Guinle, Hugo José
Hereñú, Rolando
Hotschewer, Curto
Juliá, Tolrá Antonio
Kleet, Gregorio
Lachaga, Dámaso A.
Mai, Carlos
Mántaras, Fernando
Marelli, Hipólito
Martino, Antonio E.
Montpellier, Luis Marcos
Mounier, Celestino
Muzzio, Enrique
Nigro, Angel
Niklison, Carlos A.
Oliva, José
Peresutti, Luis
Piazza, José
Piñero, Rodolfo
Pozzo, Hiram J.
Ragonese, Arturo E.
Reinares, Sergio
Rouzaut, Rodolfo
Salaber, Julio
Salgado, José
Santini, Bruno L. P.
Schivazappa, Mario
Simonutti, Atilio A.
Tissembaum, Mariano
Urondo, Francisco E.
Virasoro, Enrique

SECCION MENDOZA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Juan B. Lara; Vice-presidente, Ing. Agr. José Raúl Ponce; Secretario, Ing. Agr. Julio Tolosa (h); Tesorero, Ing. Cayetano C. Piccione; Bibliotecario, Sr. Adrián Ruíz Leal; Vocales: Dr. Eduardo Carette; Dr. Mario Bidone; Ing. Alfredo Rosenthal; Sr. Manuel Tellechea; Ing. Agr. Rafael E. Pontis.

SOCIOS ACTIVOS

Alurralde, Juan Carlos
Anzorena, Jacinto
Ayala Castagnino, G.
Basso, Germinal
Benegas, Raúl
Bidone, Mario
Borsani, Carlos Pablo
Burgoa, Pedro A.
Carette, Eduardo
Castillo, José
Croce, Francisco M.
Espinosa, Norberto A.
Flor Alvarado, José M.
Gabrielli, Francisco J.
Galeano, Edgardo
García, José Federico
Godoy Vergelin, G.
Gomensoro, José N.
Granzella, Sinibaldo
Guiard, Ricardo
Jofré, Alberto L.
Lara, Juan B.
Lucero, Braulio G.
Lugones, Manuel G.
Magistretti, Guillermo
Maneschi, Ernesto
Maroso, José Angel
Maveroff, Aquiles
Mayorga, Santiago C.
Miyara, Salomón
Paganotto, Juan P.
Pelaia, Dante
Piccione, Cayetano C.
Ponce, José Raúl
Pontis, Rafael E.
Richard, Alfonso E.
Rosales, Ranulfo S.
Rosenthal, Alfrado
Ruíz, Aníbal
Ruíz Leal, Adrián
Serra, Luis Angel
Silvestre, Tomás
Stura, Angel C.
Tellechea, Manuel
Tolosa, Julio (h)
Toso, Juan F.
Villanueva, Miguel Angel

SECCION LA PLATA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Carlos A. Sagastume; Secretario, Ing. Adolfo P. Grissi; Tesorero, Dr. Carlos Teobaldo; Vocales: Dr. Hilario Magliano, Dra. Juana Cortelezzi; Ing. Juan Sabato; Dr. Federico E. Christmann.

SOCIOS ACTIVOS

Alsina Fuertes, Fidel
Amarante, Pedro C.
Angli, Jerónimo
Arroyo Basaldúa, Víctor M.
Basualdo, Washington S.
Bauer, Conrado
Bonet, Luis A.
Canals Frau, Salvador
Cortelezzi, Juana
Crespi Gherzi, Rodolfo A.
Christmann, Federico E.
Daló, Héctor R.
Ferrari, Obdulio J. F.
Gascón, Jorge
Gershánik, Simón
Giovambattista, Humberto
Grisi, Adolfo P.
Loedel Palumbo, Enrique
Mc Loughlin, Rogelio P.
Magliano, Hilario
Marmonti, Angel
Massimino, Blas
Méndez, José D.
Micheletti, Luis A.
Nico, Raúl
Oliva, Virgilio
Paternosto, Pedro G.
Pera, Tomás Carlos
Platzceck, Ricardo P.
Rodríguez, Marcelo R. N.
Sabato, Ernesto R.
Sabato, Juan
Sáez, Francisco A.
Sagastume Berra, A.
Sagastume, Carlos A.
Scheggia, Eduardo R
Teobaldo, Carlos
Toranzos, Fausto L.
Trejo, César A.
Ucha Udabe, Manuel
Vucetich, Danilo C.
Wilkens, Alejandro

SOCIOS CORRESPONDIENTES

Aguilar y Santillán, R.	México
Alvarez, Antenor	Sgo. del Estero
Amaral, Afranio de	San Pablo (Br.)
Avendaño, Leónidas	Lima
Bachmann, Carlos J.	Lima
Bolívar, Ignacio	Madrid
Bonarelli, Guido	Gubbio (It.)
Borel, Emile	París
Bragg, William Henry	Londres
Bruch, Carlos	Olivos (B. A.)
Cabrera, Blás	Madrid
Campos Porto, Pablo	Río de Janeiro
Carabajal, Melitón M.	Lima
Dabbene, Roberto	La Plata
Darmois, Eugenio	Nancy (Fr.)
Darmois, Georges	París
Dávila, Rubén	Santiago (Ch.)
Escomel Edmundo	Arequipa (P.)
Fiebrig, Carlos	Munich (Al.)
Fontecilla Larrain, Arturo	Santiago (Ch.)
Fort, Michel	Lima
González del Riego, Felipe	Lima
Greve, Germán	Santiago (Ch.)
Guinier, Philibert	Nancy (Fr.)
Hadamard, Jacques	París
Hauman, Luciano	Bruselas
Hernández, Juvenal	Santiago (Ch.)
Hijar y Haro, Luis	México
Janet, Pierre	París
Jiménez de Asúa, Luis	Madrid
Keiper, Guillermo	Berlín
Kinart, Fernando	Amberes
Lahille, Fernando	Tarn (Fr.)
Langevin, Paul	París
Levi Civita, Tulio	Roma
Lobo, Bruno	Río de Janeiro
Mardones, Francisco	Santiago (Ch.)
Molina, Enrique	Concepc. (Ch.)
Monjaráz, Jesús E.	México
Moretti, Gaetano	Milán
Oliver Schneider, Carlos	Santiago (Ch.)
Pereira d'Andrade, Lencastre	Nova Goa (I. P
Perrin, Tomás G.	México
Pi y Suñer, Augusto	Barcelona
Porter, Carlos E.	Santiago (Ch.)
Reyes Cox, Eduardo	Santiago (Ch.)
Rospigliosi y Vigil, Carlos	Lima
Rowe, Leo S.	New York
Shepperd, William R.	Wáshington
Tello, Julio C.	Lima
Valle, Rafael H.	México
Vélez, Daniel M.	México
Villarán, Manuel V.	Lima
Vitoria, Eduardo	Barcelona
Volterra, Vito	Roma



ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

ADOPTADOS PARA SUS PUBLICACIONES POR LA

ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

DIRECTOR: EMILIO REBUELTO

NOVIEMBRE 1938. — ENTREGA V. — TOMO CXXVI

SUMARIO

BUENOS AIRES

CALLE SANTA FE 1145

1938

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

ADVERTENCIA. — Los colaboradores de los Anales son personalmente responsables de la tesis sustentada en sus escrito. Tienen derecho a la corrección de do pruebas. Los que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos, deben solicitarla por escrito. Los manuscritos, correspondencia, etc. se enviarán a la sede social, **Santa Fe 1145.**

Impreso en los Talleres Gráficos "TOMAS PALUMBO" - La Madrid 321-325 - Buenos Aires

EXTENSIONES DEL TEOREMA DE ABEL-STOLZ
Y
SOBRE ALGUNAS TRANSFORMACIONES FUNCIONALES LINEALES

Por J. C. VIGNAUX

La presente memoria comprende dos partes. En la primera se da la extensión del teorema de Abel-Stolz a las series dobles de potencias y se proponen algunas generalizaciones del mismo. Luego se define el método de sumación de Abel-Stolz para las series dobles y se prueba su relación con el método de Cesaro de orden real $(r, s > -1)$.

En la segunda parte, que comprende varios capítulos, se dan algunas propiedades nuevas de las trasformaciones funcionales de Laplace, de Le-Roy, de Haine, de Stieltjes, de Hankel, de Gauss y de Euler.

EXTENSIONES DEL TEOREMA DE ABEL-STOLZ

Introducción. — Es bien conocido el clásico teorema de Abel:

$$\lim_{x \to 1} \sum_{0}^{\infty} a_n x^n = S$$

donde S es la suma de la serie convergente (1)

$$S = \sum_{0}^{\infty} a_n, \qquad [2]$$

y el complemento debido a Pringsheim (2)

$$\lim_{x \to 1} \sum_{0}^{\infty} a_n x^n = \infty$$

en el caso que la [2] sea divergente con el valor $+\infty$ ó $-\infty$.

Varias demostraciones se han propuesto de este teorema, pero de todas ellas es sin duda la más sencilla e importante, aquella fundad en la identidad de Dirichet (1).

$$\sum_{0}^{\infty} a_n x^n = (1 - x) \sum_{0}^{\infty} s_n x^n \quad , \quad (-1 < x + 1)$$

donde

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i .$$

En otro lugar hemos probado que este método se puede extender también a las integrales simples y dobles de Laplace (3).

El teorema de Abel ha sido motivo de una importante generalización debida a G. Hardy y O. Perron, y sobre el cual ha construí-

(1) K. Knopp: *Theorie and Anwendung der unenlichen Reihen,* Berlín, 1924.

(2) H. Pringsheim: *Acta. Math.* V. 28, p. 2.

(3) T. C. Vignaux: *Une demostration du théorème de Dirichlet,* Bulletin de la Soc. des Sc. de Chy. (Rumania). T. VII, 1934; *R. Acc. N. dei Lincei,* Roma (1933); *Sobre un teorema de Pringsheim y su extensión a las integrales.* Anales de la S. C. Argentina, T. CXX, (1935); *Bull. Soc. Royale des Sc. de Liege* (1933).

de este último, su importante teoría de la sumabilidad de los factores de convergencia.

La extensión del teorema de Abel a las series de potencias de una variable compleja se debe a Stolz.

Los profesores G. Hardy y Bronwich (1), en una memoria ya clásica, extienden el teorema de Abel a las series dobles de potencias de dos variables *reales*, así como también los teoremas de Frobenius y de Holder; mientras C. Moore (2) resuelve la misma cuestión para el teorema más general de Bronwich.

En una Nota reciente, propongo una nueva demostración del teorema de Abel para el caso de dos variables, y también se demuestra un teorema que contiene como caso particular los teoremas de Frobenius y de Holder antes citados (3).

En este trabajo nos proponemos extender el teorema de Abel-Stolz a las series dobles de potencias y algunas de sus generalizaciones.

Luego se introduce el método de sumación de Abel-Stolz y se prueba un teorema fundamental que establece la relación de éste con el proceso de Cesaro, de orden real s, r ($s, r > 1$)

2. El Teorema de Abel-Stolz. — Sea primeramente el caso de una serie simple de potencia. Consideremos un círculo de centro en el origen y radio $R = 1$; y el ángulo de vértice en el punto 1, cuya bisectriz sea el eje xx' y de avertura $< \pi$ (*Angulo de Stolz*). El teorema de Stolz se enuncia en la forma siguiente:

Si la serie

$$\sum_0^\infty a_n$$

converge con suma S, la serie de potencia

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n \qquad (z = x + iy)$$

es *convergente en el círculo de radio* $|z| = 1$, y $f(z)$ *tiende a S cuando el punto* $z \to 1$, *permaneciendo interior al ángulo de Stolz.*

(1) *Proceedings of the London, Math. Soc.* v. 2 (1905) p. 161.

(2) *Trans. Amerc. Math. Soc.* v. 14 (1913); B. Eversuel: *Anals of Math.* 231 (1922).

(3) *Bollettino della Unione matematica italiana*, Anno XVII, Nº 4, Nov. 1938.

Varias demostraciones se han propuesto de este teorema. K. Knopp deduce utilizando las condiciones de Toepliz para las transformaciones lineales; M. Julia propone otra de carácter geométrico, que le permite generalizar el teorema de Stolz a las series del tipo

$$\sum_{0}^{\infty} a_n f(z^n) .$$

Daremos aquí una demostración de este teorema utilizando la identidad de Direchlet.

De la convergencia de la serie [1], resulta la existencia de un número $M > 0$ tal que

$$| S_n | = \sum_{i=0}^{n} a_i | < M \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

por tanto; se tiene

$$| a_n | = | S_n - S_{n-1} | < 2 M,$$

luego la serie de potencia [2] converge absolutamente en el dominio $| z | < 1$ y además, se tiene

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n = (1 - z) \sum_{0}^{\infty} S_n z^n$$

para $| z | < 1$.

Como es

$$S = (1 - z) \sum_{0}^{\infty} S z^n$$

resulta entonces

$$S - f(z) = (1 - z) \sum_{0}^{\infty} (S - S) z^n \quad , |z| < 1.$$

De la convergencia de la [1], resulta que a todo $\varepsilon > 0$ arbitrario, corresponde un entero p tal que

$$| S - S_n | < \varepsilon \quad \text{para} \quad n \geq p$$

luego, se puede describir

$$| S - f(z) | < | 1 - z | \sum_{n=0}^{p} | S - S_n | \, | z^n | +$$

$$+ | 1 - z | \sum_{n=p+1}^{0} | S - S_n | \, | z^n | . \qquad [1]$$

Además

$$|1-z|\sum_{0}^{p}|S-S_n|\,|z^n|<|1-z|\,A$$

donde

$$A=\sum_{0}^{p}|S-S_n|\quad,\quad |z|<1\,;$$

y

$$|1-z|\sum_{p+1}^{\infty}|S-S_n|\,|z^n|<|1-z|\,\varepsilon\sum_{p+1}^{\infty}|z^n|<\varepsilon\frac{|1-z|}{1-|z|}\,.$$

Si el punto z pertenece al ángulo de Stolz, existe un número fijo C, tal que

$$\frac{|1-z|}{1-|z|}<C\,,$$

y la desigualdad [2] se puede escribir

$$|S-f(z)|<|1-z|\,A+\varepsilon C\,.$$

Fijado el número ε, queda fijado A, luego se puede determinar un número positivo δ, tal que

$$|1-z|\,A<\varepsilon\quad\text{para}\quad|1-z|<\delta$$

con lo cual la desigualdad anterior resulta

$$|S-f(z)|<\varepsilon(1+C)$$

para todo punto z del ángulo de Stolz y tal que $|1-z|<\delta$, luego

$$\lim_{z\to 1}f(z)=S$$

Esta demostración se puede extender con pocas modificaciones a los teoremas de Frobemus-Stolz y de Holder-Stolz relativos a las series de potencias de una variable.

1. SERIE DOBLE DE POTENCIAS

3. DEFINICIONES. — Se dice que la serie doble

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} \qquad [1]$$

converge en el sentido de Pringsheim (o por rectángulos) con suma S, si

$$\lim_{(m,n) \to \infty} S_{m,n} = \lim_{(m,u) \to 1} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{ij} = S.$$

La serie (1) *converge acotadamente*, si ella converge por rectángulos y existe una constante $M > 0$, tal que

$$| S_{m,n} | < M \quad , \quad (m, n = 0, 1, 2 \ldots)$$

En los planos de las dos variables complejas z y w consideremos los dos círculos de radios unitarios y centros respectivamente en los orígenes; y los dos ángulos de vértices en los puntos (1 ,0) y (1 , 0) que tienen por bisectrices los ejes reales y de abertura $< \pi$.

Llamamos *dominios asociados* de Stolz, a la región $[\Delta, \Delta']$ formada por los puntos z y z' interiores a Δ y Δ' y a sus respectivos círculos.

TEOREMA I. — *Si la serie doble*

$$\sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} a_{m,n} \qquad [1]$$

converge acotadamente con suma S, la serie doble de potencia,

$$f(z, w) = \sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} a_{m,n} z^m w^n \qquad [2]$$

converge absolutamente en los círculos asociados

$$\{ | z | < 1 \quad , \quad | w | < 1 \},$$

y

$$\lim_{(z, w) \to 1} f(z, w) = S$$

cuando los puntos z *y* w *tienden simultánea e independientemente a los puntos* (1, 0) *y* (1, 0), *permaneciendo interiores a* Δ *y* Δ'.

De la hipótesis

$$| S_{m,n} | < M$$

y teniendo presente que

$$a_{ij} = S_{ij} - S_{i-1,j} - S_{i,j-1} + S_{i-1,j-1}$$

resulta

$$| a_{ij} | < 4 M$$

por tanto la serie doble (2) es absolutamente convergente en los círculos asociados de radios 1.

Multiplicando la serie (2) con la serie doble geométrica

$$\frac{1}{(1-z)(1-w)} = \sum_0^\infty \sum_0^\infty z^m w^n \qquad (|z| < 1 \ , \ |w| < 1) \qquad [3]$$

resulta la identidad de Dirichlet

$$f(z, w) = (1-z)(1-w) \sum_0^\infty \sum_0^\infty S_{m,n} z^m w^n$$

en el dominio complejo $\{ |z| < 1 \ , \ |w| < 1 \}$;
y según la (3) y (4) ; se tiene

$$S - f(z, w) = (1-z)(1-w) \sum_0^\infty \sum_0^\infty (S - S_{m,n}) z^m w^n . \qquad [4]$$

De la convergencia de la serie doble (1) resulta que a todo $\varepsilon > 0$ arbitrario, corresponde dos enteros p y q tal que

$$| S - S_{m,n} | < \varepsilon \quad \text{para} \quad m \geq p \ , \ n \geq q,$$

por tanto, la (4) nos da

$$| S - f(z, w) | < | 1 - z | \, | 1 - w | \sum_0^p \sum_0^q | R_{m,n} | \, | z^m | \, | w^n | +$$

$$+ \sum_{p+1}^\infty \sum_{q+1}^\infty | R_{m,n} | \, | z^m | \, | w^n | + \sum_{m=0}^p \sum_{n=q+1}^\infty | R_{m,n} | \, | z^m | w^n | ,$$

$$+ \sum_{n=0}^q \sum_{m=p+1}^\infty | R_{m,n} | \, | z^m | \, | w^n | ,$$

donde

$$R_{m,n} = S - S_{m,n}.$$

Además resulta

$$|1-z|\,|1-w|\sum_0^p\sum_0^q |R_{m,n}|\,|z^m|\,|w^n| < |1-z|\,|1-w|\,A$$

donde

$$A = \sum_0^p\sum_0^q |R_{m,n}| \quad , \quad \{|z|<1 \;,\; |w|<1\};$$

$$|1-z|\,|1-w|\sum_{p+1}^{\infty}\sum_{q+1}^{\infty} |R_{m,n}|\,|z^m|\,|w^n| <$$

$$< |1-z|\,|1-w|\,\varepsilon\cdot\sum_{p+1}^{\infty}\sum_{q+1}^{\infty} |z_m|\,|w^n| < \varepsilon\frac{|1-z|}{1-|z|}\cdot\frac{|1-w|}{1-|w|}$$

y como los puntos z y w pertenecen a los ángulos asociados (Δ, Δ'), existen entonces dos constantes α y β tales que

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} < \alpha \quad , \quad \frac{|1-w|}{1-|w|} < \beta \qquad \alpha < 1 \quad , \quad \beta < 1$$

luego

$$|1-z|\,|1-w|\sum_{p+1}^{\infty}\sum_{q+1}^{\infty} |R_{m,n}|\,|z^m|\,|w^m| < \varepsilon\,.\,\alpha\,\beta$$

para todos los puntos del dominio (Δ, Δ'). De la condición de fininitud

$$|S_{m,n}| < M \qquad (m\,,\,n = 1, 2, \ldots)$$

resulta

$$|S| < M,$$

luego

$$|R_{m,n}| < 2\,M\,;$$

por tanto

$$|1-z|\,|1-w|\sum_{m=0}^{p}\sum_{n=q+1}^{\infty} |R_{m,n}|\,|z^m|\,|w^n| <$$

$$< |1-z|\,|1-w|\,2\,M\,\frac{P}{1-|w|} < |1-z|\,2\,M\,\beta\,P$$

con $$P = \sum_0^p |z^m| .$$

Del mismo modo, se tiene

$$|1-z|\,|1-w| \sum_{n=0}^{q} \sum_{m=p+1}^{\infty} |R_{m,n}|\,|z^m|\,|w^n| <$$

$$< |1-w|\, 2M\alpha Q \quad , \quad Q = \sum_0^q |w|^n$$

Teniendo en cuenta estas desigualdades la (1), resulta

$$|S-f(z,w)| < |1-z|\,|1-w|\,A + |1-z|\,2M\beta P +$$

$$+ |1-w|\,2M\alpha Q + \varepsilon\alpha\beta.$$

Fijado el número ε, quedan fijados A, P y Q, y se pueden determinar dos números positivos δ, y μ, tales que

$$|1-z|\,|1-w|\,A + |1-z|\,2M\beta P + |1-w|\,2M\alpha Q < \varepsilon$$

para $$|1-z| < \delta \quad , \quad |1-w| < \mu,$$

por tanto
$$|S-f(z,w)| < \varepsilon(1+\alpha\beta)$$

para los puntos z y w dl dominio (Δ, Δ') y tales que
$$|1-z| < \delta \quad , \quad |1-w| < \mu \; ;$$
luego
$$\lim_{(z,w)\to 1} f(z,w) = S .$$

Este teorema subsiste también para las series dobles *regularmente convergentes* porque estas series resultan ser también, acotadamente convergentes como se prueba fácilmente.

En vista de la importancia de este teorema, vamos a dar otra demostración fundada en las condiciones de Toeplis-Robison (*).

(*) ROBINSON: *Thesis,* Cornell 1918; *«Divergent double seçuences and series.* Transaction v. 28 (1926) p. 50.

Esas condiciones expresan que para $(i,j) \to \infty$ debe tenerse:

Para ello, consideremos las dos sucesiones $\{ z_i \}$, $\{ m_j \}$ de la región (Δ, Δ') y tal que $z_i \longrightarrow 1$, $w_i \longrightarrow 1$ cuando $(i, j) \longrightarrow \infty$.

La identidad de Dirichlet, se puede escribir

$$f(z_i, w_j) = (1 - z_i)(1 - w_j) \sum_0^\infty \sum_0^\infty S_{m,n} z_i^m w_i^n =$$

$$= \sum_{m=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty a_{m,n}^{(ij)} S_{m,n}$$

donde

$$a_{m,n}^{(ij)} = (1 - z_i)(1 - w_j) z_i^m w_j^n ;$$

debemos probar que

$$\lim_{(i,j) \to \infty} f(z_i, w_j) = S.$$

Por hipótesis la sucesión doble $S_{m,n}$ converge acotadamente a su límite S cuando $(m, n) \to \infty$ y como la sucesión doble de matrices

$$|| a_{(i,j)}^{m,n} ||$$

cumple a la condición necesaria y suficiente de Robison [1] para que la serie doble *transformada*

$$\sum_{m=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty a_{m,n}^{(i,j)} S_{m \cdot n}$$

---

1) $a_{m,n}^{(i,j)} \longrightarrow 0$ para cada m y n.

2) $\sum_{m=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty a_{m,n}^{(i,j)} \longrightarrow 1.$

3) $\sum_{m=0}^\infty | a_{m,n}^{(i,j)} | \longrightarrow 0$, para cada n, $\sum_{n=0}^\infty | a_{m,n}^{(i,j)} | \longrightarrow 0$ para cada m.

4) $\sum_0^\infty \sum_8^\infty | a_{m,n}^{(i,j)} | < k$ (k const. positiva)

lo cual se comprueba fácilmente en nuestro caso.

Otras condiciones pueden verse en las memorias de F. LEJA: « *Sur les transformations linéaires des suites doubles et multiples.* Bulletin International de L'Académia Polonaise de Sc. et des Let. Cracovia (1930), y V. KOJIMA: *On the theory of double sequences* (Tôhoku Math. Jour. t. 21, 1922, ps. 3-14; HAUSDORFF: *Transformations for double sequences.* Bulletín of the American. Math. Soc. N. 4. 1933.

de la serie (1), converja hacia el mismo límite S *cuando* $(i, j) \to \infty$, es decir

$$\lim_{(i,j)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}^{(i,j)} S_{m,n} = S ;$$

el teorema queda demostrado.

El método dado por M. G. Julia del teorema de Abel - Stolz se puede también generalizar a las series dobles.

4. Probaremos ahora la extensión de los teoremas de Frobenius-Stolz y de Hölder - Stolz, a las series dobles de potencias.

TEOREMA II. — *Dada la serie doble*

$$\sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} a_{m,n}$$

pongamos

$$\sigma_{m,n} = \frac{1}{(m+1)(n+1)} S_{m,n}^{(1)}$$

donde

$$S_{m,n} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{i,j} \quad , \quad S_{m,n}^{(1)} = \sum_{0}^{m} \sum_{0}^{n} S_{i,j} ;$$

si la sucesión doble $\sigma_{m,n}$ *converge acotadamente a* S, *entonces la serie*

$$f(z, w) = \sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} a_{m,n} z^m w^n$$

converge absolutamente para $\{|z| < 1, |w| < 1\}$ y $f(z,w) \to S$ *cuando* $(z, w) \to 1$ *permaneciendo en el dominio* (Δ, Δ').

En efecto; consideremos la relación

$$\sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} a_{m,n} z^m w^n = (1-z)^2 (1-w)^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} S_{m,n}^{(1)} z^m w^n ; \qquad [1]$$

de la hipótesis

$$|\sigma_{m,n}| < C \quad (m, n = 0, 1, 2, \ldots)$$

donde C es una constante positiva, y de la (1), puesta en la forma

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{m,n} z^m w^n =$$

$$= (1 - z)^2 (1 - w)^2 \sum_0^\infty \sum_0^\infty (m + n) (n + 1) \sigma_{m,n} z^m w^n ;$$

se deduce

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty | a_{m,n} z^m w^n | < C | 1 - z |^2 | 1 - w |^2 \cdot$$

$$\cdot \sum_{m=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty (m + 1) (n + 1) | z^m | | w^n | .$$

De modo que, si

$$| z | < \sigma < 1 \quad , \quad | w | < \mu < 1 ,$$

el primer miembro tiene por mejorante, la serie doble absolutamente convergente.

$$C (1 + \rho)^2 (1 + \mu)^2 \sum_0^\infty (m + 1) (n + 1) \sigma^m \mu^n ,$$

luego la serie (2) converge aboslutamente en el dominio

$$\{ | z | < 1 , | w | < 1 \}.$$

De las relaciones

$$f (z , w) = \sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{m,n} z^m w^n =$$

$$= (1 - z)^2 (1 - w)^2 \sum_0^\infty \sum_0^\infty (m + 1) (n + 1) \sigma_{m,n} z^m w^n$$

y

$$\frac{1}{(1 - z)^2 (1 - w)^2} = \sum_0^\infty \sum_9^\infty (m + 1) (n + 1) z^m w^n$$

se deduce

$$f (z , w) - S = (1 - z)^2 (1 - w)^2 \sum_0^\infty \sum_0^\infty (m+1) (n+1) (\sigma_{m,n} - S) z^m w^n \quad [4]$$

De

$$\lim_{(m,n)\to\infty} \sigma_{m,n} = S \,,$$

resulta que a todo $\varepsilon > 0$ arbitrario le corresponden los números p y q, tales que

$$| \sigma_{m,n} - S | < \varepsilon \quad \text{para} \quad \begin{cases} m \geq p \\ n \geq q \end{cases}$$

entonces la (4) nos da tomando módulo de ambos miembros

$$| f(z, w) - S | < | 1 - z|^2 \, | 1 - w|^2 \, (A_1 + A_2 + A_3 + A_4)$$

donde

$$A_1 = \sum_{m=0}^{p} \sum_{n=0}^{q} (m+1)(n+1) \, | \sigma_{m,n} - S | \, | z |^m \, | w |^n \leq$$

$$\leq \sum_{0}^{p} \sum_{0}^{q} (m+1)(n+1) \, | \tau_{m,n} - S | = A \quad , \quad (|z| < 1, |w| < 1);$$

$$A_2 = \sum_{p+1}^{\infty} \sum_{q+1}^{\infty} (m+1)(n+1) \, | \sigma_{m,n} - S | \, | z |^m \, | w |^n \leq$$

$$\leq \varepsilon \sum_{p+1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} (m+1)(n+1) \, | z |^m \, | w |^n < \varepsilon \frac{1}{(1 - |z|)^2} \cdot \frac{1}{(1 - |w|)^2} \cdot$$

Cuando los puntos z y w pertenecen *al dominio* (Δ, Δ') existe dos constantes positivas α y β tal que

$$\frac{| 1 - z |}{1 - | z |} < \alpha \,, \quad \frac{| 1 - w |}{1 - | w |} < \beta$$

luego, resulta

$$| 1 - z | \, | 1 - w | \, A_2 < \varepsilon \,.\, \alpha^2 \,.\, \beta^2$$

para todos los puntos del dominio (Δ, Δ').

De la condición

$$| \sigma_{m,n} | < M \qquad (m\,, n = 0\,, 1\,, 2, \ldots)$$

resulta

$$| S | < M$$

luego

$$| \sigma_{m,n} - S | < 2 M ;$$

por tanto

$$A_3 = \sum_{m=0}^{p} \sum_{n=q+1}^{\infty} (m+1)(n+1) | \sigma_{m,n} - S | \, | z |^m \, | w |^n \leq$$

$$\leq 2 M \frac{1}{(1 - | w |)^2} \cdot P \quad , \quad P = \sum_{m=0}^{p} | z |^m$$

luego

$$| 1 - z |^2 \, | 1 - w |^2 A_3 < | 1 - z |^2 \, 2 M \beta^2 P .$$

Del mismo modo se tiene

$$| 1 - z |^2 \, | 1 - w |^2 A_4 < | 1 - w |^2 \, 2 M \alpha Q \quad , \quad Q = \sum_{0}^{q} | w |^n .$$

Teniendo presente estas desigualdades, la (1) resulta

$$| S - f(z, w) | < | 1 - z |^2 \, | 1 - w |^2 A + | 1 - z |^2 \, 2 M \beta^2 P +$$

$$+ | 1 - w |^2 \, 2 M \alpha^2 Q + \varepsilon \alpha^2 \beta^2$$

y como el segundo miembro se puede hacer menor que

$$\varepsilon (1 + \alpha^2 \beta^2)$$

tomando z y w suficientemente próximos a 1, resulta entonces

$$\lim_{(z,w) \to 1} f(z, w) = S .$$

5. Vamos a probar ahora, un teorema más general. Dada la serie doble

$$\sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} a_{m,n} \qquad [1]$$

pongamos

$$S_{m,n} = S^{(0)}_{m,n} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{i,j}$$

$$S^{(1)}_{m,n} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} S^{(0)}_{i,j}$$

$$S^{(2)}_{m,n} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} S^{(1)}_{i,j}$$

en general para k *entero* y positivo (1)

$$S^{k}_{m,n} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} S^{(k-1)}_{i,j} . \qquad [2]$$

Se tiene formalmente la relación

$$\sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} a_{m,n} z^m w^n = (1 - z)^{k+1} (1 - w)^{k+1} \sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} S^{(k)}_{m,n} z^m w^n . \qquad [3]$$

TEOREMA III. — *Si la sucesión doble*

$$\sigma_{m,n} = \frac{S^{(k)}_{m,n}}{\binom{m+k}{m}\binom{n+k}{n}} \qquad [4]$$

converge acotadamente a S, *entonces la serie doble*

$$f(z, w) = \sum_{0}^{\infty} a_{m,n} z^m w^n \qquad [5]$$

converge absolutamente en el dominio $\{ |z| < 1, \ (w| < 1 \}$ y $f(z,w) \rightarrow S$, *cuando* $(z,w) \rightarrow 1$ *permaneciendo en el dominio* (Δ, Δ').

En efecto; por hipótesis

$$| \sigma_{m,n} | < C \quad , \quad (m , n = 0, 1, 2, \ldots)$$

donde C es una constante positica; por tanto la (3) se puede escribir

$$\sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} | a_{m,n} z^m w^n | \leq$$

$$C \, | 1 - z |^{k+1} | 1 - w |^{k+1} \sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} \binom{m+k}{m} \binom{n+k}{n} \sigma \, | z^m | \, | w^n |$$

(1) Estas sucesiones dobles fueron introducidas por C. MOORE para el caso más general de k *real* y $(k > -1)$

luego el primer miembro tiene, para

$$|z| < \rho < 1 \quad , \quad |w| < \mu < 1$$

como mayorante a la serie doble absolutamente convergente

$$\frac{C}{(1-\rho)^{k+1}(1-\mu)^{k+1}} = \sum_0^\infty \sum_0^\infty \binom{m+k}{m}\binom{n+k}{n} \rho^m \mu^n ;$$

por tanto la serie doble (5) converge absolutamente en el dominio

$$\{|z| < 1, \quad , \quad |w| < 1|\}.$$

De las relaciones

$$f(z, w) = \sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{m,n} z^m w^n =$$

$$(1-z)^{k+1}(1-w)^{k+1} \sum_0^\infty \sum_0^\infty \binom{m+k}{m}\binom{n+k}{n} \sigma_{m,n} z^m w^n$$

y

$$\frac{1}{(1-z)^{k+1}(1-w)^{k+1}} = \sum_0^\infty \sum_0^\infty \binom{m+k}{m}\binom{n+k}{n} z^m w^n$$

$$\{|z| < 1 \quad , \quad |w| < 1\}$$

se deduce

$$f(z,w) - S =$$

$$= (1-z)^{k+1}(1-w)^{k+1} \sum_0^\infty \sum_0^\infty \binom{m+k}{m}\binom{n+k}{n} (\sigma_{m,n} - S) z^m w^n \quad [5]$$

Puesto que

$$\lim_{(m,n)\to\infty} \sigma_{m,n} = S$$

a todo $\varepsilon > 0$ arbitrario le corresponde los números p y q : tales que

$$|\sigma_{m,n} - S| < \varepsilon \quad \text{para} \quad \begin{cases} m \geq q \\ n \geq p \end{cases}$$

luego la (5) se puede escribir

$$|f(z, w| - S| < |1 - z|^{k+1} |1 - w|^{k+1} (B_1 + B_2 + B_3 + B_4)$$

donde

$$B_1 = \sum_0^p \sum_0^q \binom{m+k}{m}\binom{n+k}{n} | \sigma_{m,n} - S | \, | z |^m \, | w |^n < A .$$

$$B_2 < \varepsilon \frac{1}{(1 - | z |)^{k+1}} \frac{1}{(1 - | w |)^{k+1}}$$

luego

$$| 1 - z |^{k+1} \, | 1 - w |^{k+1} B_2 < \varepsilon \, \alpha^{k+1} \beta^{k+1}$$

donde

$$\frac{| 1 - z |}{1 - | z |} < \alpha \; , \qquad \frac{| 1 - w |}{1 - | w |} < \beta .$$

para todos los puntos (z, w) del dominio (Δ, Δ').

De la condición

$$| \sigma_{m,n} | < M \quad (m, n = 0, 1, \ldots)$$

resulta

$$| \sigma_{m,n} - S | < 2 M$$

luego

$$B_3 < 2 M \frac{1}{(1 - | w |)^{k+1}} \cdot P \quad , \quad P = \sum_q^p | z |^m$$

por tanto,

$$| 1 - z |^{k+1} \, | 1 - w |^{k+1} B_3 < | 1 - z |^{k+1} \, 2 M \, \beta^{k+1} P .$$

Del mismo modo

$$| 1 - z |^{k+1} \, | 1 - w |^{k+1} B_4 < | 1 - w |^{k+1} \; 2 M \, \alpha^{k+1} Q \; ;$$

de donde resulta finalmente

$$| S - f(z, w) | < | 1 - z |^{k+1} \, | 1 - w |^{k+1} A + | 1 - z |^{k+1} \, 2 M \, \beta^{k+1} P +$$

$$+ | 1 - w |^{k+1} \, 2 M \, \alpha^{k+1} Q + \varepsilon \, \alpha^{k+1} \beta^{k+1} \; ;$$

y como el segundo miembro se puede hacer menor que

$$\varepsilon \, (1 + \alpha^{k+1} \beta^{k+1})$$

para z y w suficientemente próximo a 1, resulta entonces demostrado el teorema:

Para $k = 1$, resulta el teorema de Hardy-Bromwich.

6. Sea la serie doble

$$\sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} a_{m,n}$$

y consideremos la media doble de Holder

$$\eta_{m,n} = \frac{S_{m,n}^{(k)}}{(m+1)(n+1)} \qquad [1]$$

donde k es un número natural.

Por otra parte, se tiene

$$\sigma_{m,n} = \frac{S_{m,n}^{(k)}}{\binom{m+h}{m}\binom{n+k}{n}} =$$

$$= \frac{k!\; k!\; S_{m,n}}{(m+1)\ldots(m+k)\,(n+1)\ldots(n+k)} \qquad [2]$$

y si existe el

$$\lim_{(m,n)\to\infty} \frac{S_{m,n}^{(k)}}{\binom{m+k}{m}\binom{n+k}{n}} = S$$

también se verifica que

$$\lim_{(m,n)\to\infty} \frac{(k!)^2}{m^k\, n^k}\, S_{m,n}^{(k)} = S$$

y

$$\lim_{(m,n)\to\infty} \frac{S_{m,n}^{(k)}}{(m+1)(n+1)} = S\,.$$

Luego, si en el enunciado del teorema (III) se cambia la sucesion doble $\sigma_{m,n}$ por la $\eta_{m,n}$, se obtiene entonces la extensión del teorema de Holder-Stolz a las series dobles.

Para z y w *reales* resulta otro teorema de Hardy-Bronwich.

2. SUMABILIDAD ABEL-STOLZ

7. Dada la serie doble, convergente o no en el sentido de Pringheim

$$\sum_{0}^{\infty} a_{m,n}\,, \qquad [1]$$

diremos que ella es *sumable con el método* de *Abel-Stolz* o *sumable* (*A*) *con suma S,* si la serie doble de potencias

$$f(z, w) = \sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} a_{m,n}\, z^m\, w^n \qquad [2]$$

de las variables complejas z y w, converge en los círculos asociados $\{\,|z| < 1,\ |w| < 1\,\}$ y es

$$\lim_{(z,w) \to \infty} f(z, w) = S$$

Cuando las variables z y w tienden simultánea e independientemente a 1, por caminos interiores a los ángulos asociados $[\Delta, \Delta']$ de Stolz.

$$\frac{|1 - z|}{1 - |z|} < A \quad , \quad \frac{|1 - w|}{1 - |w|} < B\,.$$

La condición de permanencia se verifica si la serie doble (1) es convergente acotadamente, según nuestro teorema (I).

Todas las propiedades de las series dobles absolutamente convergentes, subsisten también en este método de sumación, como es fácil probar.

Para z y w *reales* se tiene el método de Abel-Poisson ([1]).

TEOREMA IV. — *Si las dos series dobles*

$$\sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} u_{m,n} \quad [1] \quad \text{y} \quad \sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} v_{m,n} \qquad [2]$$

([1]) J. C. VIGNAUX: *Sul metodo di sommazione di Abel-Poisson per le serie doppie,* Bollettino dell'U. Mat Italiana, Ottobr. 1933; y Publicación Nº 13, serie B, de la Facultad de Ciencias Físico etc. de Bs. Aires, 1933.

son sumables (A) *con sumas* u *y* v *respectivamente, y además sus sumas parciales*

$$U_{m,n} = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} u_{\mu,\nu} \quad [3] , \qquad V_{m,n} = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} v_{\mu,\nu} \quad [4]$$

verifican las condiciones

$$U_{m,n} = O(1) \quad , \quad V_{m,n} = O(1) \quad [5]$$

la serie producto (Cauchy)

$$\sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} w_{m,n}$$

con

$$\begin{aligned} w_{m,n} = {} & u_{00} v_{m,n} + u_{01} v_{m,n-1} + \ldots + u_{0n} v_{m,0} \\ & + u_{10} v_{m-1,n} + u_{11} v_{m-1,n-1} + \ldots + u_{1n} v_{m-1,0} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + u_{m0} v_{0m} + \ldots \qquad\qquad \ldots + u_{m,n} v_{00} , \end{aligned}$$

es también sumable (A) *con suma* $w = u\,v$.

En efecto; de las condiciones (5) resulta que existen dos números positivos M y N tales que

$$| U_{m,n} | < M \quad , \quad | V_{m,n} | < N \qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots)$$

con lo que, de

$$u_{i,j} = U_{i,j} - U_{i-1,j} - U_{i,j-1} + U_{i-1,j-1}$$

$$v_{i,j} = V_{i,j} - V_{i-1,j} - V_{i,j-1} + V_{i-1,-1}$$

resulta

$$| u_{i,j} | < 4\,M \quad , \quad | v_{i,j} | < 4\,N$$

y entonces las series dobles

$$u(z, w) = \sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} u_{m,n} z^m w^n \quad , \quad v(z, w) = \sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} v_{m,n} z^m w^n$$

son absolutabente convergentes en el dominio$\{|z| < 1, \; |w| < 1\}$. Haciendo el producto de estas dos series dobles, resulta la serie

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty u_{m,n} z^m w^n \sum_0^\infty \sum_0^\infty v_{m,n} z^m w^n = \sum_0^\infty \sum_0^\infty w_{m.n} z^m w^n$$

absolutamente convergente en el mismo dominio y cuya suma es

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty w_{m,n} z^m w^n = u(z, w) \cdot v(z, w)$$

por tanto

$$\lim_{(z,w)\to\infty} u(z, w) \cdot \lim_{(z,w)\to\infty} v(z, w) = \lim_{(z,w)\to\infty} \sum_0^\infty \sum_0^\infty w_{m,n} z^m w^n$$

y según las hipótesis, se tiene finalmente

$$uv = \lim_{(z,w)\to\infty} \sum_0^\infty \sum_0^\infty w_{m,n} z^m w^n = w \, .$$

8. *Método de Cesaro* $(C, r. s.)$. — Consideremos la serie doble

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{m,n}$$

y pongamos

$$\sigma_{m,n} = \frac{S_{m,n}^{(r,s)}}{A_{m,n}^{(r,s)}}$$

donde

$$S_{m,n}^{(r,s)} = \sum_{i=8}^{m} \sum_{j=0}^{n} \binom{m+r-i}{r} \binom{n+s-j}{s} a_{ij}$$

$$A_{m,n}^{(r,s)} = \binom{m+r}{m} \binom{n+s}{n}$$

con

$$\binom{m+r}{m} = \frac{\Gamma(m+r+1)}{\Gamma(r+1)\,(m+1)} \quad , \quad r > -1$$

$$\binom{n+s}{n} = \frac{\Gamma(n+s+1)}{\Gamma(s+1)\,(n+1)} \quad , \quad s > -1 \, .$$

Se dice que la serie (1) es *sumable Cesaro de orden* $(r, s > -1)$ o *sumable* $(C, r\ s)$ $(r, s > -1)$ *con suma* S, cuando [1]

$$\lim_{(m,n) \to \infty} \sigma_{m,n} = S. \qquad [2]$$

Diremos que ella es *sumable acotadamente* (C, r, s), si existe el límite (2) y se verifica además la condición

$$\left| \frac{S^{(r,s)}_{m,n}}{A^{(r,s)}_{m,n}} \right| < C \quad (m, n = 0, 1, 2, \ldots$$

donde C es una constante positiva.

Para $r = s = 0$, se tiene

$$\sigma_{m,n} = S_{m,n}$$

luego la sumabilidad $(C.\ 0\ 0)$ y la sumabilidad acotada $(C.\ 0, 0)$, coinciden respectivamente, con la convergencia y la convergencia acotada.

Finalmente, dice que la serie doble es *sumable regularmente* (C, r, s) $(r, s > 1)$, si la sucesión doble $\sigma_{m,n}$ *converge regularmente.*

Si la serie doble de potencias

$$f(z, w) = \sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{m,n} z^m w^n$$

converge en el dominio $\{ |z| < 1, \ |w| < 1 \}$, se tiene

$$f(z, w) = (1 - z)^{r+1} (1 - w)^{s+1} \sum_{m=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty S^{(r,s)}_{m,n} z^m w^n \qquad [1]$$

para todo r y s enteros y positivos.

[1] G. M. MERIMAN, *Annals of Math.*, v. 28 (1927), introdujo la *sumabilidad* (C, r, s) de *orden entero y positivo.*

ADANS, *Transformations of double sequences with application to Cesàro summability of double serie,* «*Bull. of the Amer. Math. Soc*» V. 37 (1931), p. 741; y *Trans of Math.* V. 34 (1932).

LÖOCH, *Über den Permanenzsatz gewisser Limitierungsverfahren für Doppelfobgen,* «*Math. Ann.*» V. 34 (1931) p. 281.

AGNEW, *On summability of double sequences.* «Amerc. Journal. of Math.» V. 54 (1932).

Como en el caso del método de Cesaro de *orden real* (C, δ) $(\delta > -1)$, se puede adoptar esta identidad para definir la sucesión doble $S_{m,n}^{(r,s)}$ para r y s *reales* y $r, s > -1)$.

Probaremos ahora el siguiente teorema que pone en relación el proceso $(S, r, s,)$ con el de Abel-Stolz.

TEOREMMA V. — *Si la serie doble* (1) *es sumable acotadamente*

$$(C, r, s) \quad (r, s > -1)$$

ella es también sumable Abel-Stolz *con igual suma.*

En efecto; por hipótesis

$$\lim_{m,n \to \infty} \sigma_{m,n} = \lim_{m,n \to \infty} \frac{S_{m,n}^{(r,s)}}{\binom{r+m}{m}\binom{s+n}{n}} = S$$

y

$$|\sigma_{m,n}| < C \quad , \qquad (m, n = 0, 1, 2, \ldots)$$

donde C es una constate positiva.

De la relación (1), se deduce,

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty |a_{m,n}| \, |z|^m \, |w|^n < C \, |1 - z|^{r+1} \, |1 - w|^{s+1}$$

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty \binom{m+r}{m}\binom{n+s}{n} |z|^m \, |w|^n$$

de suerte que, para:

$$|z| < \rho < 1 \quad , \quad |w| < \mu < 1,$$

el primer miembro tiene por mayorante la serie doble absolutamente convergente

$$\frac{1}{(1+\rho)^{r+1}(1+\mu)^{s+1}} =$$

$$= (1+\rho)^{r+1}(1+\mu)^{s+1} \sum_0^\infty \sum_0^\infty \binom{m+r}{m}\binom{n+s}{n} \rho^m \sigma^n$$

de donde resulta, la convergencia absoluta de la serie doble

$$f(z, w) = \sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{m,n} z^m w^n$$

en el dominio complejo

$$\{|z| < 1 \quad , \quad |w| < 1\}.$$

Consideremos ahora dos sucesiones de números $\{z_i\}$, $\{w_j\}$ del dominio asociado (Δ, Δ') y tales que

$$z_i \longrightarrow 1 \quad , \quad w_j \longrightarrow 1 \quad , \quad (i, j) \longrightarrow +\infty \; ;$$

se tiene entonces en este dominio

$$f(z_i, w_j) = (1 - z_i)^{r+1} (1 - w_j)^{s+1} \sum_0^\infty \sum_0^\infty \sigma_{m,n} \binom{m+r}{m} \binom{n+s}{s} z_i^m w_j^n$$

$$= \sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{m,n}^{(i,j)} \sigma_{m,n}$$

donde

$$a_{m,n}^{(i,j)} = \binom{m+r}{r} \binom{n+s}{s} (1 - z_i)^{r+1} (1 - w_j)^{s+1} z_i^m w_j^n .$$

Como la matriz doble

$$\left\| a_{m,n}^{(i,j)} \right\|$$

satisface a la condición del teorema de Robinson [1] resulta entonces que la transformada

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{m,n}^{(i,j)} \sigma_{m,n} \longrightarrow S \quad , \quad (i, j) \longrightarrow \infty$$

es decir

$$\lim_{(i,j) \to \infty} f(z_i, w_j) = S .$$

Para $r = s = 0$, resulta el teorema (II) y para $r = s = 1$, el teorema (III).

Finalmente para $r = s = k$ entero y positivo se tiene el teorema (IV).

Como toda serie regularmente sumable $(C, r\ s)$ es también acotadamente sumable (C, r, s) con igual suma, el teorema anterior subssiste en consecuencia para aquéllos.

(1) *Loc. cit.* Se comprueba en seguida, teniendo presente que

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{m,n}^{(i,i)} = (1 - z_i)^{r+1} (1 - w_j)^{s+1} \sum_{m=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty \binom{m+r}{r} \binom{n+s}{s} z_i^m w_j^n = 1 ,$$

y que $$\sum_0^\infty \sum_0^\infty \left| a_{m,n}^{(i,j)} \right| = \left(\frac{|1 - z_i|}{1 - |z_i|} \right)^{r+1} \left(\frac{|1 - w_j|}{1 - |w_j|} \right)^{s+1} < \alpha^{s+1} . \beta^{r+1} < N$$

puesto que $$\frac{|1 - z_i|}{1 - |z_i|} < \alpha \quad , \quad \frac{|1 - w_j|}{1 - |w_j|} < \beta .$$

(*Continuará*)

DESCRIPCIONES Y ANOTACIONES DE DÍPTEROS ARGENTINOS

Por EVERARD E. BLANCHARD

En las líneas siguientes doy a conocer veinte especies y cuatro géneros nuevos de dípteros argentinos. Además comunico algunas anotaciones sobre especies conocidas. Por lo menos, cinco de las especies señaladas son predatoras o parásitos de insectos dañinos a la agricultura, mientras que otras son plagas de mayor o menor importancia. Como en mis trabajos anteriores, empleo el sistema de abreviaturas para los términos quetotáxicos y de la nervulación alar, encontrándose al final del trabajo, una lista de las abreviaturas empleados con su explicación correspondiente. En cuanto a la terminología empleada, ésta corresponde a la dada por Tyler Townsend en su « Manual of Myiology », con pocas excepciones.

CECIDOMYIIDAE

Phagodiplosis, gen. nov.

Segmentos flagelares del macho bi-nudosos; nudo basal con una serie de circunfilos subiguales, el preapical con dos series. Uñas tarsales todas con diente basal. Palpos de 4 segmentos. Segmento basal del corchete simple. Para otros caracteres, véase descripción del genotipo *Phagodiplosis haywardi* que sigue. El nuevo género se coloca cerca de *Olesicoccus,* Borg, del cual se distingue por el diente basal en todas las uñas tarsales. Del género *Dicrodiplosis,* Kieffer se separa por la falta de espinas obtusas subventrales en los lóbulos genitales de la hembra.

Phagodiplosis haywardi, sp. nov.

Macho. — Cabeza parduzca. Palpos blanquecinos. Antenas negruzcas con el primer segmento más claro y amarillento. Mesonoto negro, aclarándose cerca de los bordes laterales. Pleuras claras ama-

rillentas; escleritos ventrales ennegrecidos. Patas testáceo amarillentas, con escamas negruzcas. Abdomen amarillento a rojo pardusco con fajas transversas ennegrecidas en cada tergito. Aparato genital ennegrecido. Alas ligeramente ahumadas.

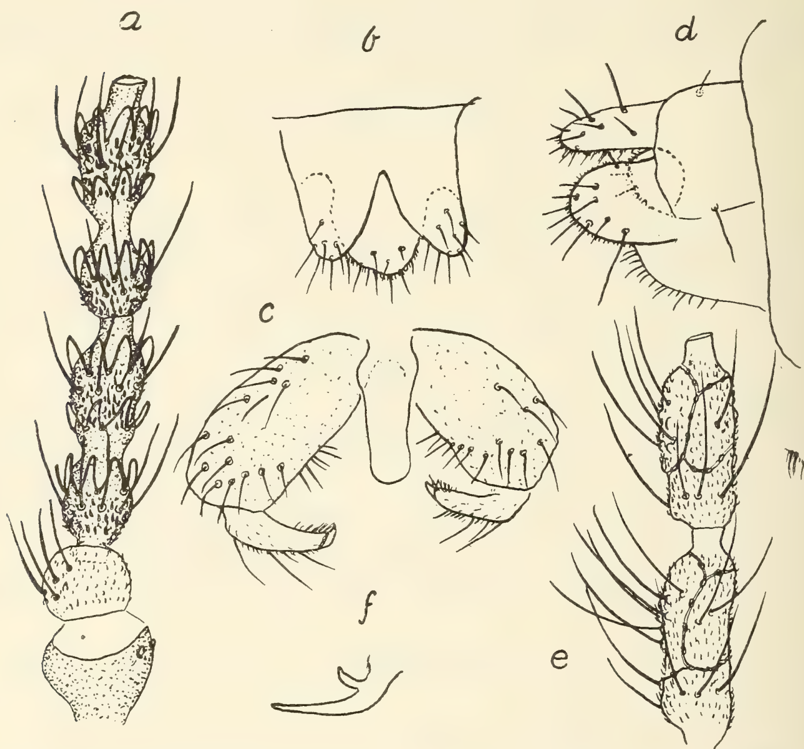


FIG. 1. — *Phagodiplosis haywardi*, gen. et. sp. nov.; *a* primeros cuatro segmentos de la antena del macho; *b* y *c*, genitalia del macho; *d*, genitalia de la hembra; *e*, segmentos III y IV de la antena de la hembra; *f*, uña del distotarso posterior.

Antenas 2 + 12, tan largas como el cuerpo. II decididamente más ancho que largo, microespinulosa y con abundantes cerdas subiguales a 1 ½ veces su largo. Nudo basal de los segmentos flagelares, sub-esférico con una serie de cerdas largas y otra de circunfilos; nudo preapical subpiriforme, con una serie irregular de cerdas largas y dos series de circunfilos. Palpos de 4 segmentos; 1 subpiriforme, casi 2 veces más largo que ancho; II subigual al IV, pero más grueso y 1 ½ veces el largo del III; todos microespinulosos y con pocas cerdas subiguales a 1 ½ veces el ancho máximo de los

segmentos. Nervulación alar como en *Olesicoccus,* Borg., (1,25 × 0.46 mm.).

Largo. — 1,5 mm.

Cotipos. — En la colección del autor.

Habitat. — Criado sobre *Alichtensia* sp. (*orientales,* Lah.?) 21/I/36, y *Saissetia hemisphaerica,* VI/1936, en Concordia, Entre Ríos, por el entomólogo Kenneth Hayward, a quien dedico gustosamente la nueva especie.

STRATIOMYIIDAE

Ptecticus xanthipes, sp. nov.

Hembra. — Verde claro subamarillento. Cara y tubérculo frontal blanquecinos. Frente verde amarillento luciente. Placa ocelar y occipucio negruzcos, este último con pelitos dorados postorbitales que adquieren mayor longitud en los ángulos inferiores. Frente apenas estrechándose anteriormente, con pelos largos amarillentos finos con excepción de algunos negros en la placa ocelar y otros detràs de ésta. Orbitas internas mates, muy estrechas al nivel de los ocelos y ensanchándose en forma regular hasta la base hundida del tubérculo frontal, donde adquieren el ¼ del ancho total del espacio interocular. En algunos ejemplares las órbitas son obscurecidas hasta a veces, negruzcas. Ancho cefálico, 2.94; frente, 0.50 en el vértice y 0.30 mm. al nivel del tubérculo. Tubérculo frontal 0.18 de largo. Altura de la cabeza, 1.85; largo, 1.62 mm.

Antenas amarillo ocráceas con pruina pálida amarillo blanquecina y cerditas y pelitos dorados colocados en el cuarto inferior de la altura ocular, I, 0.19; II, 0.26, con ápice triangular subagudo que llega hasta la mitad del III en la cara interna; III, 0.33 × 0.41, troncado (ancho apical 0.30), sin segmentación en la cara interna, cara externa con 4 segmentos. Arista pardo negruzca; 0.95 mm.; 1/5 basal ensanchado. Probóscide amarillo blanquecino con pruina blanquecina y pelitos finos amarillentos. Palpos amarillo blanquecinos, pedunculados.

Mesonoto verde ocráceo con una faja ancha mediana parduzca poco marcada que corre desde el medio de la presutura, ensanchándose hasta el borde posterior de la postsutura. Esta faja, lóbulos postalares, escudete y mitad superior del metanoto, con abundantes pelitos negruzcos. Pleuras y resto del tórax verdoso pálido con sólo pelitos dorados que son más abundantes y largos en las metapleuras. Balancines verde negruzcos con los 2/3 basales del pedúnculo,

amarillentos; base interna del pedúnculo con mechón de pelitos negros.

Escutelo con una manchita obscura discal mal marcada cerca del ápice.

Abdomen verde amarillento con los bordes laterales amarillentos. Dorso abdominal entre los bordes amarillentos, con abundantes pelitos negruzcos, resto del abdomen sólo con pelos amarillos o dorados. Segmentos IV y V con fajas transversas pardo-negruzcas. Bordes apicales de los segmentos II, III, IV y V, más claros, amarillentos, con algunos pelos dorados que faltan a veces sobre el mediano. Largo de los segmentos: I, 0.94 × 1.58; II, 1.10 × 2.25; III, 1.13 × 2.56; IV, 1.30 × 2.64; V, 1.13 × 2.33; VI, 0.41 × 1.24; VII, 0.33 × 0.82 mm.

Patas amarillas con las tibias, y tarsos I, IV y V de las patas posteriores, negros; tarsos II y III de las patas posteriores, blancos, el II revestido casi enteramente de pelitos blancos, el IV con algunos pelitos negros.

Alas hialinas con la mitad anterior amarilletnta, especialmente las células costales, subcostales y marginales. Largo 9.5 × 3.20 mm. (Véase fig. 8, f).

Largo. — 12 - 13 mm.

Macho. — Parecido a la hembra, pero con sólo 6 segmentos abdominales visibles. Frente muy angosta al nivel de la base del tubérculo frontal, menos que el máximo diámetro del ocelo anterior (0.07); en el vértice mide 0.49 mm. Tubérculo frontal a veces con manchas obscurecidas. Forcípulas amarillo ferruginosas.

Habitat. — Lules, Tucumán, criado de naranjas, V/1938, Enrique Schultz, leg.

Cotipos. — En la colección del autor.

Observaciones. — Esta especie se distingue fácilmente de *testaceus*, Fabr., por el colorido verdoso intenso.

SYRPHIDAE

Salpingogaster dactylopianus, sp. nov.

Macho. — Negro parduzco. Frente pardo obscura con los bordes orbitales amarillos. Cara con faja ancha pardo rojiza, (más obscura en el tubérculo facial), separada de los bordes oculares por una faja angosta irregular, amarilla; toda la cara, con excepción del tubérculo, con pruina blanquecina abundante. Triángulo ocelar,

vértices y occipucio, negros. Vértice y postórbitas con pruina dorada. Occipucio con pruina cinérea. Proboscide pardo obscura, casi completamente retraída en la cavidad bucal. Cabeza sub-hemisférica.

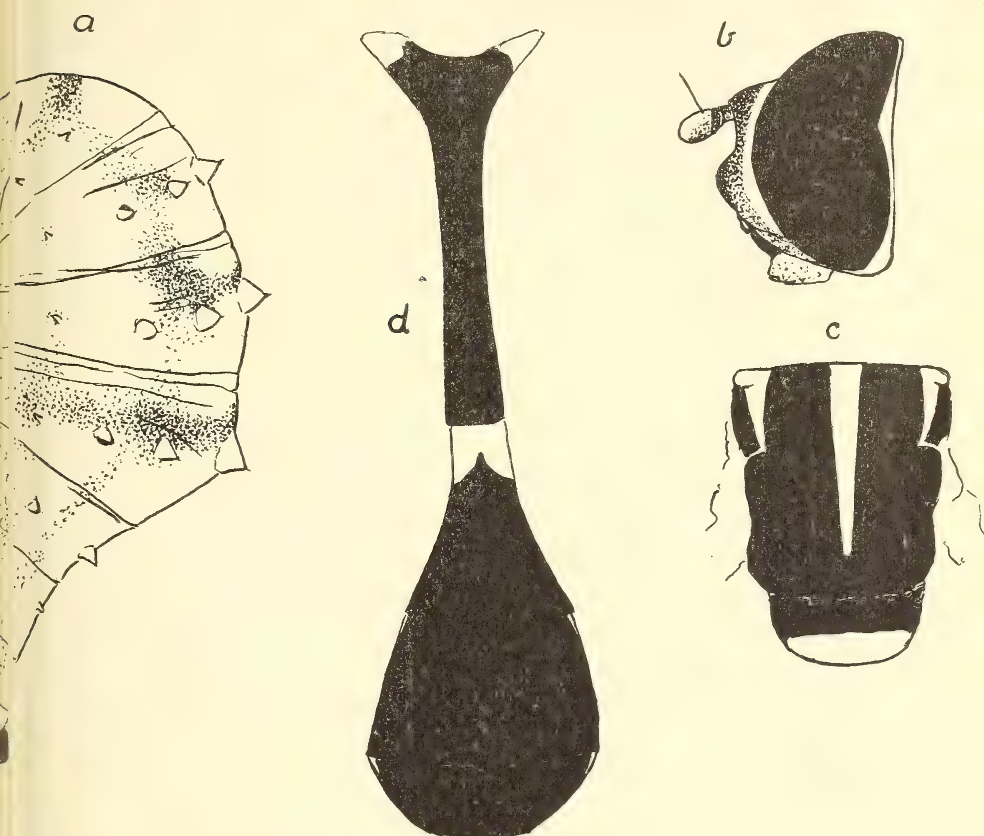


FIG. 2. — *Salpingogaster dactylopianus*, sp. nov.; *a*, pupa vista de costado; *b*, cabeza vista de perfil; *c*, mesonoto y escutelo; *d*, abdomen, aspecto dorsal.

Antenas amarillas a ocre parduscas; los I y II obscurecidos y el III con pruina fina amarillenta. Arista (0.45) negruzca con el 1/3 basal amarillenta. Segmento III (0.41) apenas màs de 2 veces el II (0.18), I con sétulas negras apicales.

Ojos unidos en casi la mitad de la frente o sea por una distancia subigual al largo del III antenal. Vértice estrechado y

pequeño. Cara y frente con pelitos blanquecinos finos. Tubérculo facial redondeado; ángulo facio-oral muy débil.

Mesonoto pardo negruzco con reflejos sedosos ora verdosos y con tres fajas longitudinales amarillas; una mediana desde el borde anterior hasta cerca de la sutura escutelar y una en cada lado, triangular, alargada, que ocupa el lóbulo humeral y llega con su ápice posterior hasta la sutura; el lado interno paralelo al mediano. Pleuras pardo negruzcas con reflejos sub-metálicos. Mesopleura con una faja vertical amarillenta que cae desde el preparáptero y casi se une con una mancha supero-mediana de la esternopleura; ambos escleritos densamente blanco pruinosos. Metapleura más clara, pardo amarillento. Dorso del tórax y pleuras con micropubescencia blanquecina abundante.

Escutelo negro con la ½ apical amarillo intenso. Escamas alares blanquecinas con cilias del mismo color; escama superior sub-amarillenta. Balancines negruzcos con el pecíolo y una mancha en el capítulo, menos intensos.

Abdomen negro subluciente con ligeros reflejos cobrizos. I con una mancha amarilla transversa, latero-basal, a cada lado. III con manchas latero-basales que se unen en el mediano dorsal y que ocupan el 1/3 basal de la margen lateral del segmento. IV y V, con manchas latero-basales muy estrechas, de color amarillo débil y poco visibles desde arriba. Abdomen más de 2 veces el lagro del tórax. I dos veces más ancho que largo.II (2.82) subcilíndrico con numerosos pelitos blancos cortos, los laterales apenas 0.11 mm. III (1.88) aproximadamente 5/7 del largo del II, ensanchándose en los 2/3 apicales; el borde posterior (1.50) aproximadamente 3 veces el anterior (0.25). IV (1.50) trapezoidal, el borde posterior (2.07) 1 1/3 veces al anterior. V (0.75) subigual a la 1/2 del IV con el borde posterior apenas más que la mitad del anterior. IV subigual al V y con éste y el hipopigio, sub-verticales.

Hipopigio negruzco con forcípulas sub-testáceas.

Patas negras con el extremo apical de los fémures y el 1/3 basal de las tibias, blanco amarillentos. Coxas posteriores con algunos pelos largos blanquecinos. Tibias posteriores con los 2/3 apicales bruscamente engrosados.

Alas hialinas. Base alar hasta la *S1* y anterior al medigio, toda la *2S*, y una mancha subtriangular invertida con la base contra la *R1*, su ápice tocando la nervadura espuria y el lado interno pasando por la segunda furca radial, negruzca; el 1/3 distal de la *2S*

más intensa. *6R, 6M,* mitad proximal de la *1A,* y los 2/3 proximales de la *1S,* vidriosos, sin microtriquias. Nervulación indicada en la figura 8 *g.*

Largo. — 12 mm.

Cotipos. — En la colección del autor.

Habit. — Parásito del cóccido *Dactylopius indicus,* Green, Los Armadores, Catamarca, 17/III/1938, y Entre Ríos, 26/IV/1397. Criado por el entomólogo Kenneth J. Hayward.

Observaciones. — Las pupas miden 6.5 × 2.8 mm. Son de color gris claro con fajas transversas irregulares obscuras. Tubérculos ocre-subanaranjados. Esta nueva especie se coloca cerca de *bicolor,* Sack, de la cual se distingue por el color más obscuro de las patas y por el dibujo del tórax. De *nigra,* Schiner, por el torax y el III abdominal más largo que el IV.

CONOPIDAE

Aconops syrphidoides, sp. nov.

Hembra. — Cabeza amarillenta con los 2/3 superiores del occipucio y mancha supra-antenal, negruzcos. Mitad superior de la frente y mancha mediana en la 1/2 inferior; mejillas, 1/2 inferior de las postorbitas y 1/4 inferior del occipucio, rojizos. Parafacialias densamente revestidas de pruina sedosa pálido amarillenta. Frente tan larga como ancha, hundida en frente de los ocelos. Facialias y parafacialias subiguales a la 1/2 de la altura de las últimas.

Mejillas aproximadamente el 1/4 de la altura ocular. Eje antenal 4/5 de la altura cefálica.

Antenas pardo negruzcas; ápice del II y base del III, rojizos. Subiguales a 1 1/2 veces el largo de la cabeza. III más de 2 veces el I y 1 1/3 veces el II. Arista apenas el 1/3 del III y más corta que el I. III con surco ancho longitudinal en el canto interno.

Tórax negro con fajas de pruina dorada intensa; una que sigue la sutura interna humeral, notopleura, para luego bajar por la margen posterior mesopleural y esternopleural; un punto medianodorsal prescutelar; una faja transversa metanotal que se une con dos manchas grandes metapleurales. Región supra-alar con pruína amarillenta pálida. Balancines y escamas amarillos, el capítulo de los primeros, sub-pardusco.

Abdomen negro con el ápice del II y base del III, pardo anaran-

jàdos. III con faja transversa apical de pruina intensa amarilla. V con margen apical estrechamente pruinosa y VI y VII con pruina amarillenta irregular y más liviana. Segmento III un poco más largo que el II; éste subigual al VI y un poco más largo que el VII. V más corto, menos que el 1/3 del segmento subsiguiente. Largo relativo de los segmentos: 15; 35; 40; 24; 10; 34; 30. Apófisis copulatriz tan larga como el VII

Patas pardo negruzcas; trocánteres testáceos; extremos basales y apicales de los fémures, el 1/3 basal de las tibias, y los pulvilos, amarillentos.

Alas subhialinas con faja pardo negruzca que ocupa todas las alulas, *1R, 3R,* y 1/4 spuerior de la *5R*. *1S* y *2S,* amarillentas. Nervaduras, pardo obsuras con excepción de la *S2* y la primera sección de la *M2,* que son pálido amarillentas. Mital basal de la *5R* con nervadura espuria que nace en la *5R* muy cerca de la *R6*. *S2* unida a la *R1* cerca del àpice de la primera. *R1* y *R3* con ápices muy aprximados. (Véase figura 8, j).

Largo. — 9.25 mm.

Macho. — Parecido a la hembra. Segmento II abdominal subigual al III, I, V con pruina amarilla más o menos intensa en el borde apical. IV apenas más que 3/4 del III. V aproximadamente 5/7 del IV.

Holotipo. — En la colección del autor.

Habitat. — Catamarca, II, 1936, J. M. Viana, leg.

AGROMYZIDAE

Liriomyza cucumifoliae, sp. nov.

Hembra. — Cabeza amarillo ocrácea con la placa ocelar y una mancha que abarca la mitad superior del occipucio y que se extiende sobre las postórbitas entre la *VRE* y el ángulo postero-superior del borde ocular, negruzcas. Antenas amarillas con arista negruzca. Palpos amarillentos apenas obscurecidos. Angulos verticales débilmente parduscos hasta las *VRI*. Mesonoto pardo negruzco con los bordes laterales amarillos. Pleuras amarillas con las siguientes manchas negruzcas u obscurecidas: una mancha delgada longitudinal en el borde inferior notopleural; mancha subrectangular con el ángulo recto colocado en el ángulo antero-inferior de la mesopleura; ápice superior bien separado del borde anterior y superior mesopleural; una manchita pequeña en el lóbulo humeral; una man-

cha grande que ocupa la esternopleura desde el nivel de la *STPL* y manchitas aisladas en las ptero e hipopleuras. Escutelo amarillo claro sin manchas dorsales, pero con mancha pequeña latero basal debajo y contigua a la *B* de cada lado. Abdomen pardo negruzco con los bordes laterales y apicales de los segmentos estrechamente amarillentos; segmentos ventrales más claros. Hipopigio obscuro negruzco. Patas claro amarillentas con tibias y tarsos negruzcos; coxas y fémures marmoreados de parduzco. Alas ligeramente ahumadas con nervaduras pardo amarillentas. Balancines amarillo claro. Escamas alares un poco ahumadas con cilias obscurecidas.

Mejillas aproximadamente el 1/4 de la altura ocular. *FROR* superior 1 1/2 veces la *FROR* anterior. *FRO* anterior y posterior subiguales; más finas, pero un poco más largas que las *FROR* anteriores. Orbitas frontales con 4 - 6 pelitos cortos. *OC* 4/5 del largo de las *VRI* y apenas más largas que las *POC*. Cerditas intraocelares 3 - 4, subiguales al 1/3 del largo de las *OC*. *PRSTM* 4, casi tan largas como las *VB*. *PO* en serie de 10 de cada lado. *VRI* 1 1/2 veces las *VRE*.

Segmento III antenal (0.93 $\times$ 1.02) apenas más ancho que largo, borde anterior con microcilias subiguales o apenas más largas que el ancho máximo aristal. Arista 3 veces el largo del III antenal y engrosada en el tercio basal; microcilias más cortas que el ancho máximo aristal.

IDC en 2 -3 series longitudinales irregulares, las posteriores no llegan hasta las penúltimas *DC;* éstas separadas de las *DC* prescutelares por 1 1/2 veces la distancia que las separa de las primeras postsuturales que, a su vez, se hallan separadas de la sutura por la 1/2 de la distancia entre ésta y la *DC* presutural posterior. Espacio intra-alar postsutural solo con 2 cerditas; presutura con, aproximadamente, 6 cerditas intrahumerales. *HM* acompañada con 2 - 3 cerditas. *DC* 4 x 3; las 2 anteriores presuturales no diferenciadas de las *IDC;* la penúltima presutural 3/4 de la última, y un poco menos que la mitad de la *DC* prescutelar. *PAL* interna poco desarrollada, piliforme, y apenas más que el tercio de la *PAL* externa; ésta acompañada por un pelito microscópico anterior y muy cerca de la base. *SAL* y *PRSTR* con una cerdita anterior. *IAL* no diferenciada. *MSPL* con 3 cerditas superior y anteriores y 1 inferior. *STPL* con 1 cerdita anterior. Escutelo con las *B* y *AP* subiguales; éstas separadas por una distancia un poco menor a la que las separa de las *B*.

Alas, 1.76 × 0.90 mm. Postestigma (0.82) aproximadamente 2 veces la radio y distocosta unidas. Radiocosta un poco más larga que la distocosta. *M2* colocada en la mitad anterior del disco alar, subrecta. *R6* colocada decididamente proximal a la línea entre el àpice posterior de la *M3;* ésta colocada apenas posteriormente a la mitad de la distancia entre la costa y el borde posterior alar. *R6* subigual a las cerdas costales de la *2S*. *M3* oblicua; más corta que la distancia entre su ápice anterior y la *R6*. *3M* aproximadamente 3 veces el largo de la *M3*. Penúltima sección de la *M2* aproximadamente el 1/3 de la sección anterior. Ultima sección de la *C1* un poco menos que 2 veces la penúltima.

Largo. — 1.90 - 2 mm.

Cotipos. — En la colección del autor.

Habitat. — Las larvas producen galerías en las hojas del melón cultivado, Morón, Prov. Buenos Aires, Ing. José M. Scasso, leg.

Observaciones. — Distínguese està especie de *huidobrensis,* Blnchd. por la coloración general más clara, la mancha mesopleural pequeña en triángulo rectangular que no alcanza el borde posterior y por la coloración clara pardo amarillenta de lá pupa.

Liriomyza sativae, sp. nov.

Hembra. — Cabeza con frente amarilla sub-ocrácea; mejillas, tercio inferior occipital y postórbitas, amarillo blanquecinas. Los dos tercios superiores occipitales, placa ocelar y mancha postorbital superior que llega hasta la *VRI* sin envolverla, negruzcas. Palpos amarillo blanquecinos con dos cerdas fuertes negras apicales. Antenas amarillo subocráceas con arista negra. Mesonotò negruzco subluciente con bordes laterales amarillos. Pleuras claro amarillentas con una mancha grande negruzca que cubre los 3/4 inferiores de la esternopleura. Mesopleura con una manchita obscurecida en el borde superior, otra un poco mayor en el borde inferior. Lóbulos humerales, ptero,meta e hipopleuras con manchitas débilmente obscurecidas. Escutelo amarillo claro con una manchita negra latero basal debajo de y contigua a la *B*. Abdomen pardo negruzco con el vientre, una cruz dorsal en la sutura entre el I y II abdominal, bordes laterales y extremo apical del III, IV y V y faja apical en el VI, pálido amarillentos. Hipopigio negruzco. Fémures claro amarillentos, apenas o no manchados con parduzco. Coxas y trocánteres amarillentos. Tibias y tarsos amarillo parduscos; los de las patas posteriores màs obscuros.

Balancines blancos, escamas amarillentas con cilias y borde parduscos.

Mejillas aproximadamente el 1/4 de la altura ocular. *PRSTM* 3, subiguales a 2/3 el largo de la *VB*. Borde posterior de las mejillas con serie de 6 cerditas que casi llegan hasta la *RO* inferior. *FRO* 4, las superiores reclinadas y 1 1/3 las anteriores. *VRI* 1 1/3 veces las *FROS*. *VRE* muy divergentes y aproximadamente 4/5 de las *VRI*. *OC* muy proclinadas; más gruesas, pero más cortas que las *POC;* éstas divergentes y subiguales a 2/3 de las *VRI*. *PVR* más cortas que las *OC*.

Segmento III antenal tan ancho como largo; bordes apical y ventral redondeados. Arista con microcilias subiguales a 2/3 su máximo diámetro.

DC 4, la prescutelar aproximadamente 2 veces la presutural; la penúltima apenas más cerca de la segunda que de la prescutelar; la anterior separada de la sutura por 2 veces la distancia entre ésta y la primera postsutural. *IDC* en 4 series irregulares (entre las *DC* postsuturales) que terminan a la altura de las penúltimas *DC*. *HM* acompañada por 3 cerditas. *MSPL* con 4 cerditas superiores y una inferior. Región intra-alar postsutural con 7 cerditas. *STPL, NTPL* anterior, *PRPL* y *MSPL,* subiguales. Escutelo con las B francamente más cortas que las *AP*.

Largo dorsal del hipopigio, 0.20; ventral, 0.26 mm.

Alas 1.45 × 0.55 mm. *S2* muy débil y sin pigmentación. Postestigma francamente más de 2 veces la suma de la radio, y distocosta; ésta, apenas màs larga que la radiocosta. *R3* y *R5* sub-rectas. *M2* colocada francamente en la mitad anterior del disco alar, subrecta, con el cuarto apical encorvado hacia atrás, pero con su ápice un poco anterior al ápice alar. *R6* colocada debajo del ápice de la *R1* y en, o apenas proximal a la línea entre el ápice del *S2* y el ápice posterior de la *M3;* éste colocado, más o menos, en la mitad de la distancia entre la costa y el borde posterior alar. *R6* corta, subigual a las cerdas costales de la *2S*. *M3* muy oblicua, separada de la *R6* por aproximadamente 2/3 de su largo. Penúltima sección de la *M2* aproximadamente el 1/3 de la sección anterior. Ultima sección de la *C1,* más o menos, 3 1/2 veces la penúltima.

Largo. — 1.5 - 1.6 mm.

Macho. — Parecido a la hembra con el borde posterior de los segmentos abdominales más amarillentos.

Cotipos. — En la colección del autor.

Habitat. — Las larvas producen galerías en las hojas de la alfalfa en General Pico, Pampa; halladas por mi excelente colabodaro Juan Williamson, XI/1937.

Liriomyza huidobrensis, (Blnch).

Esta especie descripta en 1926 por el autor (1) corresponde al género *Liriomyza,* Mik., de acuerdo con el nuevo arreglo sistemático de los agromízidos por Hendel. De *pagana,* Malloch, se distingue por las tibias y tarsos enteramente negros, y de *cumumifoliae,* Blnchd., por las mejillas más anchas y el colorido general más obscuro. Mancha mesopleural ensanchada en el borde posterior. Escamas alares obscurecidas con cilias largas pardo obscuras. Antenas generalmente sub-parduzcas, el III más obscurecido en la mital apical. Tengo ejemplares de esta especie criados en hojas de *Vicia faba,* L., en José C. Paz, provincia Buenos Aires, por el entomólogo, Juan M. Bosq.

Triticomyza, gen. nov.

Genotipo. — T. cruciata, sp. nov.

Cerca de *Pseudonapomyza,* Hendel, del cual se distingue principalmente por la costa prolongada hasta la *M2,* ésta bien pigmentada, *R6* bien separada de la *M6* y postestigma muy alargado. Otros caracteres incluídos en la descripción del genotipo que sigue:

Triticomyza cruciata, sp. mov.

Hembra. — Amarilla con las partes siguientes negras o negruzcas: occipucio, placa ocelar, una mancha en cada lado que une el occipucio con el ángulo supero-interno ocular, mesonoto, propleura, 1/3 superior del lóbulo humeral, manchita diminuta en el borde superior y la 1/2 inferior de la mesopleura, esternopleura, hipopleura, episterno, metapleura, 2 manchitas pteropleurales, escutelo con excepción de una faja ancha mediano-longitudinal clara amarillenta, metanoto, dorso abdominal con excepción de una cruz sobre el I y II, y el borde apical del VI que son claro-amarillentos, y la esternoteca. Esternitos poco obscurecidos. Antenas amarillentas con el II un poco obscurecido; arista negra. Patas anteriores e intermedias con coxas, trocánteres y fémures claros, los

(1) « A dipterous leaf-miner on Cineraria, new to Science », *Rev. Soc. Ent, Arg.,* Nº 1, pp. 10-11, Junio 30 de 1926.

últimos un poco moteados en el canto dorsal con negruzco; tibias y tarsos parduzcos, los últimos a veces ennegrecidos. Patas posteriores con coxas y trocánteres obscurecidos; fémures claros con canto dorsal manchado; tibias negruzcas y tarsos pardo-negruzcos. Balancines enteramente blanco-amarillentos. Rostro parduseo con palpos amarillentos.

Mejillas aproximadamente el 1/3 de la altura ocular. *VB* apenas más largas que la altura de la mejilla, pero 1 1/5 veces el III antenal. *PRSTM* 5, subiguales a 2/3 de las *VB*. *FRO* 4, las anteriores débiles y subiguales a las 1/2 de las superiores, las 2 superiores gruesas y reclinadas. *VRI* casi dos veces las *FRO* superiores y 1 1/3 veces las *VRE*. *OC* proclinadas, divergentes, finas y tan largas como las *VRE*. *POC* muy divergentes y aproximadamente 2/3 de las *VRI*. Orbitas posteriores anchas, casi subiguales al espacio interocelar. Segmento III antenal (0.125 × 0.100) subcuadrado con el ángulo ápico-dorsal producido en espina. Arista (0.300) ensanchada en el 1/4 basal y con microcilias subiguales a la 1/2 de su ancho màximo.

Tórax con 4 *DC* fuertes; las primeras presuturales subiguales a 3/4 de las prescutelares. *SAL* y *PAL* subiguales a la *DC* prescutelar. *IAL* muy corta, *PRSTR* subigual a la *NTPL* anterior. *NTPL* posterior apenas 2/3 de la anterior y casi tan larga como la *STPL* y la *MSPL*. *ESP* casi igual a la *HM*. Esterno y mesopleura sólo con 2 - 3 pelitos además de las cerdas. Escutelo con las *AP* 1 1/5 veces las *B*.

Abdomen con los segmentos II al VI con *M* subiguales a 2/3 el largo del segmento subsiguiente, las series del II y del III algo interrumpidas en el mediano. Hipopigio con pelos largos cerdosos discales, y 4 *AP* dorsales subiguales a la 1/2 del largo del segmento; largo dorsal del hipopigio, 0.325; largo ventral, 0.400.

Alas 2.10 × 0.96. *S2* muy débil, pero con su ápice bien separado del *R1*, como en *Dyzygomyza*. Costa continuada hasta el ápice de la *M2*; ésta muy cerca del ápice alar. *M3* falta. Primera sección de la *M* y de la *A1* borrada, no pigmentada. Distocosta apenas más larga que la radiocosta; postestigma más de dos veces la suma de las dos primeras. *R6* colocada debajo del ápice de la *S2*, subigual al 1/4 de la radiocosta y separada de la *M6* por una distancia subigual a 5 veces su largo.

Largo. — 2.30 mm.

Habitat. — La larva vive en minas alargadas en las hojas de

trigo, General Pico, Pampa, 30/IX/1935, criada por el Agrº J. Willamson.

Dizygomyza jucunda, (V. d. W.)

Tengo un solo ejemplar de esta especie criada por la Estación Experimental Agrícola de Tucumán, 12/VII/1927, en hojas de algodonero. La pupa es de color amarillo pardusco claro.

Dizygomyza maculosa, (Mall.)

Esta especie ataca con frecuencia las hojas del crisantemo en la Capital Federal y sus alrededores. También tengo ejemplares procedentes de Mar del Plata, criados en *Dahlia, Chrysanthemum* y cardo. (20/I/1932).

Cerodonta denticornis, (Panzer).

Las larvas de esta especie invaden las hojas del trigo y otras gramíneas en la provincia de Buenos Aires. Fué hallada también por el señor Costa Rosas, en La Plata (24/X/1935), quién me envió ejemplares para su determinación.

Phytomyza williamsoni, sp. nov.

Macho. — Amarillo blanquecino con las partes siguientes negras o negruzcas: 1/4 basal de las aristas, placa ocelar, 1/2 superior del occipucio, mesonoto, mancha esternopleural, escutelo, metanoto y último segmento abdominal. Segmento III antenal, tibias y tarsos, especialmente los de las patas intermedias y 1/2 basal de los segmentos abdominales, un poco ahumados u obscurecidos. Alas subahumadas con nervaduras pálido-amarillentas.

Mejillas subiguales a 3/5 la altura del ojo. *FRO* 3, las anteriores más débiles, apenas más de la 1/2 de las superiores que, a su vez, son subiguales a las *VRE*. *VRI* casi 2 veces las *VRE* y subiguales a las *POC*; éstas decididamente divergentes. *OC* proclinadas, apenas más fuertes que las *FROI*. Entre las *FRO* y las órbitas, 5 - 6 pelitos cortos. *VB* subigual al III antenal.

Segmento III antenal tan largo como ancho y redondeado; arista un poco más de 3 veces el III.

Tórax con 3 *DC* fuertes, las prescutelares fácilmente 2 veces las *NTPL*; éstas subiguales a la *MSPL* superior; la inferior, débil. *STPL* subigual a las *NTPL*. Escutelo con las *AP* casi 2 veces las *B* y éstas apenas más de 2 veces el largo escutelar.

Alas, 130 × 0.87. Costa continuada por una corta distancia después del ápice de la *R3*; tercera sección subigual al 1/3 de la segunda. *R6* separada de la furca por 2 veces su largo. *M2* y *C1* representadas por pliegues. Apice de la *R5* separado del ápice de la *M2* por casi 2 veces la distancia entre el primero y el del *R3*.

Largo. — 1.30 mm.

Holotipo. — En la colección del autor.

Habitat. — La larva produce minas en las hojas de *Clematis* sp. ,General Pico, Pampa, 5/VI/1938, Juan Willamson leg.

Observaciones. — Las larvas se hallaban muy parasitadas por *Phytomyzophaga albipes*, Bréthes.

CHAMAEMYIIDAE

Leucopina bosqi, sp. nov.

Hembra. — Negra con pruina densa blanco cenicienta. Antenas con los segmentos I y II claro amarillentos; III negruzco mate con el 1/3 basal amarillento o amarillo rojizo. Arista amarillo sucio con la 1/2 apical un poco obscurecida. Frente aproximadamente el 1/3 del ancho cefàlico, ensanchándose perceptiblemente hacia la margen anterior. Frontalia con pruina menos intensa con excepción de un triángulo agudo mediano que cae desde la placa ocelar hasta la sutura frontal. En cada lado de la placa ocelar e internas a las *VRI*, una impresión lineal, longitudinal. *VRE* subiguales a las 1/2 de la frente y 1 1/2 veces las *VRI*, *PO* en 2 series. Antenas colocadas en la mitad de la altura facial. Lámina facial con carena suave mediana y aproximadamente 4 veces el ancho de las parafacialias. Mejillas un poco menos del 1/3 de la altura ocular. *VB* débiles, apenas más del 1/3 del ancho máximo del III antenal. Segmento III antenal reniforme (0.121 × 0.186), 1 1/2 veces más alto que largo y densamente pubescente. Arista más de 2 veces el largo del III antenal; II casi igual a la 1/2 del largo del III antenal y casi el 1/4 del largo del último segmento aristal.

Mesonoto con 2 fajas negruzcas, cortas y angostas, submedianas presuturales mal marcadas, entre otras aun menos distintas que corren por las líneas dorsocentrales. Balancines blancos, sub-amarillentos. *DC*, 2 postsuturales, las anteriores menos de la mitad de las prescutelares y francamente más cercas a éstas que la distancia entre éstas y el borde escutelar. Las cerditas dorsales mesono-

tales terminan al nivel de la *DC* anterior donde hay aproximadamente 7 - 8 series de *IDC*. *DC* posterior un poco más largo que el escutelo. *HM, PRSTR, PRAL, SAL* y *PALI*, más o menos, iguales a la 1/2 de la *DC* prescutelar. *NTPL, PALE* y *STPL* más fuertes y casi del largo de la última *DC*. Mesopleura desnuda. Sternopleura con 2 - 3 cerditas en el borde superior. Enfrente y muy cerca de la sutura escutelar una impresión transversa débilmente curvada que separa un área estrecha y transversa del resto del mesonoto.

Escutelo sin cerditas discales. *B* y *AP* subiguales al largo escutelar; distancia entre las últimas apenas menor de la que las separan de las *B*.

Abdomen pardo negruzco con pruina densa, blanco ceniciento y plateado en los bordes laterales y apicales del II, y en los demás segmentos con excepción de un punto pequeño mediano en la 1/2 basal de los III, IV y V, y una mancha, casi 2 veces la mediana en cada lado de ésta en el III. VI enteramente pruinoso. Segmento II aproximadamente 1 1/2 veces el III; últimos 4 segmentos subiguales.

Patas amarillentas con coxas, fémures (con excepción de los ápices amarillentos), y la mayor parte de las tibias posteriores, pardo negruzcas con pruina blanco plateada y ceniciente. Ultimo segmento tarsal un poco obscurecido.

Alas (1.80 × 0.77) y escamas débilmente opalinas con nervaduras claro-amarillentas; costa y *R1* obscurecidas. Charretera, basicosta y costigio, claro amarillentos. Ultima sección de la *C1* casi la 1/2 de la penúltima y apenas más larga que la penúltima sección de la *M2*. Segunda sección de la *R5* 2 4/5 veces la primera. Radiocosta apenas más larga que la distocosta y aproximadamente el 1/4 del largo de la postestigma.

Largo. — 1.50 mm.

Cotipos. — En la colección del autor.

Habitat. — Parásito de *Alichtensia sp.* (*orientalis*, Lah. ?), Santiago del Estero, XII/1935, Bosq. col.; Concordia 21/I/36; Hayward, col. y Loreto, Misiones, 2/V/36, Alejandro A. Ogloblin, leg.

Leucopina ceroplastophaga, sp. nov.

Hembra. — Negra, con pruina densa blanco ceniciente. Antenas amarillas; III con arista negra. Proboscide y palpos amarillos, éstos con los ápices ligeramente obscurecidos. Cabeza casi 2 veces

más alta que la larga. Frente 7/17 del ancho cefálico ensanchándose anteriormente y con abundancia de cerditas negras. *FRO*, 3, apenas diferenciadas y subiguales a 2 veces las cerditas frontales próximas; la superior casi al nivel del ocelo anterior. *VRI* y *VRE* subiguales a la 1/2 del ancho frontal en el vértice. *PO* en 2 series. Lámina facial y parafacialias con cerditas negras en la 1/2 superior. Mitad inferior de la lámina facial desnuda con carena apenas diferenciada, pero ancha. *VB* apenas diferenciada, aproximadamente 2 veces las cerditas próximas. Mejillas casi el 1/3 de la altura ocular y con pocas cerditas negras. *OC* faltan. Segmento III antenal de perfil subcircular (0.160 × 0.177), apenas más alto que largo. Segundo segmento aristal aproximadamente el 1/5 del III (0.300) que es casi dos veces el largo del III antenal.

Tórax negro con pruina densa claro cenicienta. Mesonoto con un par de fajas pardas longitudinales que corren por las líneas dorsocentrales hasta la base escutelar. Entre estas hay un par de fajas submedianas, casi borradas, que se destacan más por la presencia de 3 - 4 series irregulares de cerditas negras apretadas que llegan hasta la mitad de la postsutura que por su colorido apenas obscurecido. Espacio entre estas fajas y entre ellas y las dorsocentrales, desnudos. Cerditas *IDC* llegan hasta la DC prescutelar y algunas posteriores a éstas. Macroquetas mesonotales como en *L. bosqi*. Balancines blanquecinos, sub-amarillentos.

Abdomen con manchas dorsales parecidas a las de *L. bosqi*, pero con las manchas en cada lado de la mancha mediano-basal del III, completamente libres del borde basal.

Patas claro amarillentas con las coxas, 4/5 basales de los fémures anteriores y los 2/3 basales de los fémures intermedios y posteriores, negruzcos con pruina cenicienta. Ultimo segmento tarsal obscurecido.

Alas (2.36 × 1.07) ligeramente opalinas, iridescentes y anchamante sub-ahumadas a lo largo de las nervaduras con excepción del ápice, borde posterior, álulas y el disco de la *3M*. Charretera, basicosta y costigio claro amarillentos; nervaduras amarillo parduscas a parduscas. Ultima sección *C1* apenas más del 1/5 de la penúltima y aproximadamente 5/7 de la penúltima sección de la *M2* y 2/3 de la *M3*. Esta doblada medianamente hacia la base alar en el 1/3 anterior y con su àpice anterior colocado un poco anteriormente a la mitad de la distancia entre la costa y el borde posterior alar en este punto. Radiocosta 1 2/5 la distocosta y

casi el 1/4 del postestigma. Segunda sección de la *R5* casi 2 1/5 veces la primera sección.

Largo. — 2.5 - 3 mm.

Cotipos. — En la colección del autor.

Habitat. — Parásito de *Ceroplastes* sp., Metán, Salta y Allen, Río Negro, 9/I/1933, criado por el entomólogo Pablo Köhler y en *Ceroplastes bruneri,* Ck11, Concordia III/1938, criado por el entomólogo Kenneth J. Hayward. También tengo ejemplares de Paraná, Entre Ríos, 13/I/1938.

Observaciones. — Especie muy parecida a *L. bosqi,* Blnchd., por el colorido y diseños del tórax y abdomen; se diferencia principalmente por su mayor tamaño, antenas completamente amarillentas, frente con cerditas negras y las fajas mesonotales mejor diferenciadas.

Xenoleucopis bellula, Williston.

Tengo ejemplares de esta especie criados en *Trionymus* sp. ex *Acacia,* Córdoba 8/IX/32 y V/32; y de *Alichtensia* sp., Santiago del Estero, XII/35, J. M. Bosq. leg.

DROSOPHILIDAE

Drosophila denieri, sp nov.

Macho. — Pardo negruzco a negro pardusco, medianamente gris pruinoso. Borde anterior frontal, I y II y mitad inferior del III antenal, tercio superior de la carina facial, con frecuencia las mejillas, útlimos dos segmentos abdominales, rodillas, tarsos con excepción de los distotarsos, amarillentos. Tibias pardo amarillentas. Probóscide negruzca con palpos negros. Alas hialinas con nervaduras amarillentas.

Ojos densamente microciliados. Frente un poco convergente anteriormente, casi la mitad del ancho cefálico, en el vértice. *FROR* anterior subigual a la mitad de la *FROP* e inserta apenas más cerca de ésta, pero en línea con la *FROR* posterior. *FROP* colocada muy poco al interior de esa línea. Orbitas anteriores con, aproximadamente, 6 cerditas en la mitad inferior, además hay algunas cerditas cerca del borde anterior frontal. *POC* fuertes, cruzadas y subiguales a las *OC. VRI* 1 1/3 veces las *VRE* y fuertemente convergentes. *OC* paralelas y proclinadas. Cara casi tan ancha como la frente; carena mediana muy desarrollada, arqueada, achatada

transversalmente, ensanchándose hacia el borde oral donde el ancho es subigul al 1/4 del ancho facial. *VB* aproximadamente 3 veces el largo de la *PRSTM* más próxima. Mejillas apenas el 1/7 de la altura ocular. Probóscide el 1/3 de la altura cefálica.

Antenas bien separadas por la carena facial que en este punto es subigual a la parte visible del I. II grande, convexo con dos cerdas fuertes y pocos pelitos. III apenas más largo que el II, chato, con perfil dorsal convexo y ventral subrecto, ápice redondeado. Arista con 4 macrocilias dorsales y 2 ventrales; además hay 5 cilias cortas dorsales entre las macrocilias.

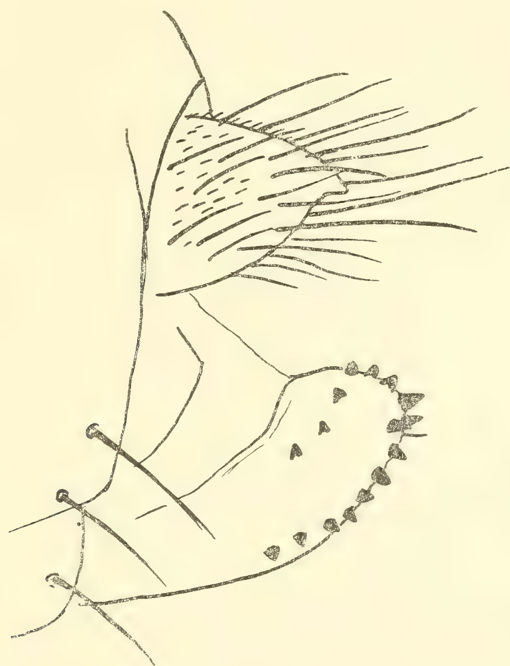


FIG. 3. — *Drosophila denieri*, sp. nov.; genitalia del macho, vista de costado.

Mesonoto con 8 series de *IDC*; las prescutelares en 5 - 6 series y 2 - 3 veces el largo de las *IDC* presuturales. *DC*, 2, las anteriores menos de la 1/2 de las posteriores y separadas de éstas por, aproximadamente, 2/5 de la distancia entre las *DC* posteriores. *PAL* interna subigual a 2/3 de la externa. *HM*, 2 subiguales, más cortas y finas que las *SAL*; la anterior de éstas, apenas más corta, y subigual a la *PRSTR*. *STPL* casi tan larga como la *DC* prescutelar.

Escutelo con el disco sub-aplanado. *B* colocadas a mitad de la distancia entre las *AP* y el borde basal y apenas más cortas que éstas que se cruzan en las 4/5 partes de su largo.

Abdomen un poco más largo que el tórax y del mismo ancho. Placa anal y corchetes amarillentos, obscurecidos en los ápices. Segmentos abdominales subiguales, con *M* diferenciadas, más o menos 2 1/2 veces las cerditas discales. Genitalia ilustrada en la figura 3.

Patas anteriores con fémures provistos de una serie de *PV* y una *PD* preapical. Tibias posteriores con *PRAP* débil. Tibias intermedias con *AP* y *PRAP* cortas, pero fuertes.

Alas 2.2. × 1 mm. La costa llega, aunque débilmente, hasta la *M2* y presenta espinitas negras apretadas hasta la 1/2 de la radiocosta; además se observan cerdas separadas erguidas, colocadas a razón de una por cada 7 - 8 de las espinitas costales, en una serie que termina cerca del ápice de la *R5*. Postestigma aproximadamente 3 veces la radiocosta; ésta apenas más de 2 veces la distocosta. Penúltima sección de la *M2* subigual a 3/4 de la última.

Largo. — 2.7 mm.

Cotipos. — En la colección del autor.

Habitat. — En flores de algodonero, Isla de Oro, Formosa, 18/VII/38, hallada por el entomólogo Pedro Denier, a quién dedico gustosamente esta especie nueva.

Drosophila repleta, Wollaston.

Muy común en toda le República Argentina en Cactus. También tengo ejemplares criados en ají, Salta V/38, por el naturalista Ramón Bazán.

Drosophila buscki, Coquillett.

También fué criada esta especie en ajíes procedentes de Salta traídos por el señor Bazán, conjuntamente con la especie anterior.

Drosophila ampelophila, Loew.

Bastante común en manzanas fermentadas en Mendoza. Los ejemplares estudiados fueron enviados por el Ing. Vico Gimena, en 1928.

Pseudiastata australis, sp. nov.

Macho. — Amarillo subocráceo claro con pruina blanquecina. Abdomen más obscuro, a veces, pardusco. Ojos rojos. Antenas amarillo-ocraceas; arista negruzca con la sección basal gruesa claro-ama-

rillenta. Macroquetas cefàlicas y toráxicas, blanco parduscas. Alas sub-hialinas, iridescentes con dibujos negruzcos indicados en la figura 8 *a*.

Cabeza 1 1/6 veces más ancha que alta. Frente apenas más de 1/3 del ancho cefálico, en el vértice, estrechándose muy poco hasta el nivel de la *FROR* anterior donde mide el 1/3 del ancho cefálico; desde este punto la cara se ensancha hasta tener casi la 1/2 del ancho cefálico en el nivel vibrisal. Mejillas muy estrechas, apenas el 1/9 de la altura ocular. Parafacialias angostas, apenas el 1/3 del ancho del III antenal. Lámina facial más ancha que alta, con carena muy débil, apenas diferenciada en la mitad inferior. *FROI* muy débiles y convergentes, subiguales a las *POC* cruzadas. *FROR* 2 pares, subiguales, casi 2 veces las *FROI*. Estas insertas en la mitad de la distancia entre las *FROR* anteriores y el borde anterior de la frente. *FROR* posteriores separadas de las *VRI* y de las *FROR* anteriores por más de 2 veces la distancia entre estas últimas y las *FROI*. *OC* un poco más finas y cortas que las *POC*, paralelas, proclinadas e insertas enfrente de cada ocelo posterior. Frente provista de algunos pelitos negros cortos. Parafacillias desnudas. *VB* subhorizontales, colocadas en el nivel oral y subiguales al largo de los II y III antenales juntos. Algunas cerditas cerca de las *VB*. Mejillas con 5 - 6 cerditas sub-iguales al 1/3 de las *VB*. *PO* muy cortas. *PVR* negras, convergentes, un poco más cortas que las *OC*.

Antenas con el segmento III aproximadamente 2 veces el II y 1 1/2 veces más largo que ancho; ápice semicircular. II con cerditas negras dorsales. Arista casi 2 veces el III antenal y con microcilias que casi miden el máximo ancho aristal; 1/5 basal engrosado.

AC, 1 par prescutelar, subiguales al largo escutelar. *DC*, 2 postsuturales, las prescutelares 1 2/3 veces las anteriores y separadas de éstas por casi 2 veces la distancia entre ellas y el escutelo. Distancia entre las *DC* prescutelares decididamente mayor a la que separa las *DC* anteriores. Entre éstas hay aproximadamente 16 hileras longitudinales de *IDC*. *IDC* prescutelares 3 veces el largo de las *IDC* presuturales. A veces una tercera *DC* postsutural poco diferenciada, cerca de la penúltima. Mesopleura desnuda. *STPL*, 2 en ángulo postero-superior. *NTPL*, 2 fuertes casi 2 veces las *HM*. *PRAL* débil, subigual a la *PALI* y apenas el 1/3 de la *SAL*. Esta subigual a la *PALE*.

Escutelo con el disco sub-achatado y desnudo; 1 1/6 veces más

ancho que largo. Distancia entre las *AP* apenas mayor a la que las separa de las *B*. Estas tan largas como el ancho máximo escutelar y 1 1/3 veces el largo de las *AP*.

Abdomen subcónico. Ultimo segmento 2/3 el largo del penúltimo. Todos con *M* débiles que son aproximadamente 2 veces las cerditas discales. *LM* más fuertes.

Coxas anteriores con 2 *AP* y 1 *PRAP* encurvada externa. Coxas intermedias con 3 *AP* y 1 *PRAP*. Coxas posteriores con 1 *AP* y 1 *PRAP*. Tibias intermedias con 4 *AP*; 1 fuerte ventral, francamente más larga que el ancho apical de la tibia y 3 dorsales, subiguales a la 1/2 de la ventral. Tibia posterior con 1 *PRAP* dorsal débil, un poco más corta que el ancho tibial.

Alas 3.58 × 1.50 mm., con ápice subagudo. *CS* 2 veces la *R6*. *R5* termina en el ápice alar. Postestigna 8 veces la radiocosta. Penúltima sección de la *M2* 5/6 del largo de la última y aproximadamente 2 veces la *M3*; ésta es recta y cae perpendicular a la *M2*. Ultima sección de la *C1* apenas la mitad de la *M3*. Véase figura 8, a.

Largo. — 4 mm.

Cotipos. — En la colección del autor.

Habitat. — Corrientes, VIII/1938, Wilfrido A. D'Angelo, leg.

TRYPETIDAE

Anastrepha schultzi, sp. nov.

Hembra. — Amarillo sub-ocráceo. Segmento III antenal, dos fajas anchas submedianas que cubren la mayor parte de la superficie dorsal del mesonoto, una faja supra-alar que se une con la submediana en la presutura detrás de los lóbulos humerales, y vaina del oviscapto, anaranjados o sub-parduscos. Metanoto amarillo pardusco con las manchas laterales negras intensas. Segmentos abdominales sub-parduscos con los bordes apicales claros. Pleuras ligeramente anaranjadas con las suturas generalmente más claras. Cerdas negras. Alas hialinas con dibujos amarillentos con muy poco negruzco, solamente ennegrecidas en la mitad posterior de la *V*, ápice de la faja ápico-transversa, parte anterior del estigma y apenas en los bordes de la faja oblicua mediana.

Frente aproximadamente 1/3 del ancho cefálico con escasos pelitos negros cortos que también invaden las órbitas. *FROI*, 4 - 5 pares. *FROR* posteriores decididamente más cortas que las anteriores. *OC* muy finas, piliformes, proclinadas y subparalelas. *VRI*

apenas más largas que el ancho frontal y 1 1/3 veces el largo de las *VRE*. *OCC* subiguales a las *FROR* superiores y a las *PVR*. *PO* apenas llegan hasta el 1/3 inferior de las postórbitas. *GN*, 1, la superior no diferenciada, y subigual a la *PRSTM*, que es amarillo-clara. Mejillas con algunos pelitos cortos negros arriba y en frente de la *GN*, demàs pelitos de las mejillas y del occipucio, claro amarillentos. Palpos con cerditas claro amarillentas y 2 - 4 obscuras.

Antenas con el III aproximadamente 2 veces el II, estrechándose hacia el ápice y separado del margen oral por menos de la mitad de su largo. Arista 2 veces el III antenal; negra, con la sección ancha basal amarilla y con pubescencia más corta que el ancho máximo de la base aristal.

AC subiguales a las *DC* y colocadas bien detrás de éstas y más o menos en la línea entre las *IAL*. Estas, las *PAL* y las *SAL* subiguales y fuertes, apenas más fuertes que las *DC*. *HM*, *NTPL*, y *PTPL* subiguales. *MSPL*, 1 fuerte y 1 ó 2 más finas y cortas. *STPL* fina, subigual a 3/5 de largo de la *HM*. Escutelo con *B* francamente más largas que las *AP*.

Abdomen 1 1/5 veces más largo que ancho. V muy corto, apenas el 1/5 del largo del IV. Ultimos cuatro segmentos con cerditas negruzcas marginales, las del II y III apenas diferenciadas; las del IV y V más largas, especialmente las *LM*. Ultimos dos esternitos con *M* negruzcas, las del último esternito, fuertes, y más largas que el esternito. Longitud de los segmentos: 1.30; 0.60; 0.60; 0.52; 0.12. Largo del abdomen (sin oviscapto), 3.00.

Oviscapto con la vaina apenas más larga que el abdomen. (3.25 mm.). Ancho basal, 0.95; ancho apical, 0.60; superficies dorsal y ventral con pelitos negruzcos, los del borde apical más largos. Taladro 2.90 × 0.17, amarillento con ápice obscuro, ferruginoso y sin denticulación. (Véase fig. 4, *e* y *f*).

Patas completamente amarillas con las cerdas principales, negras, y los demás pelitos y cerditas, parduscas o amarillentas.

Alas (8.50 × 3.37), con el estigma 3 1/2 veces más largo que ancho y sólo 7/8 del largo de la radiocosta. *R1* y primera sección de la *R5* con cerditas negruzcas. Faja hialina proximal interrumpida completamente sobre la *R5*. *V* completa con la mitad anterior débil y no unida a la faja oblicua mediana. *CS* negra y diferenciada de las demás cerditas costales que son parduzcas. (Véase fig. 8, *h*).

Largo, 8.00 mm.

Macho. — Parecido a la hembra. Segmento IV abdominal subigual al largo del II y III unidos.

Cotipos. — En la colección del autor.

Habitat. — Tucumán, 20/V/1938, criados por el señor Enrique Schultz.

Observaciones. — Entre el material de estudio enviado por el señor Schultz existen varios ejemplares de una variedad de esta especie que se distingue por su tamaño más pequeño y por los dibujos alares muy débiles y casi borrados, pero en los demás caracteres, concuerdan completamente con la forma aquí descrita. Las hembras miden de 6.50 a 7.00 mm. Esta variedad debe conocerse con el nombre *Anastrepha schultzi*, var. *obliteratella.* (Véase fig. 8, *i*).

Anastrepha zernyi, Costa Lima.

Esta especie ha sido hallada, por primera vez, en la República Argentina, en Bella Vista, corrientes, 31/VIII/38, por el Ing. Aldo R. Vergani y en Corrientes por el Agrónomo Wilfredo A. D' Angelo, VIII/1938.

OTITIDAE

Acrostictomyia, gen. nov.

Genotipo. — *A. subapicalis,* sp. nov.

Muy cerca de *Euxesta,* Loew y de *Acrosticta,* Loew. Del primer género se distingue *Acrostictomyia* por la nervulación alar; estigma muy alargado como en *Acrosticta,* y de éste por el III antenal corto y la falta de hoyuelos en la frente. Otros caracteres se incluyen en la descripción del genotipo que sigue.

Acrostictomyia subapicalis, sp. nov.

Hembra. — Frente y mejillas amarillo-ferruginosos, sublucientes. 1/3 inferior de la lámina facial, epistoma, placa ocelar y una mancha orbital en cada lado, azul metálico, 2/3 superiores de la lámina facial, blanquecinos con pruina blanquecina que se extiende sobre el resto de la lámina y el epistoma. 1/2 superior del occipucio, más o menos, azul metàlico obscuro; 1/2 inferior amarillenta; todo con pruina blanquecina intensa. Cabeza 1 1/3 veces más alta que larga y aproximadamente dos veces más ancha que larga. Frente subigual al 1/3 del ancho cefálico y casi 1 1/2 veces más largo que ancho; 1/2 posterior apenas hundida y con pelitos negros irregu-

lares y subrugoso; 1/2 anterior lisa con escasas micropuntuaciones pilíferas. Lámina facial netamete cóncava de perfil con una carenita mediano-longitudinal; en cada lado y por debajo de las mejillas, se extiende hasta la *GN*. Epistoma tan ancho como la frente y el 1/3 del alto mediano de la lámina facial. Mejillas subrugosas debajo de las órbitas y aproximadamente el 1/4 de la altura ocular. Lista laterofacial muy estrecha, apenas el 1/4 del alto de las mejillas. *VRE* y *VRI* subiguales. *OCC* aproximadamente la 1/2 de las *VR* y decididamente divergentes. *OC* tan largas como las *OCC*, pero mucho más finas y poco divergentes. *FRO*, 2, apenas reclinadas; las anteriores apenas diferenciadas y las posteriores subiguales a las *OC*. Mejillas con una serie de pelitos negros en el borde inferior. *GN* subigual a las *OCC* y apenas más larga que los pelitos peristomales. *PO* en una serie que baja hasta la mitad de la altura de los ojos. Mitad superior occipital sólo con 1 - 2 cerditas negras además de los peines epicefálicos; 1/2 inferior occipital con pocos pelitos cortos negros que se alargan hacia el borde inferior. Probóscide negruzco subluciente; labela más clara con cerditas finas amarillentas. Palpos amarillos con la mitad basal negruzca; cerditas ventrales negras y tan largas como el ancho máximo del palpo; 2/3 apicales anchas y achatadas, espatuladas.

Tórax azul negruzco, metálico, a veces algo verdoso, con las raíces alares, episterno, espiráculo posterior y balancines, amarillo ferruginoso. *AC* subigual a las *DC* prescutelares y colocadas aproximadamente en la línea entre las últimas. *DC* anterior apenas más que la 1/2 de las posteriores; entre las *DC* anteriores corren 6 series longitudinales de microcerdas acrosticales. *SAL* 1, colocadas a la altura de las *DC* anteriores. *HM*, *MSPL* y *STPL*, subiguales o apenas más cortas que las 2 *NTPL*. Propleura con pelitos finos negros en frente del espiràculo.

Escutelo del color del mesonoto. *AP* aproximadamente 1 1/2 veces el largo de las *B*, 2 veces el largo escutelar y separadas por 2/3 de la distancia que las separan de las *B*.

Abdomen negruzco metálico con el I y el II, con excepción del borde apical, amarillo ferruginosos. Ultimos dos segmentos con *M* largas y erguidas, subiguales a 2 veces el largo de los dos segmentos unidos. Penúltimo segmento aproximadamente 2 veces el largo del último.

Vaina del oviscapto negruzca con numerosos pelitos negros; borde apical con *M* subiguales a 2 veces el largo de las cerditas dis-

cales. Largo, 0.75; ancho máximo basal, 0.75; ancho mínimo apical, 0.30 mm. Taladro 1.66 de largo, notablemente estrechado en el tercer cuarto de su longitud; ancho máximo 0.145 mm.; ancho mínimo, 0.090 mm. Placa apical, 0.070 × 0.038. (Véase fig. 4 *e* y *d*).

Patas amarillentas, sub-ferruginosas, con las tibias (con excepción de los ápices) y los tarsos (excepción hecha de los basitarsos), negruzcos. Coxas un poco obscurecidos.

Alas hialinas con dibujos pardo-negruzcos indicados en la fig. 8, *d*. Estigma (0.95) apenas más de 2 veces el *M3* (0.45). Segunda sección de la *M2* subigual a 2 veces la tercera sección, que, más o menos, es igual a la cuarta.

Largo. — 4.5 mm.

Macho. — Parecido a la hembra.

Cotipos. — En la colección del autor.

Habitat. — Criado por el señor Juan M. Bosq de tubérculos de papa alterados por *Fusarium sp.*, Santiago del Estero, 5/II/1935.

Observaciones. — Esta especie tiene mucho parecido con *Acrosticia riojana* (Brèthes). pero se distingue fácilmente por la falta de arrugas marcadas en la frente. De *Euxesta andina,* Brèthes, se separa por su mayor tamaño y por el clorido de las patas.

Acrostictiomyia longistigma, sp. nov.

Esyecie muy parecida a *subapicalis* por su tamaño, forma y coloración. Distínguese principalmente por la nervulación alar de la hembra; la *M2* más larga, casi 2 veces la *M3,* ésta, a su vez, es màs corta que en la especie anterior; el estigma alar más corto, aproximadamente 2/3 del prestigma y por la prolongación angular de la *2C* más larga, el lado anterior del ángulo casi 2 veces la sección de la *C2* que la precede y decididamente más larga que la fracción pigmentada de la segunda sección de la *A1*. Además se observan diferencias en la placa apical del taladro del oviscapto (fig. 4, *a* y *b*), y la faja negruzca costal se halla menos estrechada después del estigma. (Véase figura 8, *c*).

Habiat. — Concordia, Entre Ríos, I/1937, Hayward leg., y Tucumán, IV/1938, Sr. Enrique Schultz, leg.

Cotipos. — En la colección del utor.

Paragoniaeola, gennov.

Cerca de *Paragorgopsis* Giglio-Tos y *Goniaeola,* Hendel, Cabeza 3 veces más ancha que alta (como en *Paragorgopsis mallea,* Hen-

del), *M3* casi perpendicular con la *R6* y fomando ángulo agudo con la penúltima sección de la *M2* y obtusa con la última. Borde posterior de la *2M* con tres lóbulos subtriangulares. *R6* colocada francamente más cerca de la *M3* que de la *M6*. *2C* sin prolonga-

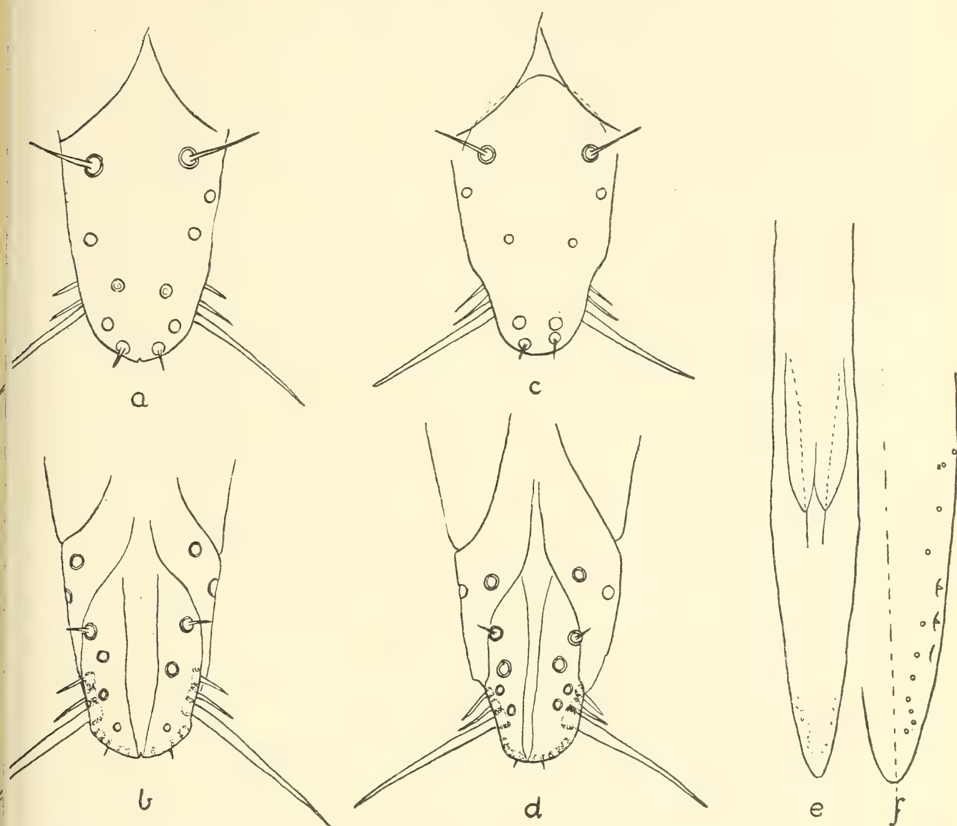


FIG. 4. — *Acrostictomyia longistigma*, sp. nov.: *a* y *b*, placa apical del taladro, aspecto dorsal y ventral, respectivamente. *Acrostictomyia subapicalis*, sp. nov.: *c* y *d*, aspecto dorsal y ventral de la placa apical del taladro. *Anastrepha schultzi*, sp. nov.: *e*, ápice del taladro; *f*, ídem con mayor aumento.

ción angular ápico-posterior. *C2* recta. *A1* borrada después de la *C2*. Para otros caracteres, véase descripción del genotipo, *Paragoniaeola tanycephala*, sp. nov.

Paragoniaeola tanycephala, sp. nov.

Macho. — Cabeza blanco amarillenta; tercio mediano frontal y epicéfalo ocre anaranjado, parduzco sobre la frente. Espacio entre

las órbitas y las *FRO,* negruzco, subluciente, como también el 1/3 superior paracefálico. Mitad inferior de la lámina facial y de las mejillas, ligeramente obscurecidas. Cabeza más de 3 veces más ancha (4 mm.) que alta (1.25) ; el largo subigual a 2/3 de su altura. Frente (3.80) más de cinco veces el ancho ocular (0.70). Ojos pequeños, apenas más altos que anchos. Mejillas muy oblicuas (1.30), subiguales a 2 veces la altura de los ojos. Lámina facial fuertemente hundida transversalmente en el medio de su longitud. *FRO* 2 reclinadas, las anteriores muy finas y sólo la mitad de las posteriores. Estas subiguales a las *OCC* que son divergentes, piliformes, un poco más separadas que las *OC* y subiguales a 2/3 del largo de las *VRI* que, a su vez, son poco convergentes y apenas reclinadas. *VRE* decididamente divergentes y 3/4 de largo de las *VRI. OC* un poco más finas, pero de largo subigual a las *FRO* superiores; proclinadas y divergentes. *VB* subigual al III antenal y colocadas un poco por debajo del nivel oral, pero por arriba del ángulo infefior de la cabeza. Parafacialias tan anchas como la lámina facial.

Antenas amarillentas con el II ocráceo y el I negruzco; todos los segmentos con pruina pálida. III aproximadamente 2 veces el largo del II y, màs o menos, 2 veces más largo que ancho; perfil dorsal subrecto, el ventral convexo y obtusamente angulado en el 1/3 basal; ápice subagudo. Arista (1.10) casi 3 veces el largo del III (0.40), negruzca con la base más clara; microcilias decididamente más cortas que el ancho máximo aristal.

Probóscide y palpos pardo-negruzcos con cerditas negras; labela más clara y con pelitos claro-amarillentos.

Tórax ocre pardusco con pruina clara amarillenta y con faja ancha mediano-longitudinal mesonotal, mancha mesonotal en cada lado de la faja mediana y manchas en las pleuras, obscuras. Región supra-alar y dos manchas grandes laterales escutelares que casi se encuentran en el borde apico-escutelar, negro-pardusco lucientes. Postesculeto y metanoto anchamente ennegrecidos en cada lado. Balancines enteramente blanquecinos. *AC,* 1, prescutelar. *DC,* 3, las anteriores finas y poco diferenciadas; las prescutelares subiguales a las *IAL* y las *PAL. SAL,* 1 subigual a la *HM. NTPL* anterior apenas más fuerte que la posterior. *MSPL* más o menos 6, la superior más fuerte, pero apenas màs larga que las inferiores. *STPL* fuerte, inserta cerca del ángulo postero-superior esternopleural. Escutelo con 2 *M*; las *B* aproximadamente 2/3 de las *AP,* pero mucho más finas.

Abdomen pardo negruzco. I, con excepción de una mancha transversal apical en cada lado, borde basal y parte mediana del borde apical del II, claro amarillento. Los 4/5 apicales del III y los 2/3 apicales del IV con excepción de una mancha ancha mediano apical pruinosa, y todo el V con excepción de la base pruinosa, lucientes. Largo de los segmentos: I, 0.65; II, 0.55; III, 0.55; IV, 0.43; V, 0.18. Superficie dorsal de los segmentos con pelitos finos negros. III con *M* apenas diferenciales de los pelos discales y *LM* más fuertes, subiguales, a la 1/2 del largo del segmento. IV con aproximadamente 6 *PRAP* finas en el 1/4 apical, subiguales a 2/3 del largo del segmento.

Patas pardo negruzcas con las coxas anteriores, bases femorales, articulaciones fémoro-tibiales y los tarsos, más claros y amarillentos. Tibias posteriores con el borde dorsal comprimido y con una fuerte impresión longitudinal antero y posterodorsal, que ocupa los 2/3 basales del largo tibial. Tibias intermedias con 1 *AP*.

Alas subhialinas con fajas negruzcas, véase figura 8, *c*. Charretera negruzca. Largo, 5.50 × 1.80; el máximo ancho en el 1/4 proximal. Borde posterior de la *2M* con 3 lóbulos subtriangulares, el proximal más pequeño. Borde anterior de la *2M* fuertemente arqueado hacia adelante. *R1* con aproximadamente 15 cerditas dorsales en el 1/3 apical. *CS* no diferenciada. Estigma subigual a la radiocosta. Distocosta un poco menos que la 1/2 de la radiocosta. *M3* muy oblicua, 1/3 inferior subparalelo con el borde posterior alar.

Largo. — 4.5 mm.

Cotipos. — En la colección del autor.

Habitat. — Misiones, 12/VI/1936, Dr. A. A. Ogloblin, leg.

Pterocerina plurifurcata, sp. nov.

Hembra. — Cabeza amarilla, subpardusca, con las siguientes partes obscurecidas: placa ocelar, triángulo orbital en cada lado de la placa, paracéfalo y probóscide. Frente casi 3/7 del ancho cefàlico y aproximadamente tan larga como ancha. Mejillas sólo el 1/5 del alto ocular. Lámina facial con perfil cóncavo, con carenita corta entre las raíces antenales. Epistoma saliente. Lista latero-facial casi la 1/2 del alto de la mejilla y se extiende hasta la *GN*. *FRO*, 2 reclinadas, las superiores más de 2 veces las anteriores que son muy débiles. *VRI* 1 1/3 veces las *VRE*. Mitad anterior frontal con algunos pelitos, los mayores subiguales a la 1/2 de las *FRO* anteriores. *OC* tan largas como las *FRO* superiores. *OCC* aproxi-

madamente la 1/2 de las *OC*. Serie *PO* casi llega hasta el 1/3 inferior del ojo. Mital inferior paracefálica con pelitos parduscos. Peines epicefálicos blanquecinos. Borde inferior de la mejilla con una serie de pelos cerdosos subiguales a la 1/2 de la *GN;* ésta apenas más larga que la altura de la mejilla y lista latero-facial unidas. Palpos amarillos con cerdas largas negras.

Antenas amarillas. III 2 veces más largo que ancho; perfil dorsal débilmente cóncavo, ápice redondeado y separado del margen oral por la 1/2 del largo del segmento. Arista amarilla, 2 1/2 veces el largo del III y con cilias cortas, subiguales a 2 veces el ancho máximo aristal.

Tórax pardo sub-ocràceo con pruina amarillenta y con fajas débilmente obscurecidas. *AC,* 1 prescutelar colocadas un poco anteriormente a la línea entre las *DC* posteriores, *DC* anteriores subiguales a las *AC*. *IAL* 1 1/3 veces las *DC* prescutelares. *SAL* y *PAL* subiguales a las *IAL*. *HM* más fina que las *NTPL*. *STPL* débil, subigual a la *MSPL* superior. Balancines blancos.

Abdomen negruzco con pruina gris cenicienta. Ultimo segmento más lustroso y apenas más corto que el penúltimo; éste subigual al segmento que le precede. Penúltimo segmento con *M* poco diferenciadas. Ultimo segmento con *PRAP* subiguales a 2/3 el largo del segmento.

Vaina del oviscapto amarillento con los bordes laterales y apical, estrechamente ennegrecidos y revestidos de pelitos negros. Largo 0.70 mm. Ancho basal, 0.75; apical, 0.35. Membrana negruzca. Taladro pardo-amarillento.

Patas pardo-negruzcas con las rodillas y los tarsos amarillentos claros.

Alas 3.25 × 1.25; subhialinas con los dibujos negruzcos indicados en la figura 8, *b*. La V mediana con dos manchitas amarillentas en la *1R*. Charretera negruzca. Basicosta y escamas alares, blanquecinas. *R1* con cerditas en toda su longitud. *R5* con cerditas hasta la *R6*.

Largo. — 3.30 - 3.50 mm.

Macho. — Parecido a la hembra. Segmentos genitales parduzcos.

Cotipos. — En la colección del autor.

Habitat. — Corrientes, 1938, Sr. Wilfrido A. D'Angelo, leg.

SARCOPHAGIDAE

Patonella dangeloi, sp. nov.

Macho. — Cabeza negra con densa pruina dorada. Frontalia y facialias negras con ligera pruina cenicienta. Frente 2/3 del ancho cefálico. Parafacialias 2/3 de la frontalia en la parte más estrecha de la frente y 1 1/3 de la frontalia al nivel antenal, con pelitos negros finísimos, casi tan largos como el ancho de la frontalia, en 1 - 2 hileras irregulares, orbitales. Frontalia apenas ensanchada anteriormente, con pocos pelos finísimos marginales y 2 *IFR* cruzadas en la 1/2 superior. Parafacialias subparalelas, 8/11 de la lámina facial y con pelos finos orbitales hasta la muesca facial. Esta desnuda. Facialias francamente convergentes en el 1/4 inferior y con abundantes cerdas en los 2/3 inferiores; las cerdas superiores progresivamente más finas y cortas. Lámina facial hundida, màs alta que ancha. Epistoma 5/7 del ancho de la lámina facial y fuertemente doblado hacia adelante. Mejillas un poco más del 1/3 de la altura ocular, con cerdas rubias y algunas negras; éstas últimas colocadas cerca del margen oral y el anterior. *FR* 12 pares, los 4 anteriores en hileras divergentes que bajan hasta el nivel del primer tercio del II antenal. *OC,* 2 pares divergentes. *VRE* no diferenciadas. *POC* y *PVR* más finas, pero tan largas como las *FR* posteriores. *PO* en 2 - 3 series, la segunda y tercera series muy irregulares. Paracéfalo y metacéfalo por otra parte, con pelos amarillentos y barba amarillo-dorada. *VB* colocadas francamente por arriba del nivel oral.

Antenas negras. III densamente cinéreo pruinoso y subigual a 3 veces el largo del II; distancia entre su ápice y la margen oral subigual a 2/3 el largo del segmento. Arista enteramente negra, aproximadamente 2 veces el III antenal y largo ciliada en los 2/3 basales. Palpos y probóscide negros: labela con cerdas rubias.

Tórax negro con fajas pruinosas blanco amarillentas. Las submedianas rectas y apenas divergentes, separadas en el borde anterior presutural por más de su ancho. Faja intra-alar amarillenta, más estrecha e irregular, y unida a la faja prealar sobre el lóbulo humeral. Pleuras blanco pruinosas con una mancha de pruina densa dorada sobre la mesopleura. *AC,* 0 + 1; ésta casi tan larga como la *DC* prescutelar. *DC,* 3 + 5; las presuturales y las 3 anteriores postsuturales, finas y, a veces, poco diferenciadas. *IHM,* 2. *IAL,* 1 + 2. *SAL,* 2 + 3. *STPL,* 3; la intermedia más fina, más cerca de la an-

terior y apenas por debajo de la línea entre la anterior y posterior. Notopleura con algunas cerdas negras finas además de las 4 macroquetas. Propleura desnuda. Prosterno con abundantes pelos finos rubios y negros.

Escutelo negro con los ángulos laterobasales claro rojizos; todo con pruina blanca cenicienta que se presenta más densa en cada lado cerca de la sutura basal. *ANG* más fuertes que las *B*; éstas subiguales a las *AP* que son fuertes y cruzadas. *DSC*, 2 muy cerca del borde posterior escutelar, un poco más finas y cortas que las *AP*.

Abdomen negro subluciente; segmentos I, II, III y IV con 4 manchas basales de pruina densa blanco-cenicienta. I y II sólo con *LM*. III con *MDM* subiguales a 3/4 el largo del segmento. IV con *MDM* y 5 *M* en cada lado que casi forman hilera con las *MDM*. Además existe igual número de cerdas finas y casi tan largas, que alternan con las otras, pero que se hallan casi postradas. Esternitos III y IV muy cortos; V dividido en 2 brazos muy largos y revestidos densamente con espinas cortas.

Hipopigio con el I corto, negro subluciente con pruina dorada en el 1/3 apical y dorsal. Borde apical con hilera interrumpida de 6 *M*. II rojo luciente a pruinoso con abundancia de pelos negros largos finos y vellosos. Organos genitales negro-parduscos. Faloteca rojiza. (Véase figura 5).

Patas negras con pruina cenicienta liviana. Fémures intermedios con estenidio postero-apical de 6 dientes cortos y doblados. Fémures y tibias intermedias y posteriores con pelos largos vellosos ventrales. Tibias intermedias con 1 *A* en el segundo tercio. Tibias posteriores con 2 *AD*, 1 *AV* y 2 *PD*.

Alas moderamente ahumadas. Charretera negra. Basicosta amarillo intensa. Costigio blanco amarillento. Nervaduras negruzcas. Estigma apenas más largo que las radio y distocostas unidas. Codillo subagudo. *CS* apenas diferenciada. *R6* francamente antes del medio del borde anterior de la *3M*. *R5* con cerditas finas dorsales en la mitad basal de la primera sección. Prefurca radial con 4 - 5 cerditas dorsales y ventrales. Escamas alares blanco subopalinas, la inferior con el disco fuertemente ahumado.

Largo. — 13 - 14 mm.

Hembra. — Parecida al macho. Sin *IFR* cruzadas. 2 *FROP*. Frente aproximadamente el 1/3 del ancho cefálico. *VRE* fuertes. *MDM* del III abdominal más cortas, subiguales a la 1/2 del largo

del segmento. Hipopigio rojo anaranjado con pruina densa amarillenta y pelitos finos negros velludos. Borde apical del segmento genital vertical con 13 - 14 pares de cerdas negras fuertes y cruzadas.

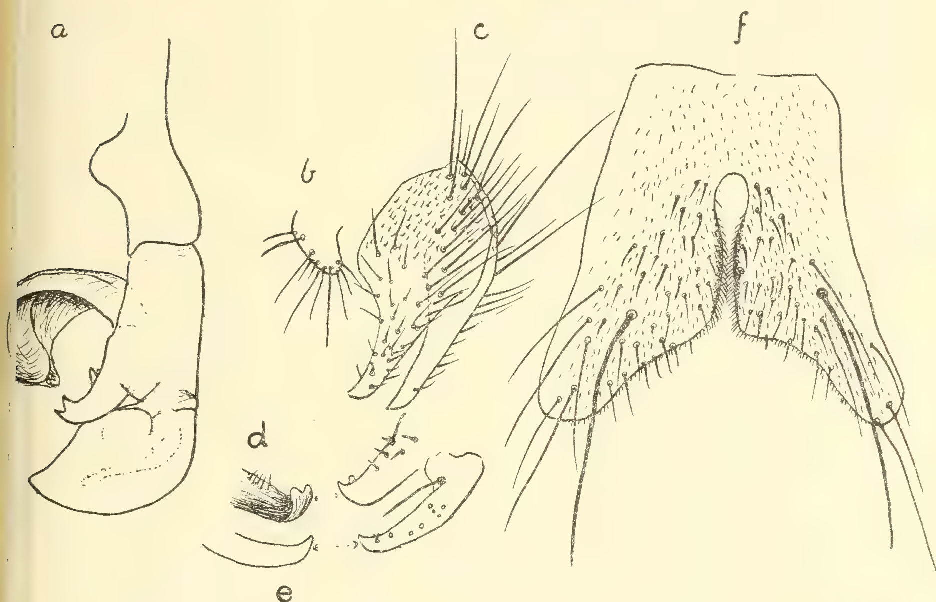


FIG. 6. — *Doringia subandina*, sp. nov.: genitalia del macho; *a*, edego; *b*, forcípulas externas; *c*, forcípulas internas; *d*, corchete anterior; *e*, corchete posterior; *f*, quinto esternito.

Largo. — 13 - 14 mm.

Cotipos. — En la colección del autor.

Habitat. — Corrientes, V/1938, Wilfrido A. D'Angelo leg.

Observaciones. — Dedico esta hermosa especie a mi excelente colaborador Agr°. Wilfrido A. D'Angelo, a quien debo ésta y otras numerosas especies de dípteros argentinos.

Doringia subandina, sp. nov.

Macho. — Cabeza negra con pruina blanco plateada. Vista de costado aparece con una mancha grande difusa irregular de color negro-aterciopelado que abarca la parafrontalia y la mitad de la frontalia, desde la *FR* anterior hasta el occipucio. Frontalia negro-aterciopelado con pruina mediana plateada. Palpos negros.

Frente aproximadamente 2/7 del ancho cefálico. *FR* en 11 pares: las 6 posteriores en líneas subparalelas, las 5 anteriores en líneas curvas divergentes, la anterior colocada al nivel del ápice del II antenal. Frontalia casi 4 veces la parafrontalia y sin pelitos. Parafrontalia, al nivel de las antenas, con pocos pelitos subiguales al ancho de la frontalia, dispuestos en dos hileras irregulares que continúan en la parafacialia en una sola hilera hasta ls 3 *FCO*; éstas gruesas y subiguales a 2/3 del largo de las *VB*. Facialias aproximadamente el 1/3 de la lámina facial; fuertemente convergentes en el 1/5 inferior, donde se hallan 5 - 7 cerdas supravibrisales. Parafacialia subigual a la facialia. *VB* colocadas sobre el nivel oral. Mejillas aproximadamente el 1/4 de la altura ocular y con abundancia de pelos negros largos. Eje vibrisal 5/8 del eje antenal. Altura de la cabeza 5/6 del ancho y el largo 4/5 de la altura. *OC* fuertes como las *FR* superiores. *FROR* 2, subiguales a las *FR* superior, *VRI* largas, 2 veces las *OC*. *VRE* apenas más largas que las cerditas *PO* más próximas. *POC y PVR* subiguales, un poco más cortas que las *OC*. *PO* en 3 series y otros pelitos negros irregulares paracefálicos que continúan sobre el metacéfalo. Este sin barba blanquecina.

Antenas negras; III con pruina débil cenicienta, 1 1/2 veces el ancho basal. Arista negra, 1 1/2 veces el III antenal, engrosada en los 3/5 basales y provisto de microcilias que apenas igualan el ancho máximo aristal.

Tórax negro con fajas de pruina cenicienta. Fajas submedianas estrechas, subrectas y poco divergentes posteriormente, separadas por 2 veces su ancho en la presutura. Fajas intra-alares angostas y representadas en la presutura por un punto alargado. Faja prealar fuerte. Pleuras negras con tres manchitas densamente pruinosas; una en el medio de la mesopleura, otra en el ángulo antero-inferior de la pteropleura y otra en el ángulo inferior esternopleural. Prosterno con pelitos negros. Propleura desnuda. *AC* faltan. *DC* 3 + 3, la primera presutural poco desarrollada, las demás fuertes; penúltima postsutural decididamente más cerca de la prescutelar que de la primera postsutural. *IAL*, 0 + 2. *SAL*, 1 + 3. *HM*, 3. *IHM*, 1 *STPL*, 3, la intermedia equidistante, muy débil y colocada apenas por debajo de la línea entre la anterior y posterior.

Escutelo negro con fajas dorso-laterales y margen apical de pruina blanquecina. *B* y *ANG* subiguales. *AP* y *DSC* faltan.

Abdomen negro luciente con 4 manchas dorsales y una ventral, basales, regulares, de pruina blanco-plateada en los segmentos II, III y IV. I con mancha débil pruinosa dorsolateral y otra ventral. I con *L* solamente. II con *L* y *MDM* fuertes, subiguales al largo del segmento. III con 8 *M*. IV con 12 *M* subiguales al largo del segmento. Esternitos II, III y IV sub-cuadrangulares con bordes posteriores convexos, el II mayor y con 4 cerdas 1 1/2 veces el largo del esternito. V dividido, los brazos tan anchos como largos sobre el borde interno.

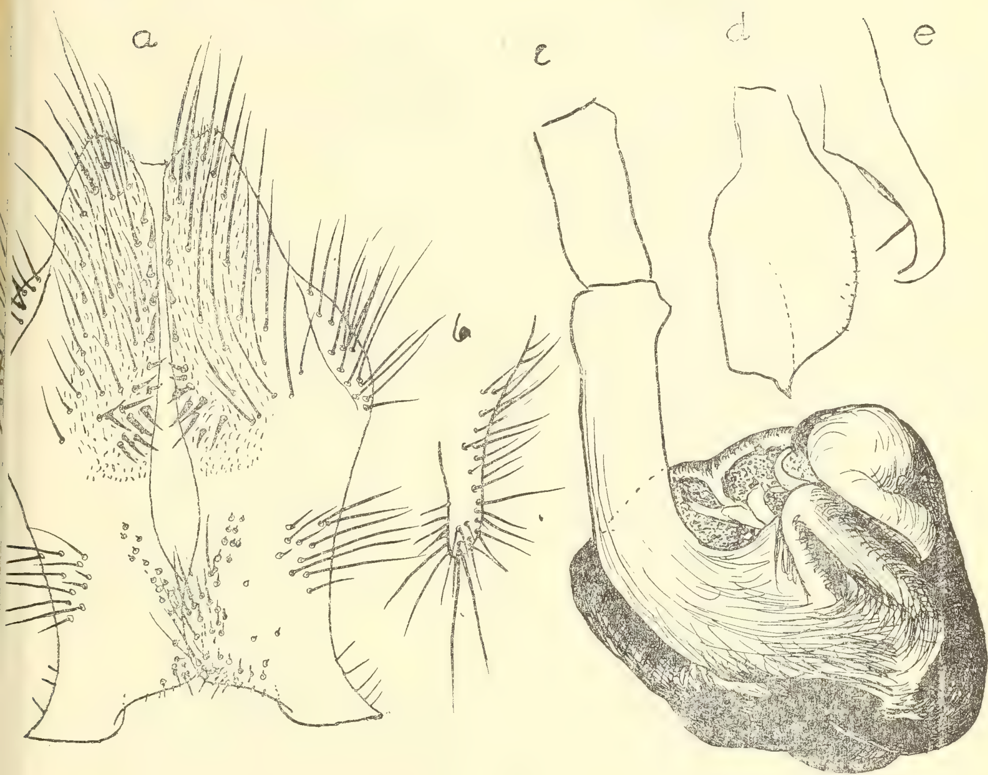


FIG. 5. — *Patonella dangeloi*, sp. nov.: genitalia del macho; *a*, forcípulas internas; *b*, forcípulas externas; *c*, edego; *d*, corchete anterior; *e*, corchete posterior.

Hipopigio con el I negro subluciente, con una serie interrumpida en el mediano, de ocho cerdas fuertes. II rojizo luciente, con abundantes pelos, algunos de los cuales son negros. Organo genital negro parduzco; forcípulas externas, faloteca y mitad supe-

rior de las forcípulas internas, más claras, sub-amarillentas. (Véase figura 6).

Patas negras, ligeramente pruinosas. Tibias intermedias con 3 *AD* progresivamente reforzadas; 1 *AV*. Tibias posteriores con 5 *AD*, la tercera y quinta cortas o poco diferenciadas; *PD*, 2; *AV* 2.

Alas subhialinas, iridescentes. Charretera negra. Basicosta y costigio amarillo-blanquecinos. Costa amarillo-pardusco. Demás nervaduras pardo negruzcas. *CS* subigual a la 1/2 del estigma. Este un poco más que la mitad de la radio y distocostas unidas. Primera sección de la *R5* con cerdas dorsales en los 4/5 basales y 4 - 5 cerditas ventrales en el 1/4 basal. Codillo subagudo. Escamas alares blancas, sub-opalinas con bordes débilmente amarillentos.

Largo. — 7.5 mm.

Hembra. — Parecida al macho. Frente un poco más que el 1/3 del ancho cefálico, con 2 *FROP*. *VRE* subigual a 2/3 de las *VRI*. Abdomen de forma ovalada sin *MDM* en el I y II. Esternitos III y IV poco visibles. VI negruzco y provisto de cerdas finas. Esternoteca rojiza con los 2/3 basales del VII tergito negruzco; éste con cerdas finas, tan largas como el tergito VIII. Primer segmento del hipopigio negro luciente con ápice rojizo, provisto de 3 *LM* y aproximadamente 16 - 18 cerditas finas marginales entre las *LM* internas.

Largo. — 7.5 mm.

Cotipos. — En la colección del autor.

Habitat. — Uspallata, Mendoza, III/1938. Hallada por el Ingº. Magistretti en un campo muy invadido por tucura.

CALLIPHORIDAE

Lucilia littoralis, sp. nov.

Macho. — Parafrontalias y 1/2 superior de las parafacialias negruzcas con pruina plateada. Tercio inferior de la lámina facial, facialias, muesca facial y 1/2 anterior de las mejillas, amarillentas con pruina amarillenta. Frontalia rojo parduzca a negruza, aterciopelada. Postórbitas con pruina dorada, pálida. Frente subigual o apenas más que la 1/2 del ancho del III antenal; parafrontalias subcontiguas. *FR*, 11; las 2 superiores piliformes; la superior separada del ocelo anterior por 2 veces el ancho mínimo frontal; las anteriores insertas al nivel de la base antenal. Apice de la frontalia sugibual al ancho de la parafrontalia en el mismo

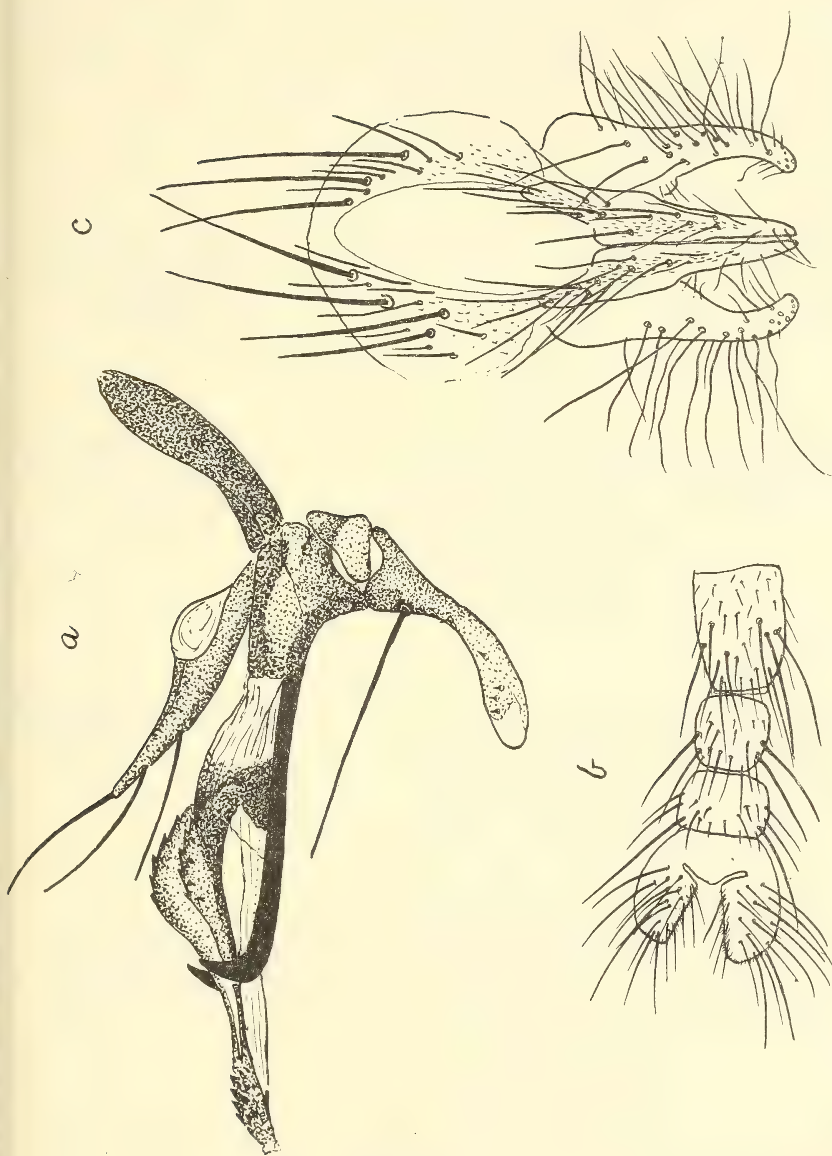


Fig. 7. — *Lucilia littoralis*. sp. nov.: *a*, edego y corchetes de la genitalia del macho; *b*, esternitos II, III, IV y V del macho; *c*, forcípulas internas y externas.

nivel. Parafrontalia con hilera irregular de palitos negros muy cortos en el 1/3 inferior. Parafacialias desnudas. Tercio inferior de la muesca facial con pocas cerditas negras. Mejillas 2/5 de la altura ocular, sólo con cerditas negras. *OC,* 2 pares, las anteriores fuertes, casi tan largas como las *VRI* y decididamente más largas que las *FRO* anteriores; las posteriores piliformes. *VRE* no diferenciadas. *POC* y *PVR* muy finas, piliformes, subiguales. Por otra parte el epicéfalo desnudo, con muy escasa pruina. *PO* con 4 cerdas largas piliformes, cerca de las *VRI,* que se destacan entre las demás cerditas *PO* que sólo tienen el 1/3 del largo de las primeras. Mitad superior paracefálica con pelos pálido amarillentos y con pruina densa pálido dorada; en el borde superior, negruzco y con 1 - 2 cerditas negras, dibujando una *T* negro subluciente con el epicéfalo. Mitad inferior paracefálica con pelos negros cerca del borde externo. Metacéfalo casi enteramente revestido de pelos pálido amarillentos.

Antenas pardo obscuras con pruina claro amarillenta; borde apical del II y la base y 1/2 ventral del III, amarillentos. III casi 4 veces el largo del II; ápice separado de la margen oral por apenas más que el ancho máximo del segmento. Arista negra, 1 1/4 veces el largo del III antenal. Cilias largas y negras.

Tórax con reflejos verdosos fuertes; borde anterior de la presutura con pruina densa blanquecina, distinguiéndose un par de fajas estrechas submedianas que se pierden antes de la sutura. Sutura antero-inferior mesopleural, ocrácea. Prosterno, propleura, hipopleura, 1/2 posterior de la pteropleura, metapleura, postescudete y lados del metanoto, negruzcos con pruina obscura. Metanoto densamente pubescente. Espiráculos y ampollas, negras. Propleura con pelitos blancos. Prosterno con pelitos negros. *AC,* 2 + 2. *DC,* 3 + 3. *IAL,* 1 + 2. *SAL,* 3 fuertes y 2 - 3 cortas entre ellas. *HM* 3. *IHM,* 2. *A,* 1. *PH,* 1. *PRSTR,* 1. *PAL,* 2. *NTPL,* 2. *STPL,* 2 : 1.

Escutelo del color del mesonoto. *B* fuerte, subigual a la *ANG* o al ancho escutelar. *L* subigual a las *AP*; éstas cruzadas. *DSC* subiguales a las 1/2 de las *AP* y colocadas apenas anterior a la línea inter-angular.

Abdomen del color del mesonoto. Segmento I negruzco; último segmento brillante vidrioso, sin aciculación. Esternitos y segmentos genitales negruzcos. II con *M* finas pero poco diferenciadas de las cerditas discales, en los dos cuartos medianos; las *LM* más fuertes y subiguales a más de la 1/2 del largo del segmento. III

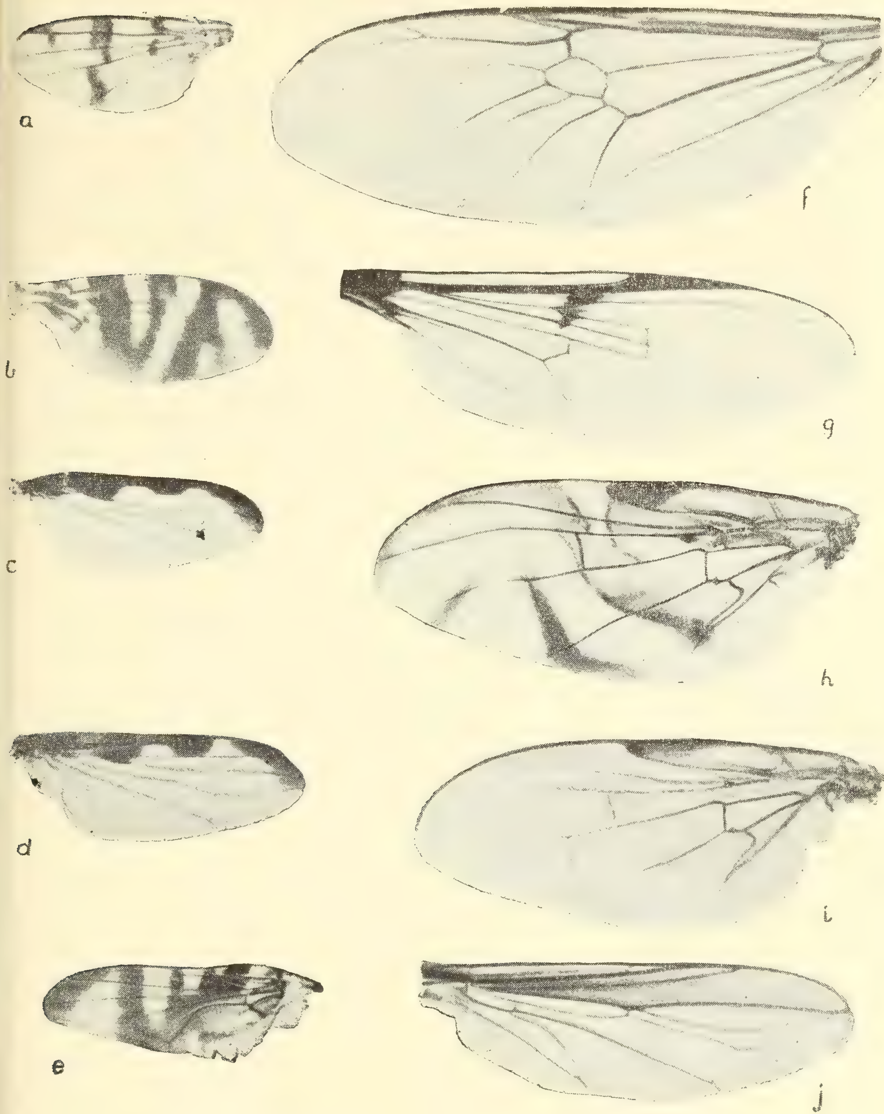


FIG. 8. — Alas: *a, Pseudiastata australis,* sp. nov.; *b, Pterocerina plurifurcata,* sp. nov; *c, Acrostictomyia longistigma,* sp. nov.; *d, Acrostictomyia subapicalis,* sp. nov.; *e, Paragoniaeola tanycephala,* sp. nov.; *f, Ptecticus xanthipes,* sp. nov; *g, Salpingogaster dactylopianus,* sp. nov.; *h, Anastrepha schultzi,* sp. nov.; *i, Anastrepha schultzi,* var. *obliteratella,* var. nov.; *j, Aconops syrphidoides,* sp. nov.

con *M* subiguales al largo del IV. IV con *M* más finas y cortas y con pelos largos erguidos discales. Hipopigio pequeño, negro. Forcípulas negras, las externas con la base subtestácea. (Véase figura 7. Segmento II del hipopigio anchamente partido sobre el mediano, desde cerca del borde basal.

Patas negruzcas; coxas anteriores con una mancha externa amarillo ocrácea; ápices de los fémures anteriores y canto anterior de todas las tibias, pardo-testáceos. Tibias intermedias con 1 *A*, 1 *V*, 2 *P* y 1 *PD*; ésta pequeña y cerca de la *P* del medio. Tibias posteriores con 2 *AV*, una serie *AD* de cerditas en los 3/4 basales, de las cuales se destacan 3 - 4 por ser más gruesas, y 2 *PD*.

Alas (7.5 × 2.64 mm.) débilmente ahumadas, especialmente en la base. *R6* con mancha ahumada. Charretera negra. Basicosta pardo negruzca. Costigio amarillento. Nervaduras negras. *R1* con cerditas dorsales en la primera mitad de la primera sección; las cerditas de la prefurca más fuertes y erguidas. Esclerito subcostal pubescente, sin cerdas. Distocosta subigual a la *R6*. Estigma igual o apenas más largo que la radiocosta. Escamas inferiores blanquecinas con la 1/2 apical amarillenta y subahumada. Balancines pardo amarillentos con el capítulo obcurecido.

Largo. — 7.50 mm.

Cotipos. — En la colección del autor.

Habitat. — Especie común en las provincias del litoral.

Observaciones. — Esta especie se coloca cerca de *azurea,* R. D. y de *hirtiforceps,* Shannon, distinguiéndose por diferencias en la genitalia y por su coloración.

EXPLICACION DE LAS ABREVIATURAS

Abreviaturas Quetotáxicas

A	Cerda	anterior
AC	»	acrostical
ACA	»	acrostical anterior
ACP	»	acrostocal posterior
AD	»	antero-dorsal
AP	»	apical
AV	»	antero-ventral
B	»	basal
CS	»	costal
D	»	dorsal
DC	»	dorso-central
DCA	»	dorso-central anterior
DCP	»	dorso-central posterior
DM	»	dorso marginal
DSC	»	discal
E	»	externa
ESP	»	espiracular
FCL	»	facial
FCO	»	facio-orbital
FR	»	frontal
FRO	»	fronto-orbital
FROI	»	fronto-orbital inferior
FROP	»	fronto-orbital proclinada
FROR	»	fronto-orbital reclinada
FROS	»	fronto-orbital superior
GN	»	genal o de la mejilla
GNO	»	geno-orbital
HM	»	humeral
I	»	interna
IAL	»	intra-alar
IDC	»	intra-dorsocentral
IFR	»	intra-frontal
IHM	»	intra-humeral
IOC	»	intra-ocelar
IPAL	»	intra-postalar
L	»	lateral
LDSC	»	latero-discal
LM	»	latero-marginal
M	Cerda	marginal
MDM	»	mediano-marginal
MSPL	»	mesopleural
NTPL	»	notopleural
O	»	orbital
OC	»	ocelar
OCC	»	occipital
OCCE	»	occipital externa
OCCI	»	occipital interna
OCP	»	ocelar proclinada
OCR	»	ocelar reclinada
P	»	posterior
PAL	»	postalar
PALE	»	postalar externa
PALI	»	postalar interna
PD	»	postero-dorsal
PHM	»	posthumeral
PO	»	postorbital
POC	»	postocelar
PRAL	»	prealar
PRANG	»	preangular
PRAP	»	preapical
PRB	»	prebasal
PRPL	»	propleural
PRSC	»	prescutelar
PRST	»	prosternal
PRSTR	»	presutural
PRSTM	»	peristomal
PSTR	»	postsutural
PTPL	»	pteropleural
PV	»	postero-ventral
PVR	»	postvertical
SAL	»	supra-alar
STPL	»	esternopleural
V	»	ventral
VB	»	vibrisal
VR	»	vertical
VRE	»	vertical externa
VRI	»	vertical interna

Nervaduras alares

*A*1	nervadura	sexta longitudinal o primera anal
*A*2	»	séptima longitudinal o segunda anal
*C*1	»	quinta longitudinal o primera cubital
*C*2	»	tercera transversa basal o segunda subital
CS	»	costal
*M*1	»	transversa apical o primera medial
*M*2	»	cuarta longitudinal o segunda medial
*M*3	»	transversa posterior o tercera medial
*M*6	»	segunda basal o sexta medial
*R*1	»	primera longitudinal o primera radial
*R*3	»	segunda longitudinal o tercera radial
*R*5	»	tercera longitudinal o quinta radial
*R*6	»	transversa anterior o sexta radial
*S*1	»	transversa humeral o primera subcostal
*S*2	»	auxiliar o segunda subcostal.

Células alares

1*A*	célula	quinta posterior
2*A*	»	sexta posterior
1*C*	»	cuarta posterior o primera cubital
2*C*	»	tercera basal o segunda cubital
1*M*	»	segunda posterior o primera medial
2*M*	»	tercera posterior o segunda medial
3*M*	»	discal o tercera medial
6*M*	célula	segunda basal o sexta medial
1*R*	»	marginal o primera radial
3*R*	»	submarginal o tercera radial
5*R*	»	apical, quinta radial
6*R*	»	primera basal o sexta radial
1*S*	»	primera subcostal
2*S*	»	segunda subcostal

SOBRE TINGITÍDEOS DE LA ARGENTINA

POR OSCAR MONTE
de Belo Horizonte, Brasil

En el presente trabajo doy a conocer una reducida, pero interesante colección de tingitídeos de la República Argentina, enviada al autor por el entomólogo Juan M. Bosq, del Insectario de la División de Zoología Agrícola del Ministerio de Agricultura, sito en José C. Paz, F. C. P., provincia de Buenos Aires, a quien agradezco la gentileza. La colección está representada por 13 especies de las cuales una es nueva para la ciencia.

1 - MONANTHIA PARMATA Distant

1888 — *Monanthia parmata* Distant, *Ann. Soc. Ent. Belg.*, v. XXXII, pl. 83.

Un ejemplar, algo estragado, y sin ninguna otra indicación. Champion en Trans. Ent. Soc., London, 1898, presenta una excelente figura de la presente especie, en pl. III, fg. 12.

2 - LEPTOCYSTA NOVATIS Drake

1928 — *Leptocysta novatis* Drake, *Physis,* vl. IX, pp. 72-73.

Rosas, F. C. Sur, Buenos Aires; dos ejemplares. Hasta la fecha, sólo se conocen dos representantes del género, la otra especie es *L. sexnebulosa* (Stal). El tipo es de La Plata, Argentina, entretanto la especie ha sido también citada de S. Bernardino, Paraguay.

3 - GARGAPHIA SUBPILOSA Berg

1879 — *Gargaphia subpilosa* Berg. *Ann. Soc. Cient. Argent.,* pp. 136-137

Lomas, Buenos Aires y Santiago del Estero; 4 ejemplares. Según Bosq es una de las especies más frecuentes en todo el país, muy dañina y abundante en muchas plantas: *Mikania auricularia* Crb., *Ipomaea bonariensis* Curtis *Gossypium,* sps., *Helianthus annus* L.,

Phaseolus vulgaris L., *Pirus communis* L., *Prunus cerasus* L., *Prunus persica* Stokes, *Solanum tuberosum* L., y otras.

Tengo en mi colección algunos ejemplares enviados por los entomólogos Daguerre, Viana y otros.

Creo que hay una gran confusión con esta especie en las colecciones, porque tengo recibido muchas de ellas que no concuerdan con la diagnosis de Berg y que así se hallan clasificadas. Muchos ejemplares que he recibido con la clasificación de *subpilosa,* poseen el área costal con 2 carreras de aréolas solamente, cuando Berg dice textualmente: « membrana costae hemelytrorum basi angusta, subtilissime rotundata, basi ipsa unicellulata, deinde biseriata, dum triseriata et posterius quatriseriata ».

Berg utiliza la terminología de Stal: *area costalis* lo mismo que subcostal: « membrana costae » idéntica al área costal de los autores modernos.

Los ejemplares enviados están concordes con la diagnosis de *iridescens* Champion, cuyos comentarios hago más adelante al tratar de esta especie.

4 - Gargaphia penningtoni Drake

1928 — *Gargaphia penningtoni* Drake, *Physis,* vl. IX, pp. 75-76.

La Plata, 1 ejemplar, en *Abutilon* sp.; Buenos Aires, 1 ejemplar, en *Cajanus indicus.* El tipo procede de Buenos Aires y la especie se encuentra muy dispersa en el continente sudamericano: Argentina, Brasil y Paraguay.

5 - Gargaphia oreades Drake

1928 — *Gargaphia oreades* Drake, *Physis,* vl. IX, p. 75.

Ocho ejemplares de Buenos Aires, de donde procede el tipo. La especie ha sido también citada para el Brasil, Río Grande do Sul. Según Bosq, vive en *Solanum nigrum* L. y *S. capsicastrum* L.

6 - Gargaphia lunulata (Mayr)

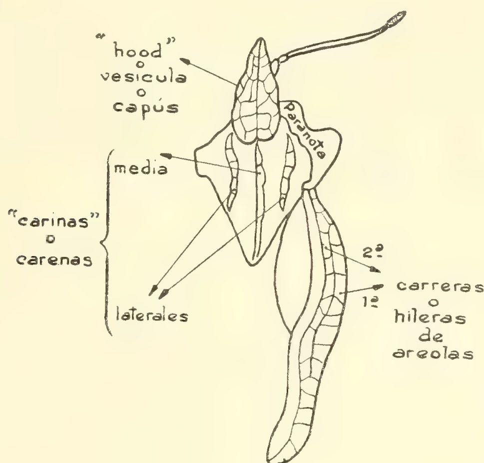
1865 — *Monanthia lunulata* Mayr, *Verh, z-b Ges. Wien,* 15, p. 441.
1866 — *Monanthia lunulata* Mayr, *Reis Novara Hem.,* p. 163, fg. 46.
1873 — *Gargaphia lunulata* Stal, *Enum. Hemipt.,* III, p. 124.
1919 — *Gargaphia lasciva* Gibson, *Trans. Amer. Ent. Soc.,* vl. 45, p. 198.

Muchos ejemplares de Chacabuco, Buenos Aires, cazados en *Passiflora coerulea* L. Especie bastante dispersa en los países del continente sudamericano.

7 - Gargaphia brunfelsiae Monte

1938 — *Gargaphia brunfelsiae* Monte, *O Campo*, año 9, nº 98, p. 64.

Chaco, 1 ejemplar cazado por Denier, en 29-11-37, en *Brunfelsia Hopeana* (Hook). El presente ejemplar es menor que el material cazado por nosotros en Belo Horizonte.



8 - Gargaphia iridescens Champion

1897 — *Gargaphia iridescens* Champion, *Biol. Centr. Amer.*, Rhynch. II, pp. 10-11, fgs. 1-1ª.
1919 — *Gargaphia iridescens* Gibson, *Trans. Amer. Ent. Soc.*, vl. 45, pp. 197-98.
1922 — *Gargaphia iridescens* Bergroth, *Ann. Soc. Belg.*, vl. LXII, pp. 149-150.

Muchos ejemplares de Chacabuco, Buenos Aires, cazados en *Ambrosia tenuifolia* Spreng y Mirasol (*Helianthus annus* L.), en marzo.

Gibson al describir esta especie en su trabajo ha presentado una descripción que se aleja de las características señaladas por Champion, pues la descripción original presenta el área costal con 2 hileras de aréolas, aumentando hasta 3 en la parte más ancha y disminuyendo hasta 1 en el ápice; mientras Gibson presenta 3 hileras de aréolas. Muy juiciosos son los comentarios hechos por Bergroth, pues los ejemplares que tengo delante de mí, poseen las características de la descripción original y acordes con las palabras de Bergroth, o sea que la mayor parte de los ejemplares posee el segundo segmento de las antenas del mismo color del primero,

es decir, negruzco en vez de pálido. Como Champion describió su especie con un solo ejemplar y este mismo sin los dos últimos segmentos de las antenas, los que sirven para mis estudios están concordes con la descripción presentada por Bergroth, esto es: el terver segmento amarillo pálido y el cuarto negruzco con base amarilla. Hay también alguna diferencia en las medidas, las cuales ya fueron comentadas por Bergroth. Todavía, están concordes con los comentarios de Bergroth el número de hileras del área costal, pues así son los 42 ejemplares que tengo en mis manos, salvo dos que presentan el àrea triseriata, pero así mismo solamente de un lado, la disposición de las aréolas son confusas tal como acontece con el diseño que Champion nos presenta.

9 - Teleonemia prolixa (Stål)

1860 — *Laccometopus prolixus* Stål, *Río Hemipt.*, I, p. 65.

1862 — *Monanthia* (*Tropidocheila*) *sacchari* Stål, *Stett. Ent. Zeit.*, p. 325.

1873 — *Teleonemia* (*Teleonemia*) *prolixa* Stål., *Enum. Hemipt.*, III, p. 132.

1897 — *Teleonemia prolixa* Champ., *Biol. Centr. Amer.*, Rhynch, II, p. 39, tab. 3, fgs. 9, a-b, e 10.

Dos ejemplares coleccionados por el Dr. A. Ogloblin, en la Estación Experimental de Loreto, Misiones. Especie muy variable, en tamaño y colorido, razón por la cual Champion ha creado las variedades *a* y *b*.

10 - Teleonemia brevipennis Champion

1898 — *Teleonemia brevipennis* Champion, *Biol. Centr. Amer.*, Rhynch, II, p. 63, tab. 3, fg. 9.

Cuatro ejemplares de Misiones, Loreto, X-1936. Dos ejemplares presentan una diferencia en el área costal, siendo que no poseen en la parte más ancha 2 células, en cuanto a las otras dos están concordes con la descripción original.

11 - Teleonemia carmelana (Berg)

1892 — *Leptostyla carmelana* Berg, *An. Soc. Cient. Argent.*, p. 99.

1922 — *Teleonemia simulans* Drake, *Mem. Carn. Mus.*, vl. IX, nº 2, p. 358.

1922 — *Teleonemia jenseni* Bergroth, *Ann. Soc. Ent. Belg.*, vl. LXII, pp. 150-51.

1922 — *Teleonemia simulans* Drake, *Physis*, vl. IX, p. 72.

San Roque, Corrientes, II-1920, dos ejemplares.

12 - Corythaica planaris (Ulher)

1893 — *Typonotus planaris* Uhler, *Proc. Zool. Soc.*, London, pp. 716-717.
1924 — *Corythaica planaris* Drake-Bruner, *Mem. Soc. Cub. Hist. Nat.*, vl. VI, Nos. 3-4, pp. 153-154.

Santiago del Estero, Ciudad, II-1935, 4 ejemplares, cazados en el Meloncillo del campo (*Solanum eleagnifolium* Cav.).

Según Drake, las especies de Berg: *Leptostyla cucculata* y *L. passiflorae* son del género *Corythaica* (Physis, vl. IX, 1928, p. 72). Yo soy del mismo parecer y tengo la impresión de que *passiflorae* es *planaris*, por lo menos es lo que se puede deducir por el estudio de la diagnosis. Sin un estudio de los tipos es imposible decidir; pero si es verdad la conclusión por las diagnosis tenemos *planaris* en la sinonimia.

Por la diagnosis creo que la especie *cucculata* venga a ser *monacha* y así es otra especie que también desaparece.

Entretanto estos comentarios no deciden la cuestión, lo que solamente es posible hacer con el estudio de los tipos.

13 - Corythaica bosqi, n. sp.

Pronoto puntilloso, estrechado en la base y con la porción triangular ligeramente reticulada. Paranota más o menos ancho, biseriado en su mayor parte, sinuoso, no tanto como en *planaris* y *monacha*, bien más estrecho que en las especies citadas arriba y con algunas nervaduras negruzcas; tricarinado, la carena mediana con una sola carrera de aréolas anchas, un poco más alta que las carenas laterales, siendo las aréolas medianas oscuras; las carenas laterales bien sinuosas, uniseriadas, con aréolas anchas y hialinas. Vesícula más larga que alta, un poco aplanada en la base y aguzada hacia el ápice, pasando ligeramente al àpice de la cabeza, la cual se halla completamente cubierta por ella, la nervadura mediana bien saliente, y, a veces, con nervaduras oscuras. Las antenas amarillo-pálidas, casi lisas, salvo el cuarto segmento que posee pelos bien visibles, pero pocos. Los 1º y 2º segmentos ligeramente robustos; el primero dos veces el largo del 2º; el tercero, cuatro veces el 1º; y los 1º y 2º juntos, iguales al 4º.

Elitros sobrepasando regularmente la parte final del abdomen, de colorido amarillo paja, bien semejantes a los de *monacha* y cortados con nervaduras oscuras. Area costal no muy ancha, levantada, uniseriada en su mayor parte con aréolas anchas, pero biseria-

das en el centro, aquí y allí con nervaduras oscuras; subcostal con 3 carreras de aréolas en su mayor anchura; área discoidal estrechada en las extremidades, con 3 carreras de aréolas en la parte más ancha; la elevación entre las áreas subcostal y discoidal, bien saliente.

Patas amarillas; la parte ventral del tórax de color castaño obscuro.

Colorido general amarillo paja con máculas oscuras; una mácula también oscura en el centro de la carena mediana y muchas otras dispuestas por los élitros. En el área costal pocas nervaduras oscuras.

Rostro corto, no llegando a las patas medianas, mientras la abertura rostral llega hasta allí.

Long., 2,20 mm.; lat., 1,05 mm.

Holotipo (macho) y alotipo (hembra) y dos paratipos, en mi colección, y otro paratipo en la colección Bosq, de Santiago del Estero, Fortín Inca, 19-XII-1937. La especie fué cazada por el entomólogo Juan M. Bosq, a quien tengo el honor de dedicársela.

La presente especie es semejante a *monacha*, pero se distingue por poseer la carena mediana uniseriada, los paranotas más estrechos y no triseriados en la mayor anchura y ni el área costal biseriada en su mayor parte y también por el aspecto de la vesícula.

Por la carena media uniseriada es fácil distinguir esta especie de *Corythaica* (*Leptobyrsa*) *cucculata* Berg y *C.* (*Leptobyrsa*) *passiflorae* Berg.

BIBLIOGRAFIA

1 — Berg, C.,1879 - *Hemiptera Argentina*, pp. 135-136.
2 — Berg, C., 1884 - *Addenda et Emedanda ad Hemiptera Argentina*, pp. 102-103.
3 — Bueno, J. R. T., 1917 - *Bull, Brooklyn Ent. Soc.*, vl. XII, p. 19.
4 — Drake, C. J.,1921 - *Florida Entomologist*, vl. IV, nº 4, p. 50.
5 — Drake, C. y Bruner, S., 1923 - *Mem. Soc. Cub. Hist. Nat.*, vl. VI, Nos. 3-4, pp. 153-154.
6 — Drake, C. y Poor, M. E., 1937 - *Mem. Carn. Mus.*, vl. XX, pp. 311-312.
7 — Gibson, E. H., 1919 - *Proc. Biol. Soc. Wash.*, vl. 32, pp. 98-101.
8 — Stal, C., 1860 - *Río Hemipt.*, I, p. 64.
9 — Uhler, P. R., 1893 - *Proc. Zool. Soc.*, London, pp. 716-717.
10 — Uhler, P. R., 1894 - *Proc. Zool. Soc.*, London, p. 203.

HOMENAJE AL PROFESOR DARMOIS

El 21 de setiembre próximo pasado, la Sociedad Científica Argentina otorgó el diploma de Socio Correspondiente al Profesor Eugenio Darmois, el cual, pronunció después una notable conferencia sobre " Lo que piensa la geofísica moderna de la vida en la superficie de la tierra ".

Fué presentado al auditorio por el Dr. R. Vanossi, con las siguientes palabras:

La Junta Directiva de esta Institución me ha honrado con la misión de presentar a M. Eugene Darmois, profesor de la Faculté des Sciences de la Universidad de París, el cual ocupará la tribuna para referirse, con su reconocida autoridad, a un tema subremanera interesante.

El profesor Darmois es miembro correspondiente de esta Sociedad y no necesita, en rigor, presentación, para nuestro ambiente intelectual: su intensa actividad científica, en el campo de la Física y de la Química, es bien conocida y sus recientes conferencias desde la cátedra de la Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales han permitido, a todos los que han tenido la satisfacción de escucharlo, aquilatar la amplitud de sus vastos conocimientos y apreciar su atrayente forma de expresión.

Estas pocas líneas, valgan, más bien, para brindarme el placer de recordar lo conocido, en este instante de formalidad académica con lo cual se hiere la propia modestia del hombre de estudio; falta ésta sin embargo, que, creo, me la tolerará en homenaje a la sinceridad de la breve exposición.

El Prof. Darmois cursó estudios secundarios en el Liceo de Nancy, recibiendo su grado en 1903, en l'Ecole Polytechnique y en l'Ecole Normale Superieure. Se desempeñó luego, en la Faculté des Sciences de Rennes (1910), en l'Université de Nancy y finalmente culmina su actuación docente en l'Université de Paris, donde continúa su proficua labor. Ha merecido distinciones de particular significación, como lo son la de ser laureado en el Instituto, Premio Kastner-Boursault (1925), Premio La Caze (1932) y Caballero de la legión de Honor: Promotion Pasteur.

Los resultados de su incansable actividad de investigador están traducidos en las numerosas publicaciones de carácter científico y técnico, aparecidas en revistas de su país y extranjeras: C. R. de L'Academie des Sciences, J. de Physique, J. de Chimie Phy-

sique, B. de la Societe Chimique de France, Chimie et Industrie, Transactions of the Faraday Society y otras. Ellas se refieren a temas de ciencia pura y aplicada, como lo son sus estudios sobre la polarización natural y magnética; investigaciones sobre los electrolitos, a la luz de las nuevas teorías; conductibilidad de cristales en particular los de cuarzo; cracking de petróleos; lámpara a vapor de mercurio, etc.

En todos estos campos de estudio, el Prof. Darmois, personalmente o como director de trabajos de sus discípulos y colaboradores, ha podido demostrar sus vastas miras, sus profundos conocimientos y su espíritu de investigador completo. La ciencia ha enriquecido su acervo, con nuevas adquisiciones de indiscutible y consagrado mérito, gracias a él.

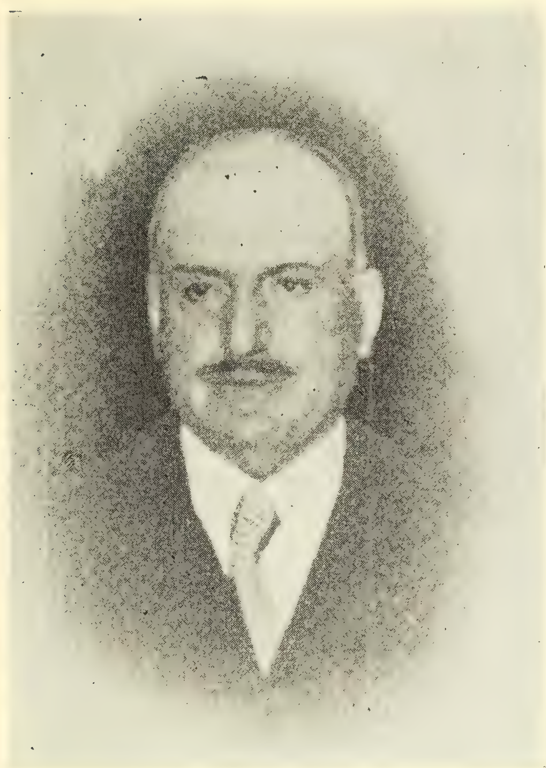
M. Darmois representa para las ciencias experimentales el hombre de cultura y disciplina completos; une a su amplitud de base teórica la capacidad de acción efectiva en el laboratorio, que en homogenea y armónica unidad le permitirán el máximo de rendimiento útil. Así se puede hilvanar en el complejo de las ciencias naturales, máxime hoy día en que el cúmulo de conocimientos adquiridos solo permite ver claro a quien es capaz de colocarse en un punto que le haga posible dominar el conjunto y su admirable coordinación, y a quien simultáneamente le es posible descender al detalle de la especialización, en una parte del admirable complejo.

Esto es una breve síntesis de la personalidad del Prof. Darmois digno representante de la ciencia e intelectualidad francesas, cuyas contribuciones a la formación de nuestro ambiente cultural merecen nuestro agradecimiento, y por ello quiero aquí expresar mi homenaje, en particular, ante la persona de él.

M. Darmois: La Sociedad Científica Argentina se siente complacida de vuestra presencia en su cátedra y os agradece la aceptación gentil de la invitación que os formulare. Debo significaros que al relacionaros íntimamente con esta institución, en vuestro carácter de miembro correspondiente, colaborais en su obra, como desde ahora lo hacéis. La obra de esta institución significa para nuestro país, toda una tradición cultural, como dan de ello fé, sus múltiples actos, desde el año de su fundación en 1872 y sus publicaciones, de las cuales los Anales, con sus 126 tomos ya publicados, son la expresión de una buena parte de las actividades en ciencia pura del ambiente. Por todo ello es grande la satisfacción que experimentamos al poner a vuestra disposición esta Casa.

Escucharemos, señor, vuestra amena y autorizada palabra; estáis en posesión de ella.

Ing. IGNACIO AZTIRIA



El día 6 de octubre de 1938, falleció repentinamente en Buenos Aires el Ingeniero Dr. Ignacio Aztiria, que en vida fué no sólo un distinguido educacionista y profesor universitario, sino también un destacado cultor de las ciencias matemáticas, como lo prueba su tesis doctoral sobre « La cinemática en la geometría de dos dimensiones ».

Reproducimos a continuación algunas de las oraciones fúnebres pronunciadas en el momento del sepelio.

Palabras del Dr. Claro C. Dassen

Señores:

La Sociedad Científica Argentina ha considerado del caso, disponer que, a su nombre, se pronuncien en el presente acto, algunas palabras de despedida al que, durante cuarenta años, fué su fiel y distinguido socio activo; y que también en alguna oportunidad, como vocal o tesorero, prestó a la Sociedad, buenos y apreciados servicios directivos.

Es en cumplimiento de esta resolución que voy a decir algo. Y lo haré sin ninguna retórica, en términos lisos y llanos; que por otra parte, lisa y llana fué también la vida de don Ignacio Aztiria.

Era natural de Azul donde naciera 65 años ha. En Buenos Aires inició, hace de ello 44 años, sus estudios universitarios, ingresando en la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Siguió los cursos de Ingeniería Civil, termiándolos seis años después, en 1899. Desde dos años antes era ya miembro de la Sociedad Científica Argentina.

Alumno distinguido, recibió, al terminar sus estudios de ingeniería, el diploma de honor correspondiente. Pero hizo más; aprovechando la circunstancia de haberse reabierto en aquella Facultad, al iniciarse el año 1896, los cursos de Matemáticas Superiores, que estaban interrumpidos desde seis años antes, siguió Aztiria esos cursos juntamente, en parte, con los de Ingeniería; y en 1906 obtuvo el título de doctor en Ciencias Físicomatemáticas, y otro diploma de honor como alumno distinguido del doctorado.

Precisamente con motivo de estos estudios doctorales, tuve ocasión de vincularme con él; fuí el único que le acompañó en esa tarea; recibimos juntos el título de doctor. Cuando ésto sucedía hacían ya diez años que nadie gestionaba el título referido. Y, después de nosotros, transcurrieron veinte años antes de que volviese a otorgarse otro. Anoto esas circunstancias para recalcar que si a ninguna persona tentaban esos estudios, era porque, aparte de ser difíciles, no ofrecían compensación pecuniaria alguna, de modo que cabe señalar el hecho como honroso para el Ingeniero Aztiria ya que denota su amor a la ciencia pura — de toda idea de lucro desprovisto.

Aztiria declinó, por otra parte, el ejercicio de su profesión de ingeniero para actuar de lleno en las tareas de la enseñanza, las que constituyeron, al parecer, su verdadera vocación: maestro nor-

mal, profesor de enseñanza secundaria en la rama matemática, catedrático de Física y de Cosmografía en la Escuela Normal de Profesores de la Capital Federal, de Física y Mecanismos en la Facultad de Ciencias Físicomatemáticas de La Plata antes de su nacionalización; profesor de Análisis Matemático de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Buenos Aires— de la que fue también, un tiempo, miembro del Consejo Directivo — hasta su retiro no hizo otra cosa que practicar la docencia, salvo una actuación incidental como Inspector de Enseñanza secundaria normal y especial, hace de ello más de 30 años.

Al retirarse de la Universidad, ésta le otorgó el título de profesor honorario .

Hombre pacífico, modesto, benigno y sosegado, muere sin haber seguramente despertado un solo odio. Pero esas mismas condiciones de vida simple, apacible, enemigo de complicaciones, — y quizá también otras razones — le alejaron, al parecer del cultivo de las ciencias. Por eso no se puede citar ninguna contribución suya en ese sentido, sin embargo, de que no le faltaban aptitudes ni talento.

En todos casos, prestó siempre su apoyo moral y material a toda iniciativa en pro del fomento de las ciencias físicomatemáticas. Y un ejemplo lo tenemos en sus 40 años de socio de nuestra SOCIEDAD.

Podría citar muchos episodios honrosos de la época de nuestros estudios y de la posterior, pero no considero ser éste el momento oportuno; por eso y en homenaje a la seriedad del presente acto que requiere sobriedad y recogimiento, creo deber, con estas palabras, dar por terminada la misión que se me ha confiado tanto más cuanto que para no caer en lugares comunes, una semblanza digna del Dr. Aztiria requeriría un tiempo mayor del que he podido disponer.

En nombre de la SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA, y en el propio, me inclino ante los restos del socio perseverante y del respetado compañero.

Palabras pronunciadas por el Ing. Emilio Rebuelto

En nombre de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, vengo a añadir una ofrenda más, a las que hoy se tributan a quien en vida se llamó Ignacio Aztiria; y en mi voz emocionada, con la cual intento traducir el homenaje de la alta casa de estudios donde la acción de Aztiria ha dejado tan imperecederas

huellas, va mezclada también la sincera expresión doliente de mi homenaje, del homenaje íntimo, personal, de quien por haber sido uno de sus alumnos, pudo recoger directamente de sus labios, en los días ya lejanos de estudiante, las sabias lecciones que con paternal sencillez, impartía incansable y entusiastamente el doctor Aztiria.

Además de su enseñanza, Aztiria nos ha dejado el impagable ejemplo de su vida, toda ella plena de austeridad, modestia y rectitud. No se destacan en su biografía, ni los brucos ascensos, ni los vaivenes con que el azar matiza la existencia de otros luchadores. La de Aztiria, fué una existencia desarrollada en ascensión constante, paso a paso, con la continuidad nunca truncada de una línea recta, sin interrupciones en su elevación permanente; y también sin descanso, en armonía con el recio temple humano de que estaba dotado, muy propio de su ascendencia vasca.

Quien había de llegar al Doctorado en Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Nacional de Buenos Aires, el más alto título a que pueden aspirar entre nosotros quienes orientan sus afanes de estudiosos hacia esta disciplina científica, empezó modesta, muy modestamente, obteniendo un título de Maestro en la Escuela Normal de una ciudad provinciana en el Azul, donde naciera en 1873. Vinieron después los estudios más serios y completos de Buenos Aires, y así fueron logrados sucesivamente, el Profesorado de enseñanza Secundaria en la especialidad Matemática, la carrera de Ingeniería Civil, terminada brillantemente con diploma de honor, y por último, la culminación de tanta y tanta tesonera labor, con el lauro final del Doctorado en Ciencias Físico-Matemáticas, que trajo para el Aztiria estudiante, un segundo diploma de honor y para el Aztiria ya catedrático, toda clase de merecidas recompensas.

Su vocación por la enseñanza quedaba bien demostrada desde los orígenes de su carrera científica; su competencia indiscutible, había sido puesta en evidencia a lo largo de sus estudios; y más adelante, la contracción personal y el interés pleno con que se dedicó a su sagrada misión docente, concluyó de perfilar en Aztiria una figura excepcional de hombre de estudio y de consulta. El tiempo, acentuó aun más estos relieves; y tanto las cátedras como los puestos administrativos, sirvieron a Aztiria para desarrollar una acción de provechosa eficacia en los más diversos ambientes educacionales, donde se puso a prueba la solidez de sus conocimientos, la amplitud de su cultura y lo completo de su for-

mación intelectual. En la Escuela Normal de Profesores de la Capital, dictó las clases de Física y Cosmografía; en la Facultad de Ciencias Físicas de La Plata, en los primeros tiempos de su organización, antes de que fuera nacionalizada, fué Profesor de Física y de Mecanismos; y en la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Buenos Aires, figuró entre su personal docente apenas terminó de ser alumno, desempeñando con invariable éxito, Jefaturas de Trabajos prácticos, Direcciones de Aulas y Cátedras de Algebra Superior, Geometría Analítica, Análisis Matemático y de Matemáticas Superiores.

Había, pues, subido peldaño a peldaño hasta el más alto sitial de la enseñanza y de la matemática; era entonces, sobradamente justo, que se lo consideraba capacitado en forma excepcional para resolver los complejos problemas de la enseñanza en sus múltiples grados, aspectos y categorías. Por tales motivos, su designación como Inspector General de Enseñanza Secundaria, Normal y Especial, fué recibida con el auplauso de un beneplácito unánime; y Aztiria cumplió desde la Inspección General, una labor meritoria, demostrando una vez más, sus condiciones de trabajo y competencia.

Acerca de su actuación en los claustros universitarios sería realmente ocioso hablar. Hablan por mí, en este momento, los numerosos ex-alumnos de Aztiria, congregados en respetuoso silencio alrededor de su féretro. Yo me sumo al sentir de todos ellos y al revivir por las sugerencias derivadas de este triste momento, el recuerdo de las primeras lecciones oídas en la Facultad, reconocemos el íntimo agradecimiento que, sin darnos cuenta, guardábamos hacia Aztiria, como uno de los más respetados maestros que nos impartieron el pan espiritual de la alta ciencia matemática.

Cuando se escriba la historia de las ciencias en la República Argentina, el nombre del Dr. Aztiria quedará fijado definitivamente como uno de los más esclarecidos trabajadores de la hora primera. Es cierto que no se vinculará al recuerdo de ningún descubrimiento de importancia, ni a la exposición de novísimas y grandilocuentes teorías; pero no por haber sido más modesta, su tarea dejó de ser más útil paar la formación de la cultura científica del país. Su gestión en la enseñanza fué, por de pronto, y esto es ya un grandísimo mérito, la que entonces era necesaria y la de mayor oportunidad. Pensemos que el ambiente de aquellos días, hace treinta o cuarenta años, exigía como trabajo previo, una fatigosa y oscura labor preparatoria de cimentación; había que iniciarlo todo, divulgando primero los conocimientos clásicos y los doctrinas fun-

damentales, imprescindibles para apoyar más tarde en ellas, otras disquisiciones de más alto vuelo. Pensemos también que el extraordinario bienestar general del país en aquellos días de acelerado progreso en todos los órdenes de la vida argentina, no eran clima propicio al esfuerzo reconcentrado exigido imprescindiblemente por la meditación matemática; y que los ideales de la juventud, tampoco se orientaban entonces con la frecuencia e intensidad que ahora, hacia los campos de la ciencia pura, cuyo valor no era entonces suficientemente aquilatado.

Faltaba todo: estímulo, colaboración, finalidades prácticas. La alta matemática era aun entre nosotros una planta exótica que fué necesario arraigar y cuidar con extremo interés para que principiase a dar fruto. Rodeadas de un horizonte de indiferencia aparecen y se alzan triunfantes figuras excepcionales como la del Dr. Aztiria y las de otros pocos, muy pocos entusiastas matemáticos de aquellos días, cuyos nombres no es necesario que yo recuerde, pues están en la mente de todos. Al lado de ninguno de ellas desmerece la figura austera, toda modestia y sinceridad del Dr. Aztiria, quien cumplió como bueno la misión que le tocó desempeñar.

Aztiria, como matemático en la Argentina, no vivió en la época de la cosecha, sino de la siembra; y fué eso, principalmente eso, un sembrador que derramaba a manos llenas, pródigamente, todo el saber que había acumulado; y lo dió todo, sin reticencias, ni egoismos, con una absoluta comprensión del bien supremo que hace quien abre ampliamente su corazón, su intelecto y su alma, para ayudar a sus contemporáneos, sean alumnos, amigos, camaradas, o compañeros de trabajo.

Después de una labor de tan altos valores, abandonó su puesto de primera fila tal vez prematuramente, pues de su fresco intelecto aun podrían esperarse muchos óptimos frutos. La Facultad le otorgó un último título, el de Profesor Honorario; y en el silencio de un voluntario retiro, dejó transcurrir el Dr. Aztiria los últimos años.

Su inesperado fallecimiento, ingrata noticia para todos, vuelve a colocar su nombre en los labios temblorosos de sus amigos que al llorar hoy su desaparición, evocan todo lo bueno, lo noble, lo excelso, y lo sabio de ese hombre, maestro y amigo de siempre, y a quien, por fatalidad del destino, venimos a dar en este momento el adiós trágico que se dice, sin ninguna esperanza de retorno.

Descanse en paz.

SOCIOS ACTIVOS

Abrines, Héctor Aníbal
Aguilar, Félix
Albizzati, Carlos M.
Alessi, Juan M.
Alvarez, Raúl J.
Alvarez de Toledo, Belisario
Allende Lezama, Luciano P.
Anastasi, Camilo
Anchorena, Juan E.
André, Enrique de
Andrioletti, Juan Luis
Añón Suárez, Vicente
Aparicio, Francisco de
Aráoz Alfaro, Gregorio
Arce, Manuel J.
Arditi Thompson, H.
Armani, Aquiles
Arnaudo, Silvio J.
Avila Méndez, Delfín
Bado, Atilio A.
Bachmann, Ernesto
Baglietto, Eduardo E.
Balbiani, Atilio
Baliani, Luis M.
Bancalari, Agustín
Bandoni, Alfredo J.
Barabino Amadeo, S.
Barbieri, Antonio
Bargna, Juan L.
Barilari, Mariano J.
Barral Souto, José
Barrancos, Leónidas A.
Becke, Alejandro von der
Berrino, Juan B.
Bertino, José Carlos
Besio Moreno, Nicolás
Bianchi Lischetti, A.
Biggeri, Carlos
Blaquier, Juan
Boaglio, Santiago
Bolognini, Héctor
Bonanni, Cayetano A.
Bontempi, Luis
Bordas, Alejandro F.
Bordenave, Pablo E.
Borzacow, Wladimiro
Borruat, Luis A.
Borzi, Ana María
Bosch, Gonzalo
Bosisio, Anecto J.
Bottaro, Juan C.
Bozzini, Luis (h.)
Briano, Juan A.
Buich, Raúl
Bunge, Juan C.
Buontempo, Guillermo
Burkart, Arturo
Busso, Eduardo B.
Butty, Enrique
Buzzo, Alfredo
Caillet Bois, Teodoro
Calandra, Raúl E.
Canale, Humberto
Canal Feijoo, Bernardo
Capelli, Pedro F.
Carabelli, Juan José
Carbia, Rómulo D.
Carbone, Esteban
Carbonell, José J.
Cárcova, Enrique de la
Carelli, Antonio
Carelli, Humberto H.
Caride Massini, Pedro
Carman, Ernesto
Carrea, Juan Ubaldo
Casacuberta, Antonio
Castellanos, Alberto
Castello, Manuel F.
Castiñeiras, Julio R.
Celasco, Juan L.
Ceppi, Héctor
Cernuschi, Félix
Clos, Enrique C.
Cock, Guillermo E.
Coni Bazán, F. A.
Curti, Orlando P.
Curutchet, Luis
Chanourdie, Enrique
Chizzini Melo, Aníbal F.
D'Ascoli, Lucio
Dassen, Claro C.
Dasso, Héctor
Dasso, Ricardo L.
De Cesare, Elías A.
De Fina, Armando L.
De la Ini, Juan E.
Dellepiane, Luis J.
Deulofeu, Venancio
Díaz, Emilio C.
Dieulefait, Carlos E.
Doello-Jurado, Martín
Dobranich, Jorge W.
Domínguez, Juan A.
Dubecq, Raúl E.
Dueñas, José
Duhau, Luis
Dupont, Enrique
Durañona y Vedia, A.
Durrieu, Mauricio
Edelberg, Benjamin
Escudero, Antonio
Escudero, Pedro
Faré, Santo S.
Fernández, Alberto J.
Fernández Díaz, A.
Fernández Long, S.
Figini, Angel
Figuerero, Hernando W.
Fischer, Gustavo Juan
Flores, Emilio M.
Floriani, Luis
Florit, Carlos J.
Forn, Carlos J.
Fossa Mancini, E.
Franceschi, Alfredo
Fürnkorn, Divico A.
Gadda, Carlos Manuel
Galmarini, Alfredo G.
Gando, Alfredo R.
Gandolfi Herrero, Augusto
Gandolfo, José S.
Gascón, Alberto
Gaspar, Fernando L.
Géneau, Carlos E.
Gerardi, Donato
Ghigliazza, Sebastián
Giagnoni, Bartolomé E.
Giannone, José
Gradín, Carlos
Grieben, Arturo
Gutiérrez, Ricardo J.
Haussler, Emilio
Herbin, Luis A.
Hermitte, Enrique
Herrera Vegas, M.
Herzer, Bernardo
Hickethier, Carlos F.
Hofmann, Herbert
Hortal, José Angel
Houssay, Bernardo A.
Hoyo, Arturo
Igartúa, Luis María
Irigoyen, Luis H.
Isetta, José
Ivanissevich, Ludovico
Jorge, José M.
Jakob, Cristofredo
King, Diarmid O.
Kinkelin Pelletán, J. C. de
Knoche, Walter
Kraglievich, Nicolás T.
Krapf, Eduardo
Labarthe, Julio
Lagunas, Simón
La Menza, Francisco
Laporte, Luis B.
Larco, Esteban
Lasso, Alfredo L.
Latzina, Eduardo
Ligniéres, Roberto
Lizer y Trelles, C. A.
Lombardi, Alberto
Loudet, Osvaldo
Loyarte, Ramón G.
Lugones, Arturo M.
Llauró, José
Mac Donagh, E. J.
Magnin, Félix J.
Magnin, Jorge
Mainini, Carlos
Mallol, Emilio
Mamberto, Benito
Marcó del Pont, E.
Marchionatto, Juan B.
Maresca, Antonio J.
Marini, Tomás L.
Martignone, Eduardo
Marotta, F. Pedro
Marotta, R. Armando
Mata, Leopoldo
Méndez, Julio
Meoli, Gabriel
Meoli, Humberto
Mercau, Agustín
Meriggi, Juan C.
Mermoz, Francisco A.
Molfino, José F.
Molina Carranza, L.
Molle, Clotilde C.
Montes, Vicente E.
Moragues Bernat, Jaime
Moreno, Evaristo V.
Nágera, Juan José
Natale, Alfredo
Natale, Ernesto
Negrete, Lucía
Negri, Mario L.
Nielsen, Juan
Oliveri, Alfredo B.
Ortega Belgrano, Raúl
Ortiz, Aníbal A.
Ortiz de Rosas, Jorge
Otamendi, Gustavo
Ottonello, Héctor
Páez, José María
Page, Franklin Nelson
Paitoví y Oliveras, A.
Paquet, Carlos
Parodi, Edmundo
Parodi, Lorenzo R.
Pasman, Raúl G.
Pasman, Rodolfo E.
Pastore, Franco
Paz Anchorena, José M.
Pérez Hernández, A.
Perrone, Cayetano
Pestalardo, Agustín
Pini, Aldo S.
Platz, Hubert
Podestá, Juan Carlos
Polti, Modesto
Posadas, Carlos
Quinos, José Luis
Quinterno, Bruno F.
Quiroga, Pedro R.
Raimondi, Alejandro
Raffo, Bartolomé M.
Ramaccioni, Danilo
Ramallo, Carlos M.
Ratto, Héctor R.
Rebuelto, Antonio
Rabuelto, Emilio
Recce, William Asher

Repetto, Blas Angel
Repossini, José
Ringuelet, Emilio J.
Rissotto, Atilio A.
Rivarola, Rodolfo
Robles, Angel A.
Rodríguez Aravena, S.
Rodríguez, Germinal
Rodríguez, Miguel
Roffo, Angel H.
Roffo, Juan
Roldán, Raimundo
Romero Brest, Enrique
Rokotnitz, Otto
Rospide, Juan
Rossell Soler, Pedro
Ruata, Luis E.
Ruíz Moreno, Isidoro
Ruiz Moreno, Adrián
Rumi, Tomás J.
Sabaria, Enrique
Salomón, Hugo
Sánchez, José Ricardo
Sánchez, Gregorio L.
Sánchez Díaz, Abel
Sánchez Sorondo, M. G.
Sanromán, Iberio
Santángelo, Rodolfo
Sarhy, Juan F.
Sarrabayrouse, Eugenio
Savon, Marcos A.
Schnack, Benno J.
Schmidt, Max
Schulz, Guillermo
Selva, Domingo
Selzer, Samuel
Sesma,, Angel
Sheahan, Juan F.
Silva, Leónidas L.
Simonoff, Miguel
Simons, Hellmut
Siri, Luis
Sobral, Arturo
Solari, Emilio F.
Solari, Miguel A.
Soler, Frank L.
Sordelli, Alfredo
Spinetto, David J.
Spota, Víctor J.
Storni, Segundo R.
Suárez, Angel
Taiana, Alberto F.
Taiana, Jorge
Tarragona, José
Tedeschi, Virgilio
Tello, Eugenio
Torre Bertucci, Pedro
Torello, Pablo
Tossini, Luis
Trelles, Rogelio A.
Trucco, Sixto E.
Valeiras, Antonio
Valentini, Argentino
Valentinuzzi, Máximo
Vallebella, Colón B.
Vanossi, Reinaldo
Varela, Rufino
Varela Gil, José
Vecchi, Arístides de
Vela Huergo, Julio
Verdaguer, Juan
Veyga, Francisco de
Vidal, Eduardo
Vignati, Milcíades A.
Villalobos D., C.
Vignaux, Juan C.
Vinardell, Alberto
Volpatti, Eduardo
Wainer, Jacobo
Wauters, Carlos
Wernicke, Raúl
White, Guillermo J.
Wysztelewski, W. de
Zamboni, Agustín
Zappi, Enrique V.
Zavalla, Carlos M.
Zuloaga, Angel M.

SOCIOS ADHERENTES

Bazzanella, José
Cotlar, Mischa
Devoto, Carlos Alberto
Ferramola, Raúl
Folcini, Martín L. G.
García, Eduardo D.
Glücksmann, Carlos E.
Goyena, Ricardo J.
Gorchs, Agustín C.
Laclau, Juan Pedro
Magne de la Croix, P. A.
Mailhos, Luis E.
Milesi, Emilio Angel
Quevedo Capdevila, Eduardo A.
Recoder, Roberto F.
Repetto, Cayetano
Rusconi, Carlos
Sadosky, Manuel
Somonte, Eduardo
Vistalli, Alina M.
Wechsler, Wolf

CASAS ADHERENTES

Angel Estrada y Cía.
Benvenuto y Cía.
Lutz, Ferrando y Cía.
Hijos de Atilio Massone
Otto Hess, S. A.
T. Gr. "Tomás Palumbo'
Jacobo Peuser, S. A. Ltda.

SOCIO VITALICIO

Huergo, Eduardo María

MIEMBROS PROTECTORES DE LA ORGANIZACION DIDACTICA DE BUENOS AIRES

Anchorena, Juan E.
Besio Moreno, Nicolás
Tornquist, E. y Cía. (Lda.)

SECCION CORDOBA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Juan Olsacher; Vice-presidente, Dr. Miguel Fernández; Vice-presidente, Ing. Daniel A. García; Secretario de actas, Dr. Guillermo V. Stuckert; Secretario de correspondencia, Prof. Tulio Mácola; Tesorero, Sr. Bernardo Pilotto; Pro-tesorero, Dr. Carlos C. Hosseus; Vocales: Ing. Clodoveo Pascualini; Ing. Jorge E. Bobone; Ing. Luis Chechi; Ing. Ambrosio L. Taravella; Dr. Federico Padula; Dr. José Carlomagno; Dr. Meade L. Zimmer; Sr. Enrique Sparn.

SOCIOS ACTIVOS

Aguiar, Henoch D.
Bobone, Jorge E.
Brandan, Ramón A.
Broglia, Alberto A.
Buteler, Jesús E.
Camilloni, Carlos
Carlomagno, José
Chaudet, Enrique
Checchi, Luis
Deheza, Eduardo
Esteban, Fernando
Fernández, Miguel
Fontana, Lorenzo P.
García, Daniel
Godoy, Salvador A.
Gordillo, Pedro N.
Hosseus, Carlos Curt
Larrauri, Agustín C.
Mácola, Berardo A.
Mácola, Tulio
Mirizzi, Pablo Luis
Ninci, Raúl T.
Olaf Lützow, Holm
Olsacher, Juan
Padula, Federico
Pasqualini, Clodoveo
Peláez J. Gambastiani de

Pilotto, Bernardo
Ponce Laforgue, Carlos
Rothlin, Edwin
Schmiedecke, Augusto
Sparn, Enrique
Stuckert, Guillermo V.
Taravella, Ambrosio L.
Trebino, Natalio
Urciolo, Victorio
Vercello, Carlos
Yadarola, Mauricio L.
Zimmer, Mesde L.

SECCION SANTA FE

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Gustavo A. Fester; Vice-presidente, Dr. José Piazza; Secretario de correspondencia, Ing. Quím. Francisco A. Bertuzzi; Secretario de actas, Ing. Quím. José Cruellas; Tesorero, Ing. Quím. Enrique Virasoro; Vocal 1º, Ing. José Babini; Vocal 2º, Prof. Rolando Hereñú; Vocal suplente 1º, Prof. Julio Salaber; Vocal suplente 2, Ing. Quím. Guillermo Berraz; Encargado de Biblioteca y Canje, Ing. Quím. Rodolfo Rouzaut; Encargado de Publicaciones, Ing. José Babini.

SOCIOS ACTIVOS

Anadón, Leónidas
Ariotti, Juan Carlos
Babini, José
Benet, Pedro José
Berraz, Guillermo
Bertuzzi, Francisco A.
Bonazzola, César J.
Ferzone, Rodolfo
Bossi, Celestino
Caballero, Martín A.
Cerana, Miguel
Claus, Guillermo
Cohan, Marcos
Courault, Pablo
Crouzeilles, A. L. de
Cruellas, José
Christen, Carlos
Christen, Rodolfo G.
Damianovich, Horacio
Falco, Federico
Fester, Gustavo A.
Frenguelli, Joaquín
Gollán, Josué (h.)
Gschwind, Eduardo P.
Guinle, Hugo José
Hereñú, Rolando
Hotschewer, Curto
Juliá, Tolrá Antonio
Kleer, Gregorio
Lachaga, Dámaso A.
Mai, Carlos
Mántaras, Fernando
Marelli, Hipólito
Martino, Antonio E.
Montpellier, Luis Marcos
Mounier, Celestino
Muzzio, Enrique
Nigro, Angel
Niklison, Carlos A.
Oliva, José
Peresutti, Luis
Piazza, José
Piñero, Rodolfo
Pozzo, Hiram J.
Ragonese, Arturo E.
Reinares, Sergio
Rouzaut, Rodolfo
Salaber, Julio
Salgado, José
Santini, Bruno L. P.
Schivazappa, Mario
Simonutti, Atilio A.
Tissembaum, Mariano
Urondo, Francisco E.
Virasoro, Enrique

SECCION MENDOZA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Juan B. Lara; Vice-presidente, Ing. Agr. José Raúl Ponce; Secretario, Ing. Agr. Julio Tolosa (h); Tesorero, Ing. Cayetano C. Piccione; Bibliotecario, Sr. Adrián Ruíz Leal; Vocales: Dr. Eduardo Carette; Dr. Mario Bidone; Ing. Alfredo Rosenthal; Sr. Manuel Tellechea; Ing. Agr. Rafael E. Pontis.

SOCIOS ACTIVOS

Alurralde, Juan Carlos
Anzorena, Jacinto
Ayala Castagnino, G.
Basso, Germinal
Benegas, Raúl
Bidone, Mario
Borsani, Carlos Pablo
Burgoa, Pedro A.
Carette, Eduardo
Castillo, José
Croce, Francisco M.
Espinosa, Norberto A.
Flor Alvarado, José M.
Gabrielli, Francisco J.
Galeano, Edgardo
García, José Federico
Godoy Vergelin, G.
Gomensoro, José N.
Granzella, Sinibaldo
Guiard, Ricardo
Jofré, Alberto L.
Lara, Juan B.
Lucero, Braulio G.
Lugones, Manuel G.
Magistretti, Guillermo
Maneschi, Ernesto
Maroso, José Angel
Maveroff, Aquiles
Mayorga, Santiago C.
Miyara, Salomón
Paganotto, Juan P.
Pelaia, Dante
Piccione, Cayetano C.
Ponce, José Raúl
Pontis, Rafael E.
Richard, Alfonso E.
Rosales, Ranulfo S.
Rosenthal, Alfrado
Ruíz, Aníbal
Ruíz Leal, Adrián
Serra, Luis Angel
Silvestre, Tomás
Stura, Angel C.
Tellechea, Manuel
Tolosa, Julio (h)
Toso, Juan F.
Villanueva, Miguel Angel

SECCION LA PLATA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Carlos A. Sagastume; Secretario, Ing. Adolfo P. Grissi; Tesorero, Dr. Carlos Teobaldo; Vocales: Dr. Hilario Magliano, Dra. Juana Cortelezzi; Ing. Juan Sabato; Dr. Federico E. Christmann.

SOCIOS ACTIVOS

Alsina Fuertes, Fidel
Amarante, Pedro C.
Angli, Jerónimo
Arroyo Basaldúa, Víctor M.
Basualdo, Washington S.
Bauer, Conrado
Bonet, Luis A.
Canals Frau, Salvador
Cortelezzi, Juana
Crespi Gherzi, Rodolfo A.
Christmann, Federico E.
Daló, Héctor R.
Ferrari, Obdulio J. F.
Gascón, Jorge
Gershánik, Simón
Giovambattista, Humberto
Grisi, Adolfo P.
Loedel Palumbo, Enrique
Mc Loughlin, Rogelio P.
Magliano, Hilario
Marmonti, Angel
Massimino, Blas
Méndez, José D.
Micheletti, Luis A.
Nico, Raúl
Oliva, Virgilio
Paternosto, Pedro G.
Pera, Tomás Carlos
Platzceck, Ricardo P.
Rodríguez, Marcelo R. N.
Sabato, Juan
Sáez, Francisco A.
Sagastume Berra, A. I
Sagastume, Carlos A.
Scheggia, Eduardo R.
Teobaldo, Carlos
Toranzos, Fausto L.
Trejo, César A.
Ucha Udabe, Manuel
Vucetich, Danilo C.
Wilkens, Alejandro

SOCIOS CORRESPONDIENTES

Aguilar y Santillán, R.	México
Alvarez, Antenor	Sgo. del Estero
Amaral, Afranio de	San Pablo (Br.)
Avendaño ,Leónidas	Lima
Bachmann, Carlos J.	Lima
Bodenbender, Guillermo	
Bolívar, Ignacio	Madrid
Bonarelli, Guido	Gubbio (It.)
Borel, Emile	París
Bragg, William Henry	Londres
Bruch, Carlos	Olivos (B. A.)
Cabrera, Blás	Madrid
Campos Porto, Pablo	Río de Janeiro
Carabajal, Melitón M.	Lima
Darmois, Eugenio	Nancy (Fr.)
Darmois, Georges	París
Dávila, Rubén	Santiago (Ch.)
Escomel Edmundo	Arequipa (P.)
Fiebrig, Carlos	Munich (Al.)
Fontecilla Larrain, Arturo ..	Santiago (Ch.)
Fort, Michel	Lima
González del Riego, Felipe ..	Lima
Gréve, Germán	Santiago (Ch.)
Guinier, Philibert	Nancy (Fr.)
Hadamard, Jacques	París
Hauman, Luciano	Bruselas
Hernández, Juvenal	Santiago (Ch.)
Hijar y Haro, Luis	México
Janet, Pierre	París
Jiménez de Asúa, Luis	Madrid
Keiper, Guillermo	Berlín
Kinart, Fernando	Amberes
Lahille, Fernando	Tarn (Fr.)
Langevin, Paul	París
Levi Civita, Tulio	Roma
Lobo, Bruno	Río de Janeiro
Mardones, Francisco	Santiago (Ch.)
Molina, Enrique	Concepc. (Ch.)
Monjaráz, Jesús E.	México
Moretti, Gaetano	Milán
Oliver Schneider, Carlos	Santiago (Ch.)
Pereira d'Andrade, Lencastre	Nova Goa (I. I
Perrin, Tomás G.	México
Perrine, Carlos D.	
Pi y Suñer, Augusto	Barcelona
Porter, Carlos E.	Santiago (Ch.)
Reyes Cox, Eduardo	Santiago (Ch.)
Rowe, Leo S.	New York
Shepperd, William R.	Wáshington
Tello, Julio C.	Lima
Valle, Rafael H.	México
Vélez, Daniel M.	México
Villarán, Manuel V.	Lima
Vitoria, Eduardo	Barcelona
Volterra, Vito	Roma

ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

ADOPTADOS PARA SUS PUBLICACIONES POR LA

ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

DIRECTOR: EMILIO REBUELTO

DICIEMBRE 1938. — ENTREGA VI. — TOMO CXXVI

SUMARIO

BUENOS AIRES

CALLE SANTA FE 1145

1938

ADVERTENCIA. — Los colaboradores de los Anales son personalmente responsables de la tesis sustentada en sus escrito. Tienen derecho a la corrección de do pruebas. Los que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos, deben solicitarla por escrito. Los manuscritos, correspondencia, etc. se enviarán a la sede social, **Santa Fe 1145.**

Impreso en los Talleres Gráficos "TOMAS PALUMBO" - La Madrid 321-325 - Buenos Aires

EXTENSIONES DEL TEOREMA DE ABEL-STOLZ
Y
SOBRE ALGUNAS TRANSFORMACIONES FUNCIONALES LINEALES

Por J. C. VIGNAUX

(Continuación)

SOBRE ALGUNAS TRANSFORMACIONES FUNCIONALES

1. Es conocida la importancia que ha asumido en la matemática pura y aplicada, las transformaciones definidas por la integral de Laplace.

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-zx} \varphi(x)\, dx$$

y por la integral de Fourier

$$g(z) = \int_0^\infty e^{-izx} \psi(x)\, dx \qquad (i^2 = -1)$$

El estudio de las propiedades de esta correspondencia ha dado lugar a numerosos y fundamentales trabajos, expuestos ya en forma sistemática en importantes obras dedicadas especialmente sobre este particular (1).

Al lado de estas transformaciones existen varias otras, mucho menos estudiadas y que, sin duda, merecen toda la atención. Tales son las llamadas transformaciones de Stieltjes, de Hankel, de Beltrami-Poincaré, de Gauss, de Hilbert, de Hamburger y otras.

En la presente memoria nos proponemos exponer varios resultados nuevos relativos a la *transformación limitada de Laplace*, definida por la relación

$$f(z) = \int_0^1 e^{-xz} \varphi(x)\, dx\,;$$

de la *transformación de Le-Roy*

$$g(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(x)}{1 - x\,z}\, dx$$

y de la *transformación de Heine*

$$h(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(x)}{x - z}\, dx\,;$$

(1) E. C. Titchmarsh: *Introduction to the theory of Fourier integrals*, Oxford 1937.

las cuales a diferencia de las anteriores, están dadas por integrales entre límites finitos. Estas cuestiones han sido tratado en un breve curso que he dado en la *Sociedad Científica Argentina* durante los meses de Septiembre y Octubre del corriente año.

En otro trabajo, en curso de publicación, haremos el estudio de la transformación de Hankel, de Stieltjes y de Gauss.

I. — LA TRANSFORMACION DE LAPLACE LIMITADA

2. *Introducción.* — El estudio de la correspondencia funcional definida por la integral de Laplace

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-xz} \varphi(x)\, dx \qquad [1]$$

fué iniciado en los trabajos de H. Poincaré, que puso en evidencia su gran importancia en la integración de las ecuaciones diferenciales, y posteriormente en aquellos de M. E. Borel, fundando su notable teoría de la sumación de series divergentes, mediante la consideración de esta integral.

Luego aparecieron varias memorias de Lerch, Pragman, Hardy, Nielsen, Landau,... las cuales aportan importantes contribuciones al estudio de las propiedades de la función $f(t)$; más fué S. Pincherle, quien dió los fundamentos de esta teoría, hoy conocida con la denominación de *transformación de Laplace,* en dos memorias ya clásicas de los *Annales de l|Ecole Normale Supérieur* (1905) y de *Acta Mathematique* (1907).

Desde entonces la teoría se desarrolla rápidamente; mostrándose particularmente fecunda en otras teorías matemáticas (series asintóticas y de facultad, funciones cuasi analíticas, ecuaciones diferenciales.....).

Una exposición magistral de los resultados fundamentales relativos a esta teoría ha sido hecha recientemente por el prof. G. Doetsch en su obra *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation* Berlín, Springer, 1937; a quien se debe, por otra parte, las contribuciones más importantes sobre este particular en estos últimos años.

Una de las cuestiones más importantes de la transformación de Laplace

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-tz} F(t)\, dt$$

es la cuestión de la inversión de esta integral, es decir, la determinación de la función $F(t)$ cuando se da la función holomorfa $f(z)$. Esta cuestión fué resuelta por Riemann con su célebre integral (1)

$$F(t) = \frac{1}{2\pi_i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(z)\, e^{xz}\, dz\,.$$

En el caso de una función $f(z)$ holomorfa y nula en el infinito, se puede determinar por medio de la fórmula (2)

$$F(t) = \frac{1}{2\pi_i} \int_c f(z)\, e^{zt}\, dz$$

donde C es una curva cerrada cualquiera del plano z que contiene en su interior todos los puntos singulares de $f(s)$.

Otras fórmulas de inversión han propuesto Widder (3) y Tricomi (3).

Todos estos resultados se refieren muy especialmente al caso que la integral [1] se toma sobre caminos radiales del plano de la variable compleja z, o por caminos formados por arcos de curvas y semi-rayos.

S. Pincherle (4) consideró muy brevemente el caso de la integral

$$f(s) = \int_\sigma e^{-st}\, F(t)\, dt \qquad [1]$$

(1) WERKE, *De dekine Weber*, Leipzig, 1876, p. 140.

La validez de esta relación con hipótesis cada vez más general ha dado lugar a una gran cantidad de trabajos fundamentales. Una generalización de la fórmula de Riemann al caso de las *funciones polígenas* he propuesto en un trabajo anterior.

(2) S. PINCHERLE, *Sull' inversione degli integrali definite*, Mem. della Soc. Italiana delle Sc. t. 15 (1908).

Se deduce inmediatamente aplicando el conocido teorema de PINCHERLE: *Condi-Condición necesaria y suficiente para que $F(t)$ tenga una transformada $f(z)$ holomorfa y nula para $z = \infty$, es que $F(t)$ sea una función entera.* (CIBRARIO, *La trasformazione de Laplace*, Rendiconti. Instituto Lombardo (1929), p. 348); G. PÓLYA obtiene también esta fórmula de un modo muy simple en un trabajo importante: *Untersuchungen uber Lucken und Singularitaten von Potenzreihen.* Math. Zeits. 29 (1928-29), pág. 578-80; Doetsch, *Loc. cit.*

(3) *The inversion of the Laplace integral...* Trans. Americ. Math. Soc., 36 (1934); F. TRICOMI, *Trasformazioni di Laplace e polinomi di Laguene*, Atti. R. Acc. N. dei Lincei, IV (1935), p. 232; VI (1935), p. 420.

(4) *Della trasformazione di Laplace e di alcune sue aplicazioni.* Mem. Istituto di Bologna, 4, S. V. 8.

donde σ es un camino cerrado a distancia finita, $F(z)$ una función analítica de t. La función $f(s)$ es una trascendente entera en s que denomina transformada de Laplace de $F(t)$ por el camino σ.

En la primera parte del presente trabajo nos proponemos hacer el estudio de la correspondencia funcional definida por la integral

$$f(z) = \int_0^1 e^{-xz} \varphi(x)\, dx$$

o más generales, de la forma

$$f(z) = \int_c e^{-xz} \varphi(x)\, dx$$

donde C es un arco de curva *abierta*. Luego se trata el caso de dos variables

$$f(z, w) = \int_0^1 \int_0^1 e^{-xz-yw} \varphi(x, y)\, dx\, dy.$$

En la segunda parte, se inicia el estudio de la transformada de Laplace en el dominio de la *variable compleja dual*; es decir, de la correspondencia definida por la integral convergente

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-xz} \varphi(x)\, dx$$

en donde: $z = x + ky$, siendo k la *unidad imaginaria dual* y $f(z)$ una función compleja de la variable dual z. Luego se considera el caso de las integrales dobles convergentes

$$f(z, w) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-xz-wy} \varphi(x, y)\, dx\, dy.$$

Finalmente en la tercera parte se estudia una nueva cuestión: el problema de los *momentos factoriales*.

3. *Definiciones.* — Dada una función $\varphi(x)$ acotada e integrable Lebesgue en el intervalo $(0,1)$, la integral definida

$$f(z) = \int_0^1 e^{-tz} \varphi(t)\, dt$$

define en todo el plano de la variable compleja $z = x + iy$, una función compleja de z que llamaremos la *transformada limitada* de Laplace de la función $\varphi(t)$ o, simplemente, *transformada limitada* (L_1), e indicaremos con la notación

$$f(z) = L_1[\varphi(x)]$$

A las funciones $\varphi(x)$ y $f(z)$ las denominaremos *función generatriz* L, y *función determinante* L_1 respectivamente.

La función $f(z)$ es holomorfa en todo el plano. En efecto; sea C un contorno cerrado cualquiera del plano de la variable z ; se tiene

$$\int_c f(z)\,dz = \int_c dz \int_0^1 e^{-xz}\,\varphi(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \varphi(x)\,dx \int_c e^{-xz}\,dz,$$

y puesto que e^{-xz} es función holomorfa de z, resulta por el teorema de Cauchy

$$\int_c e^{-xz}\,dz = 0$$

por tanto

$$\int_c f(z)\,dz = 0;$$

luego, en virtud del teorema de Morera, la $f(z)$ es holomorfa en el interior de C, por tanto en todo el plano.

4. *Desarrollo tayloriano.* — Puesto que

$$e^{-xz} = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{(xz)^n}{n!}$$

y como la convergencia es uniforme para todo z del plano y x del intervalo (0,1); se tiene

$$f(z) = \int_0^1 e^{-xz} \varphi(x)\, dx$$

$$= \int_0^1 \varphi(x) \left(\sum_0^\infty (-1)^n \frac{(xz)^n}{n!} \right) dx$$

$$= \sum_0^\infty (-1)^n \frac{z^n}{n!} \int_0^1 x^n \varphi(x)\, dx$$

Es decir

$$f(z) = \sum_0^\infty (-1)^n a_n \frac{z^n}{n!} \qquad [2]$$

donde

$$a_n = \int_0^1 x^n \varphi(x)\, dx\,.$$

La función $f(z)$ es, por tanto, una función trascendente entera del llamado *tipo exponencial* (1). Constituyen las funciones *asociadas* de M. Borel de gran importancia en su teoría de la sumabilidad de las series divergentes.

La sucesión

$$a_n = \int_0^1 x^n \varphi(x)\, dx \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad [1]$$

está perfectamente determinada cuando se da la función generatriz $\varphi(x)$. El problema recíproco que consiste en *determinar una función única* $\varphi(x)$ *que satisfaga a la condición* [1] *cuando se da la sucesión de números* $\{a_n\}$, llamaremos *problema de los momentos de Le-Roy* (2) Hausdorff.

(1) Polya: *Math. Anal.* t. 89, p. 186; R. Paley y N. Wiener, *Fourier Transforms in the complex domain,* Americ. Math. Soc. V. XIX (1934) pág. 68. (Véase en particular el teorema X, pág. 12).

(2) Esta cuestión aparece por primera vez, en el problema tratado por M. Le-Roy, de la representación de una función analítica por integrales del tipo

$$f(z) = \int_0^1 \varphi(x) \,.\, A(x, z)\, dx.$$

F. Hausdorff y Poyla [1] han estudiado esta cuestión fundamental en el caso más general

$$\mu_n = \int_0^1 u^n \, d\, X(u) \,, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots$$

donde la integral está tomada en el sentido de Stieljes. L. Amoroso ha dado la condición necesaria y suficiente para que este problema de los momentos sea resuelto.

La solución de este problema nos permite representar toda función del tipo exponencial, mediante una integral de Laplace limitada.

En efecto; sea

$$f(z) = \sum_0^\infty (-1)^n a_n \frac{z^n}{n!}$$

una función del tipo exponencial, y sea $\varphi(x)$ la solución de los momentos correspondientes a la sucesión

$$a_n = \int_0^1 x^n \varphi(x)\, dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

se tiene

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!} \int_0^1 x^n \varphi(x)\, dx$$

$$= \int_0^1 \varphi(x) \left(\sum_0^\infty \frac{(xz)^n}{n!} \right) dx$$

es decir

$$f(z) = \int_0^1 e^{-xz} \varphi(x)\, dx$$

5. *Propiedades.* — I. *Si la función $\varphi(x)$ tiene por transformada L_1 a $f(z)$, la función $x^n \varphi(x)$ tiene por transformada L_1* a $(-1)^n f^{(n)}(z)$.

En efecto; sea

$$f(z) = \int_0^1 e^{-xz} \varphi(x)\, dx,$$

(1) *Summations methoden und Momentfolgen, Math. Zeits* (9), (1921), 74, 280; *Math. Z.* 1920, p. 177.
Ann. Toulouse (2) (2) 1900.

como la función $f(z)$ compleja de la variable z es holomorfa, sus derivadas sucesivas existen y se obtienen derivando bajo signo integral; es decir

$$f'(z) = \int_0^1 e^{-xz} (-x) \varphi(x) \, dx$$

$$f''(z) = \int_0^1 e^{-xz} x^2 \varphi(x) \, dx,$$

en general

$$f^{(n)}(z) = (-1)^n \int_0^1 e^{-xz} x^n \varphi(x) \, dx.$$

II. Sea

$$f(z) = \int_0^1 e^{-xz} \varphi(x) \, dx$$

y supongamos que $\varphi(z)$ sea derivable en $(0,1)$, entonces la integración por parte nos da

$$f(z) = -\frac{1}{z}[\varphi(1) e^{-z} - \varphi(0)] + \frac{1}{z}\int_0^1 e^{-xz} \varphi'(x) \, dx$$

de donde

$$z f(z) = \int_0^1 e^{-xz} \varphi'(x) \, dx + \varphi(0) - \varphi(1) e^{-z}$$

Si la $\varphi(x)$ admite derivadas hasta el orden n, se puede escribir

$$z^2 f(z) = \int_0^1 e^{-xz} \varphi''(x) \, dx + [\varphi(1) z - \varphi'(1)] e^{-z} + \\ + [\varphi(0) z + \varphi'(0)]$$

y en general, resulta la expresión

$$z^n f(z) = \int_0^1 e^{-xz} \varphi^{(n)}(x) \, dx + P_{n-1}(z) e^{-z} + Q_{n-1}(z)$$

donde $P_{n-1}(z)$ y $Q_{n-1}(z)$ son dos polinomios en z de grado $n-1$.

De aquí resulta la propiedad: *Si la generatriz $\varphi(x)$ es derivable en el intervalo $(0,1)$ la determinante L_1 de $\varphi^{(n)}(x)$ es igual a la determi-*

nante $f(z)$ *de* $\varphi(x)$ *multiplicada por su variable* z, *salvo un término aditivo de la forma*

$$P_{n-1}(z)\, e^{-z} + Q_{n-1}(z)\,.$$

Vamos a demostrar las propoiciones siguientes relativas a la suma, producto y cociente de dos transformadas $L\,(0,1)$.

III. Consideremos las transformadas

$$f(z) = \int_0^1 e^{-xz}\, \varphi(x)\, dx, \qquad [1]$$

$$g(z) = \int_0^1 e^{-xz}\, \psi(x)\, dx \qquad [2]$$

Puesto que

$$f(z) \pm g(z) = \int_0^1 e^{-xz}\, \Phi(x)\, dx$$

donde

$$\Phi(x) = \varphi(x) \pm \psi(x)$$

resulta:

La suma (diferencia) *de dos transformadas* L_1, *es una transformada* L_1, *cuya generatriz es la suma* (diferencia) *de las generatrices de los primeros.*

IV. Si multiplicamos las integrales [1] y [2] resulta

$$f(z)\, g(z) = \int_0^1 e^{-xz}\, \varphi(x)\, dx \int_0^1 e^{-xz}\, \psi(y)\, dy =$$

$$= \iint_D e^{-z(x+y)}\, \varphi(x)\, \psi(y)\, dx\, dy$$

la integral doble está tomada en el cuadrado D cuyos vértices son: (0,0), (0,1), (1,1) y (0,1).

Por otra parte,

$$\iint_D e^{-z(x+z)}\, \varphi(x)\, \psi(y)\, dx\, dy = 2 \iint_T e^{-(x+y)}\, \varphi(x)\, \varphi(y)\, dx\, dy.$$

donde T es el triángulo $O\,(0,0)$, $A\,(1,0)$, $B\,(0,1)$; y haciendo el cambio de variables

$$x + y = \xi \quad , \quad y = \xi\,\eta$$

es decir

$$x = \xi\,(1 - \eta) \quad , \quad y = \xi\,\eta.$$

Al dominio T del plano xy, corresponde en el plano ξ, η un cuadrado $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ y $(0,1)$ y como el jacobiano de la sustitución vale: $\tau = \xi$; se tiene entonces

$$\iint_T e^{-(x+y)}\,\varphi\,(x)\,\psi\,(y)\,dx\,dy = \iint_R e^{-\xi z}\,\xi\,\varphi\,[\xi\,(1-\eta)]\,\psi\,(\xi\,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

$$= \int_0^1 e^{-\xi z}\,\xi\,d\,\xi \int_0^1 \varphi\,[\xi\,(1-\eta)\,\psi\,(\xi\,\eta)\,d\,\eta$$

Poniendo: $\xi = t$, se puede escribir

$$\iint_T e^{-(x+y)z}\,\varphi\,(x)\,\psi\,(y)\,dx\,dy = \int_0^1 e^{-tz}\,dt \int_0^t \varphi\,(t-y)\,\varphi\,(y)\,dy$$

por tanto

$$f\,(z)\;\;y\,(z) = \int_0^1 e^{-tz}\,\Phi\,(t)\,dt$$

donde

$$\Phi\,(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \varphi\,(t-y)\,\psi\,(y)\,dy. \qquad [3]$$

Luego: *El producto de dos transformadas L_1 es una transformada L_1, que tiene como determinante L_1 el producto de las determinantes de sus factores y cuya generatriz $\varphi\,(x)$ está dada por la relación* [3].

V. Llamaremos *cociente* de las transformadas [1] y [2]

$$\frac{g\,(z)}{f\,(z)} = \frac{\int_0^1 e^{-xz}\,\varphi\,(x)\,dx}{\int_0^1 e^{-xz}\,\psi\,(x)\,dx}$$

a toda transformada L_1

$$F(z) = \int_0^1 e^{-xz}\, \omega(x)\, dx,$$

tal que multiplicada por la $g(z)$ sea igual a la $f(z)$; es decir

$$\int_0^1 e^{-xz}\, \varphi(x)\, dx = \int_0^1 e^{-xz}\, \varphi(x)\, dx \,.\int_0^1 e^{-xz}\, \omega(x)\, dx$$

Haciendo el producto del segundo miembro, la relación anterior se puede escribir

$$\int_0^1 e^{-xz}\, \varphi(x)\, dx = \int_0^1 e^{-xz} \left[\frac{1}{2}\int_0^x \psi(x-y)\, \omega(y)\, dy\right] dx$$

de donde resulta, según un conocido teorema de Lerch-Vitali

$$(\mu) \,.\qquad 2\,\varphi(x) = \int_0^x \psi(x-y)\, \omega(y)\, dy\,,$$

ecuación integral de Volterra de segunda especie la cual nos determina la función incógnita $\omega(y)$ generatriz del cociente. El *núcleo* de esta ecuación: $\psi(x-y)$ es del *tipo permutable* [1].

Por tanto: *el cociente de dos transformadas L_1 es una transformada L_1 que tiene como determinante L_1 el cociente de sus términos y cuya generatriz se determina mediante la ecuación integral de Volterra* (μ).

6. *El problema de inversión.* — Dada la correspondencia entre $f(z)$ y $\varphi(z)$, definida por la relación

$$f(z) = \int_0^1 e^{-xz}\, \varphi(x)\, dx \qquad [1]$$

(1) V. Volterra, *Leçons sur les équations intégrales...* (Gauthier-Villars, París, 1923), p. 52 y 150: Volterra (V) et Peres (J), *Lecons sur la composition et la fonctions permutables* (Gauthier-Villars, 1924): y *Théorie générale des Fonctionnells.* T. I, Gauthier-Villars, París, 1936.

Este tipo de ecuación integral, la designa el prof. G. Doetsch «*Faltung typus*».

el problema de la inversión consiste en determinar la función $\varphi(x)$ cuando se da la $f(z)$. Se trata, entonces, de resolver la ecuación integral de primera especie [1] donde $f(z)$ es la función dada y $\varphi(x)$ la función incógnita.

La solución de esta importante cuestión se puede obtener mediante las funciones fundamentales de E. Schmit y los métodos conocidos de resolución de tales ecuaciones (1).

Recientemente el prof. Picone ha propuesto, una fórmula de inversión de integrales de este tipo (*R. Acc. Lincei*, 6, 21 (1935).

7. *Integral doble.* — El estudio de las propiedades de la correspondencia funcional definida por la integral doble de Laplace

$$f(z, w) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-xz-yw} \varphi(x, y)\, dx\, dy, \qquad [1]$$

y de la inversión, nos hemos ocupado en otra oportunidad (2). Vamos a estudiar aquí, la integral doble

$$f(z, w) = \int_0^1 \int_0^1 e^{-xz-yw} \varphi(x, y)\, dx\, dy, \qquad [2]$$

donde z y w son dos variables complejas independientes.

Dada la función real $\varphi(x, y)$ de dos variables reales x e y acotada e integrable en el cuadrado $(0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1)$ (función generatriz), la integral doble [2] define una función $f(z, w)$ de dos variables complejas: $z = \xi_1 + i\,\xi_2, \quad w = \eta_1 + i\,\eta_1$ (función determinante.

Representemos el punto complejo (z, w) por un punto real del S_4 mediante sus coordenadas $(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$, respecto a un sistema cartesiano-rectangular. *La función $f(z, w)$ es holomorfa en toda región de S_4.*

(1) Véase: E. Goursat, *Cours d'Analyse Mathématique*, T. III, París (1905).

(2) J. C. Vignaux, *Sobre la teoría de las funciones determinantes de dos variables*, Soc. Cient. Argentina, t. CXII, p. 357 (1931); *Sulla transformazione di Laplace di due variabili* (R. Accademia N. dei Lincei (Roma) 17 ag. 1933; *Un teorema sulle integrali doppie di Laplace* (R. Acc. N. dei Lincei, junio 1933) y *Bull. Soc. Royale des Sc. di Liege*, nº 5 (1933).

En efecto; si σ es una superficie cerrada bilateral de S_4, se tiene

$$\iint_\sigma f(z, w)\, dx\, dw = \iint_\sigma dx\, dw \int_0^1 \int_0^1 e^{-xz-yw}\, \varphi(x, y)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \varphi(x, y)\, dx\, dy \iint_\sigma e^{-xz-yw}\, dz\, dw$$

y como la función

$$e^{-xz-yw}$$

es holomorfa respecto a z y w para todo $(0 \leq x \leq 1,\quad 0 \leq y \leq 1)$, resulta por el teorema de Cauchy-Poincaré

$$\iint_\sigma e^{-xz-yw}\, dz\, dw = 0$$

por tanto,

$$\iint_\sigma f(z, w)\, dz\, dw \equiv 0$$

luego por el teorema de Morera-Volterra, la función

$$f(z, w)$$

es holomorfa en el dominio de S_4 limitado por σ.

8. El desarrollo tayloriano se obtiene del siguiente modo. Puesto que

$$e^{-xz-yw} = \sum_0^\infty \sum_0^\infty (-1)^{m+n} \frac{(z\,x)^m}{m!} \frac{(y\,w)^m}{n!}$$

uniformemente para (x, y de 0,1) y (z, w) de S_4; se tiene

$$f(z, w) = \int_0^1 \int_0^1 \varphi(x, y) \left[\sum_0^\infty \sum_0^\infty (-1)^{m+n} \frac{(x\,z)^m}{m!} \cdot \frac{(y\,w)^n}{n!} \right] dx\, dy$$

$$= \sum_0^\infty \sum_0^\infty (-1)^{m+n} \frac{z^m}{m!} \frac{w^n}{n!} \int_0^1 \int_0^1 x^m\, y^n\, \varphi(x, y)\, dx\, dy$$

Si ponemos

$$a_{m\,n} = (-1)^{m+n} \int_0^1 \int_0^1 x^m\, y^n\, \varphi\,(x,\, y)\, dx\, dy$$

la igualdad anterior se puede escribir

$$f\,(z,\, w) = \sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{m,\, n} \frac{z^m}{m!} \frac{w^n}{n!}$$

y esta serie doble converge en todo punto de S_4. La $f\,(z,\, w)$ es una trascendente doble del tipo exponencial que tiene importancia en la sumación de Borel, de las series dobles.

9. Las derivadas parciales sucesivas de la función $f\,(z,\, w)$ se obtienen derivando la función dentro del signo integral doble, como en el caso de una variable. Resulta entonces

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \int_0^1 \int_0^1 e^{-xz-yw}\, (-1)\, x\, \varphi\,(x,\, y)\, dx\, dy$$

$$\frac{\partial f}{\partial w} = \int_0^1 \int_0^1 e^{-xz-yw}\, (-1)\, y\, \varphi\,(x,\, y)\, dx\, dy$$

En general

$$\frac{\partial^n f}{\partial z^n} = (-1)^n \int_0^1 \int_0^1 e^{-xz-yw}\, x^n\, \varphi\,(n,\, y)\, dx\, dy$$

$$\frac{\partial^m f}{\partial w^m} = (-1)^m \int_0^1 \int_0^1 e^{-xz-yw}\, y^m\, \varphi\,(x,\, y)\, dx\, dy.$$

y

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial z^m\, \partial w^n} = (-1)^{m+n} \int_0^1 \int_0^1 e^{-xz-yw}\, x^n\, y^m\, \varphi\,(x,\, y)\, dx\, dy$$

$$(m,\, n = 0,\, 1\,,\, 2,\, \ldots).$$

Sea $f\,(z,\, w)$ una función compleja del tipo exponencial

$$f\,(z,\, w) = \sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{m\,n} \frac{z^m}{m!} \frac{w^n}{n!} \qquad [1]$$

para la cual se tiene

$$a_{m,n} = (-1)^{m+n} \int_0^1 \int_0^1 x^m y^n \varphi(x, y)\, dx\, dy \qquad (m, n = 0.\ 1, 2, \ldots)$$

enconces la función dada [1] se puede representar en todo el plano por una integral limitada de Laplace; puesto que

$$f(z, w) = \sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{m,n} \frac{z^m}{m!} \frac{w^n}{n!} =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \varphi(x, y) \left(\sum_0^\infty \sum_0^\infty (-1)^{m+n} \frac{(x z)^m}{m!} \cdot \frac{(y w)^n}{n!} \right.$$

es decir

$$f(z, w) = \int_0^1 \int_0^1 \varphi(x, y)\, e^{-xz-yw}\, dx\, dy.$$

Se plantea aquí, de modo natural, un problema de los momentos dobles análogo al resuelto por Hausdorff; problema que nos limitaremos a enunciar.

Dada la sucesión doble $a_{m,n}$ determinar una función única $\varphi(x, y)$ de las variables x e y tal que

$$a_{m,n} = \int_0^1 \int_0^1 x^m y^n \varphi(x, y)\, dx\, dy \qquad (n, m = 0, 1, \ldots)$$

10. *Propiedades.* — Consideremos las dos integrales dobles

$$f(z, w) = \int_0^1 \int_0^1 e^{-xz-yw} \varphi(x, y)\, dx\, dy \qquad [1]$$

$$g(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 e^{-xy-yw} \psi(x, y)\, dx\, dy \qquad [2]$$

se tienen

$$F(z, w) = f(z, w) \pm g(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 e^{-xz-yw} \omega(x, y)\, dx\, dy$$

donde

$$\omega(x, y) = \varphi(x, y) \pm \psi(x, y)$$

es la generatriz de la determinante $F(z, w)$.

Si multiplicamos las integrales dobles [1] y [2], resulta

$$f(z) \cdot g(z) = \iiiint_D e^{-z(x+v)-w(u+v)} \varphi(x, y)\, \psi(u, v)\, dx\, dy\, du\, dv.$$

Esta integral múltiple, se transforma en la siguiente [1]

$$f(z) \cdot g(z) = \int_0^1 \int_0^1 e^{-xz-yw} \Phi(x, y)\, dx\, dy$$

donde

$$\Phi(x, —) = \frac{1}{2} \int_0^x \int_0^y \varphi(z - t, y - u)\, \psi(t, u)\, dt\, du$$

Esta función es el *producto integral* de dos integrales dobles [1] y [2].

II. La transformacion de Laplace de la variable compleja dual

El estudio de las funciones monógenas $f(z)$ de una variable compleja dual

$$z = x + ky$$

donde k representa la *unidad imaginaria dual* [1] ($k^2 = 0$), fué iniciada por E. Study en su obra (*Geometrie der Dinamen*).

Nos proponemos introducir aquí la noción de integral de Laplace de variable compleja dual. Estas integrales definen en todo su campo de convergencia, una función holomorfa dual.

Llamaremos integral de Laplace en el campo de la variable compleja dual, a la integral

$$\int_0^\infty e^{-tz} \varphi(t)\, dt \qquad [1]$$

donde t es una variable real ($t \geq 0$) y $\varphi(t)$ una función real de t, o, más general, una función compleja dual de la variable real t

$$\varphi(t) = \psi_1(t) + k\, \psi_2(t).$$

Esta integral define en todo el conjunto de los valores de z que resulta convergente, una función

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-zt} \varphi(t)\, dt$$

(1) J. C. Vignaux, *Sobre integrales de Laplace y de Stieljes asintóticas*. Anales de la Soc. Científica Argentina: t. CXXVI, 1938, pág. 14.

de la variable dual: $z = x + ky$ que llamaremos la *transformada de Laplace dual.*

El estudio de esta correspondencia se simplifica notablemente, si se tiene en cuenta la siguiente expresión para la relación [1]. Puesto que

$$e^{-tz} = e^{-tx} \cdot e^{-kty} = e^{-tx}(1 - k\,ty)$$

la [1] se puede escribir

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-tx}\,\varphi(t)\,dt + ky \int_0^\infty e^{-tx}(-t)\,\varphi(t)\,dt \qquad [2]$$

donde

$$\int_0^\infty e^{-tx}\,\varphi(t)\,dt \quad [3] \quad , \quad \int_0^\infty e^{-tx}(-t)\,\varphi(t)\,dt \qquad [4]$$

son integrales de Laplace de la variable real x.

El estudio de la región de convergencia de la transformada [1] queda así reducido al estudio de la convergencia de las integrales [3] y [4] de la variable real x; y su determinación se puede deducir del siguiente modo:

Sea λ la abscisa de convergencia de la integral de Laplace [3], ésta se puede determinar por la fórmula de Fugiwara (¹).

$$\lambda = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\log \left| \int_0^t \varphi(u)\, e^{-u^2 - t^2}\, du \right|}{t}$$

(¹) Existen otras fórmulas que permiten determinar λ: por ejemplo la de Landau-Pincherle.

$$\text{Si } \lambda \geq 0 \quad \lambda = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\lg \left| \int_0^t \varphi(u)\, du \right|}{} \quad , \quad \lambda < 0 \quad \lambda = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\left| \int_t^\infty \varphi(u)\, du \right|}{t} \; ;$$

la fórmula de Kojima

$$\lambda = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\log \left| \int_{[t]}^t \varphi(u)\, du \right|}{t}$$

que comprende a la de Landau-Pincherle.

Cuando la función $\varphi(t)$ es entera M. Borel da la fórmula simple

$$\lambda = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\log |\varphi(t)|}{t} \cdot$$

Como la abscisa de convergencia λ' de la integral [4] es: $\lambda' \leq \lambda$(1); resulta entonces que las integrales de Laplace [3] y [4] convergen en el semi-eje real: $x > \alpha$, y definen las funciones *determinantes reales* $g(x)$ y $h(x)$

$$g(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\, \varphi(x)\, dt \quad , \quad h(x) = g'(a) = \int_0^\infty e^{-xt}\, (-t)\, \varphi(t)\, dt,$$

que admiten derivadas de todos los órdenes para todo $x > \lambda$.

$$g^{(n)}(x) = (-1)^n \int_0^\infty e^{-xt}\, \varphi(t)\, dt.$$

La relación [2] nos permite concluir que la integral dual de Laplace

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\, \varphi(t)\, dt$$

converge en el semi-plano: $R(z) > \lambda$. Esta región llamaremos *semi-plano de convergencia,* y al *número* λ, *la abscisa de convergencia de la misma.*

En todo este dominio esta integral define una función $f(z)$ de la variable compleja dual continua, de la forma

$$(\alpha) \qquad f(z) = g(x) + k\, y\, g'(x);$$

y puesto que las funciones $g(x)$ y $g'(x)$ son derivables para $x > \lambda$, la función $f(z)$ es *holomorfa dual* en todo su semi-plano de convergencia. Además sus derivadas sucesivas se determinan por la relación

$$f^{(n)}(z) = g^{(n)}(x) + k\, y\, g^{(n+1)}(x)\,,$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Se puede probar también esta propiedad del siguiente modo: Consideremos en el semiplano $R(z) > \lambda$ una curva cerrada C cuyo

(1) CIBRARIO, *Loc. cit.;* DOETSCH, *loc. cit.*

contorno no tenga ningún punto común con la recta de convergencia $x = \lambda$; integrando $f(z)$ sobre C resulta

$$\int_C f(z)\, dz = \int_C dz \int_0^\infty e^{zt}\, \varphi(t)\, dt = \int_0^\infty \varphi(t)\, dt \int_C e^{-zt}\, dz,$$

y como la función: e^{-zt} es holomorfa dual su integral sobre C es nula [1]; de donde resulta

$$\int_C f(z)\, dz = 0$$

y por tanto la $f(z)$ es holomorfa dual.

12. *Propiedades.* — Consideremos las transformadas de Laplace dual

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-tz}\, \varphi(t)\, dt = g(x) + ky\, g'(x) \qquad [1]$$

$$f_1(z) = \int_0^\infty e^{-tz}\, \varphi_1(t)\, dt = g_1(x) + ky\, g_1'(x). \qquad [2]$$

De aquí resulta inmediatamente

$$f(z) + f_1(z) = \int_0^\infty e^{-tz}\, \psi(t)\, dt$$

donde

$$\psi(t) = \varphi(t) + \varphi_1(t)\,.$$

Hagamos el producto de las integrales (1) y (2), se tiene

$$[1] \quad f(z)\,.\,f_1(z) = g(x)\, g_1(x) + ky\,[g(x)\, g_1'(x) + g_1(x)\, g'(x)]$$

$$= g(x)\, g_1(x) + ky\, D\,[g(x)\,.\,g_1(x)].$$

(1) J. C. VIGNAUX, *Sur les fonctions poliggènes d'une et de plusieurs variables duales*...... Rendic. della R. Accad. N. del Lincei, V. XXVII, p. 21, giugno 1938 (I Nota; Contribución al Estudio de las Ciencias, V. I E 3, 1936 y V. I E. 5, 1938.

Aplicando el teorema de Doetsch relativo al producto de dos integrales de Laplace, se tiene

$$g(x)\,g_1(x) = \int_0^\infty e^{-xt} \left[\int_0^t g(u)\,g_1(t-u)\,du \right] dt$$

De aquí se deduce

$$D\,[g(x)\,.\,g_1(x)] = \int_0^\infty e^{-xt} \left[(-t) \int_0^t g(u)\,g_1(t-u)\,du \right] du$$

por tanto la [1] resulta

$$f(z)\,f_1(z) = \int_0^\infty e^{-xt} \left[\int_0^t g(u)\,g_1(t-u)\,du \right] dt +$$

$$+ ky \int_0^\infty e^{-xt} \left[-t \int_0^t g(u)\,g_1(t-u)\,du \right] dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-xt}\,(1-k\,y\,t) \left[\int_0^t g(x)\,g_1(t-u)\,du \right] dt$$

y teniendo presente la relación

$$e^{-xt}\,(1-k\,y\,t) = e^{-xt}\,.\,e^{-k\,y\,t} = e^{-t\,(x+ky)}$$

resulta finalmente

$$f(z)\,.\,f_1(z) = \int_0^\infty e^{-tz}\,\psi(t)\,dt \qquad [1]$$

donde

$$\psi(t) = \int_0^t g(u)\,g_1(t-u)\,dt = g(t)\,g_1(t)$$

es el producto integral de $g(t)$ y $g_1(t)$.

La relación [1] constituye la extensión del teorema de Doetsch a las integrales de Laplace duales.

Sea

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-tz}\,\varphi(t)\,dt = g(x) + ky\,g'(x). \qquad [1]$$

en un cierto semi-plano de convergencia, y supongamos que su generatriz $\varphi(t)$ sea derivable en el intervalo $(0, \infty)$.

La transformada de $\varphi'(t)$ será

$$\int_0^\infty e^{-tz}\,\varphi'(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-tz}(1 - kyt)\,\varphi'(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-tz}\,\varphi'(t)\,dt + ky\int_0^\infty(-t)\,e^{-tz}\,\varphi'(t)\,dt$$

Aplicando a la primera integral de Laplace que figura en el segundo miembro la relación bien conocida,

$$\int_0^\infty e^{-tz}\,\varphi'(t)\,dt = x\,g(x) - \varphi(0)$$

la igualdad anterior se puede escribir

$$\int_0^\infty e^{-tz}\,\varphi'(t)\,dt = x\,g(x) - \varphi(0) + ky\,D_x[x \,.\, g(x)]$$

$$= x\,g(x) + ky\,[g(x) + x\,g'(x)] - \varphi(0)$$

$$= (x + ky)\,(g(x) + ky\,g'(x) - \varphi(0).$$

luego

$$\int_0^\infty e^{-tz}\,\varphi'(t)\,dt = z\,f(z) - \varphi(0)$$

relación análoga a la de las funciones determinantes ordinarias.

Consideremos nuevamente la relación 1] y veamos cuál es la transformada dual de la generatriz: $t\,\varphi(t)$. Se tiene

$$\int_0^\infty e^{-zt}\,t\,\varphi(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-tz}(1 - kyt).\,t\,\varphi(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-tz}\,t\,\varphi(t)\,dt + ky\int_0^\infty(-t)\,t\,\varphi(t)\,dt$$

Pero se tiene, según una relación conocida

$$-g'(x) = \int_0^\infty e^{-tz}\,t\,\varphi(t)\,dt$$

$$g''(x) = \int_0^\infty e^{-tz}(-t)\,t\,\varphi(t)\,dt$$

luego

$$\int_0^\infty e^{-zt}\, t\, \varphi(t)\, dt = -g'(x) + ky\, g''(x)$$
$$= -f'(z)$$
$$= \frac{d}{dz}\int_0^\infty e^{-zt}\, t\,.\,\varphi(t)\, dt\,;$$

propiedad ésta análoga a las de las funciones determinantes ordinarias.

13. *Integral doble de Laplace.* — Sea la integral

$$f(z, z') = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-uz-vz'}\, \varphi(u, v)\, du\, dv$$

donde $\varphi(u, v)$ es una función dada de las variables reales en u y v; $z = x + ky$ y $z' = x' + ky'$, dos variables complejas duales independientes.

Puesto que

$$e^{-uz-vz'} = e^{-ux}\,(1 - k\,u\,y)\,.\,e^{-vx'}\,(1 - k\,v\,y')$$
$$= e^{-ux-vx'}\,[1 - k\,(u\,y + v\,y')]$$

la relación [1] se puede escribir

$$f(z, z') = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ux-vx'}\, \varphi(u, v)\, du\, dv) + \qquad [1]$$
$$+ ky \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ux-vx'}\,(-u)\,\varphi(u, v)\, du\, dv$$
$$+ ky' \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ux-vx'}\,(-v)\,\varphi(u, v)\, du\, dv$$

Sea λ y λ' un sistema de abscisas asociadas de convergencia de la integral doble de Laplace

$$g(x, x') = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ux-vx'}\, \varphi(u, v)\, du\, dv;$$

las otras dos integrales dobles que figuran en el segundo miembro de la [1] convergen también en la misma región; se tiene

$$g'_x(x, x') = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ux-vx'} (-u)\, \varphi(u, v)\, du\, dv$$

$$g'_{x'}(x, x') = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ux-vx'} (-v)\, \varphi(u, v)\, du\, dv$$

luego la [1] se puede escribir

$$f(z, z') = g(x, x') + k y g'_x(x, x') + k y' g'_{x'}(x, x') . \qquad [2]$$

Como las funciones $g(x, x')$, $g'_x(x, x')$ y $g'_{x'}(x, x')$ son holomorfas en los semiejes asociados: ($x > \lambda$, $x' > \lambda'$), la función $f(z, z')$ definida por la expresión [2] es función *holomorfa dual* de las variables *complejas duales,* en los *semiplanos asociados*

$$R(z) > \lambda \quad , \quad R(z') > \lambda'$$

Si ponemos

$$\overline{\lim_{t+u\to\infty}} \frac{\log e^{-pu} \left| \int_0^t \int_0^u e^{(x^2-t^2)+(y^2-u^2)}\, dx\, dy \right|}{t+u} = \psi(p)$$

entonces

$$\lambda = \psi(p) \quad , \quad \lambda' = p + \psi(p) \quad (-\infty < p < \infty)$$

es un sistema de abscisas asociadas de convergencia.

Las propiedades de esta integral doble se deducen a partir de la expresión [2] y razonando como en el caso de una variable.

III. SOBRE MOMENTOS FACTORIALES

14. El célebre problema llamado de los «momentos» de Stieltjes. consiste en determinar una función única $f(z)$ real e integrable en en el intervalo $(0, +\infty)$, tal que

$$a_n = \int_0^\infty x^n f(x)\, dx$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots)$$

cuando se da la sucesión a_n de números reales. Esta cuestión que se presenta en fundamentales capítulos de la matemática (sumación de series, funciones cuasianalíticas, Cálculo de Probabilidades,...) ha recibido una solución completa en los trabajos de Stieltjes (1), Borel (2), Le Roy (3), Hardy (4), Riesz (5) y Carleman (6).

El caso de límites finitos

$$a_n = \int_0^1 x^n f(x)\, dx$$

fué planteado por Le-Roy (7) y Hadamard, con motivo del problema de la prolongación analítica de funciones dadas por su desarrollo tayloriano, mediante integrales definidas, y resuelto por Ausdorff (8). Finalmente, el caso

$$a_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)\, dx$$

fué tratado y resuelto por Hamburger (9) y Pòlya (10).

El problema de los momentos ha sido extendido al campo complejo

$$a_n = \int_C z^n f(z)\, dz \qquad (n\ 0, 1, 2, \ldots)$$

donde c es un arco *de curva abierta.* L. Amoroso (12) ha enunciado la

(1) « *Recherches sur les fractions continues* ». Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse. 1894.

(2) « *Mèmoir sur les series divergentes* ». Annales Sc. de l'école normale suferiense (1899).

(3) « *Sur les series divergentes* ». Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse. (1900).

(4) *Messenger of Math.* (1917).

(5) « *Sur le problème des moments.* Arkif för matematik. T. 17. (1923).

(6) « *Les fonctions quasianalytiques* ». (1926).

(7) *Loc. cit.*

(8) F. Hausdorff, F. - *Momentfunktionen, Math. Zeits,* p. 286.

(9) Hambruger, - *Math. Zeits,* 4 1919. p. 186, 212; *Math. Ann.* T. 81. (1920).

(10) G. Polya, *Math. Zeits,* 1920, p. 177.

condición necesaria y suficiente para que el problema de los momentos sea resuelto [1].

Cuando la curva c es cerrada, la solución es inmediata y ella está contenida en los resultados fundamentales de Cauchy sobre las series de potencias.

Aquí me propongo plantear un nuevo problema que llamaremos de los *momentos factoriales* y que consiste en la cuestión siguiente:

Dada la sucesión $\{ a_n \}$ *y una curva c del plano de la variable compleja* z, *determinar una función holomorfa única* $f(z)$ *que verifique la condición*

$$a_n = \int_C z^{(n} f(z)\, dz \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

donde

$$z^{(n} = z(z+1)\ldots(z+n-1)$$

es la potencia factorial de z.

Damos aquí, una solución simple de esta cuestión, en el caso que la curva C sea cerrada, mediante una serie de facultad convergente.

16. Momentos de Cauchy. — Sea $f(z)$ una función holomorfa en los puntos exteriores de un dominio D, limitado por la curva cerrada C que contiene el origen en su interior, y nula en el infinito, la integral de Cauchy nos da

$$f(z) = \frac{1}{2\pi_i} \int_C \frac{f(t)\, dt}{z-t}, \qquad [1]$$

para todo punto z exterior del dominio D.

Desarrollando el núcleo $\dfrac{1}{z-t}$ en serie de potencias de $\dfrac{1}{z}$; se tiene

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{t}{z}} = \sum_0^\infty \frac{t^n}{z^{n+1}}$$

(1) *Reud, della R. Acc. dei Lincei,* V. XIX (1920); *Bolletino della U. Mat. Italiana.* N. 2 (1924).

y sustituyendo en la relación [1] resulta

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}} \qquad [2]$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C t^n f(t)\, dt \quad , \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

y la serie [2] converge para todo z tal que

$$|z| > R = máx\, |t|$$

cuando t recorre el contorno c.

La sucesión

$$c_n = \int_C t^n f(t)\, dt = 2\pi i\, a_n \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

son los *momentos de la función* $f(z)$ *sobre el contrno cerrado* c.

Si se da ahora la sucesión $\{c_n\}$ y se fija el contorno cerrado c y además se verifica que

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} = R$$

sea *finito* y $R \geq$ máx $|t|$ sobre c ; entonces la función $f(z)$ está perfectamente determinada por su desarrollo convergente

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{c_n}{z^{n+1}}$$

para todo $|t| > R$. Como la función $f(z)$ así determinada es única, el problema de los momentos de Cauchy queda resuelto.

17. Momentos factoriales. — Consideremos nuevamente la integral de Cauchy [1] ; su núcleo $\frac{1}{z-t}$ se puede escribir en la forma

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{z} + \frac{t}{z(z+1)} + \ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{z(z+1)\ldots(z+n)} +$$

$$+ \frac{t(t+1)\ldots(t+n)}{z(z+1)\ldots(z+n)} \cdot \frac{1}{z-t}$$

Sustituyendo este valor en la [1], se tiene

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)\,dt}{z-t} =$$

$$= \sum_0^n \frac{1}{z(z+1)\dots(z+n)}\,\frac{1}{2\pi i}\int_C t(t+1)\dots(t+n-1)\,f(t)\,dt$$

donde

$$R_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{t(t+1)\dots(t+n)}{z(z+1)\dots(z+n)}\,\frac{f(t)}{z-t}\,dt\,.$$

Es decir,

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{a_n}{z(z+1)\dots(z+n)} + R_n$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(t)\,t^{(n}\,dt \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Pongamos ahora

$$\sigma = \textit{máx}\; R\,(t)$$

cuando el punto t recorre el contorno C. Para todo punto z del semi plano: $R\,(z) \geq \sigma + \delta$, $(\delta > 0)$ se tiene

$$|R_n| < \frac{1}{2\pi}\,\frac{M\,.\,l}{\delta}\,.\,\prod_0^n \left|\frac{t+n}{z+n}\right|$$

donde M es el extremo superior del módulo de $f(z)$ y l la longitud del contorno C.

Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

luego la función $f(z)$ está representada por la serie de facultad

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{A_n}{z(z+1)\dots(z+n)}$$

(1) Una aplicación interesante puede verse: Walsch, *Comp. Rendus,* Nº 1, 1924.

convergente en el semiplano: $R\ (z) > \sigma$ y cuyos coeficientes están dados por las integrales

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C t^{(n} f(t)\, dt \quad , \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

De aquí resulta que: *dada una función holomorfa en el exterior del contorno cerrado c y continua sobre c, su desarrollo en serie de facultad convergente, queda perfectamente determinada.*

Supongamos ahora, que se nos da la sucesión de los momentos factoriales $\{\alpha_n\}$

$$\alpha_n = \int_C t^{(n} f(t)\, dt = 2\pi i\, a_n$$

y el contorno cerrado C y además que se cumpla la condición

$$\lambda = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log |\alpha_n|}{\log n}$$

con λ finito y $\lambda \geq$ máx $R(t)$ cuando t recorre la curva c. Entonces la función $f(z)$ está determinada por el desarrollo en serie de facultad

$$f(z) = \sum^{\infty} \frac{\alpha_n}{z(z+1)\ldots(z+n)}$$

convergente en el semi plano: $R\ (z) > \lambda$, quedando de este modo resuelto el problema de los momentos factoriales para este caso.

18. Por ahora nos limitaremos a estas consideraciones, y dejamos planteada la cuestión de los momentos factoriales sobre una curva abierta, y el de los momentos factoriales del tipo Stieltjes

$$c_n = \int_0^{\infty} x^{(n} f(x)\, dx$$

o del tipo Le Roy-Hausdorff

$$c_n = \int_0^{1} x^{(n} f(x)\, dx$$

o del tipo Hambuger

$$c_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{(n} f(x)\, dx$$

Se puede generalizar también este problema considerando integrales de Stieltjes.

(Continuará)

HESPERIOIDEA ARGENTINA VIII

POR

KENNETH J. HAYWARD
F.R.E.S., F.R.G.S., F.Z.S.

Con la publicación de este trabajo puedo decir que, por fin, la tarea de estudiar los hespéridos argentinos conocidos hasta ahora, queda casi terminada. Este trabajo fué iniciado en enero de 1932, desde cuya fecha han sido tratados como argentinos no menos de 134 géneros y 386 especies, subespecies o formas (88 de las especies resultan nuevas para la ciencia).

Actualmente tengo en estudio 7 especies adicionales y existen en mi colección las hembras de 5 más (en su mayor parte aparentemente nuevas para la ciencia), cuyos machos no han sido descubiertos aún.

Así el número de formas argentinas conocidas hasta la fecha ha llegado a la imponente cifra de 398.

Aguna williamsi Hayw.

He recibido un segundo ejemplar de esta especie, también hembra, de El Dorado, Misiones (Bosq leg)..

Telegonus fulgor nov.

Difiere de la especie *fulgurator* Walsh solamente en que falta el área basal-costal blanca del ala posterior en su faz inferior. Los genitales de los machos son aparentemente iguales a los de la citada especie.

Holotipo ♂ en mi colección de Misiones, Argentina. Según mi amigo Sr. Bell, existen también dos ejemplares en la colección del American Museum of Natural History, Nueva York.

Telemiades xantho nov. (Fig. 1).

Color de fondo parduzco, cabeza, tórax, abdomen y toda la superficie superior de las alas cubiertos con pelos de color ocre-amarillento. Los palpos con muchos pelos amarillos, como también el pectus. Los pelos de las patas más bien dorados.

En el ala anterior los pelos ocre-amarillos son de menor intensidad hacia el borde, por lo cual esta parte del ala tiene una apariencia más oscura. Hay tres puntos dorados hialinos subapicales, el costal y el inferior en forma de un guión, el punto entre estos dos de la mitad de su largo y su lado próximo formando una línea recta con el borde próximo de los otros dos. En el disco del ala hay tres manchas

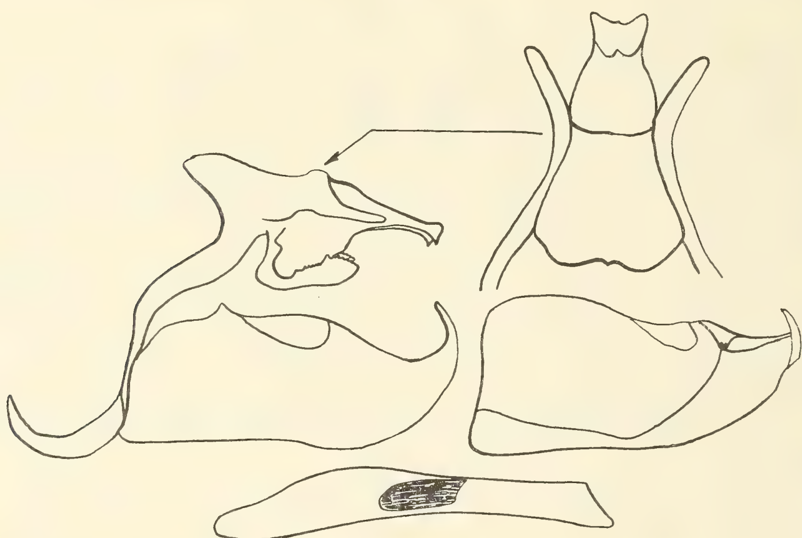


Fig. 1. — Genitalia de *Telemiades xantho* Hayw. (Holotipo ♂ Argentina).

doradas hialinas, una grande en la célula, excavada distalmente, otra cuadrada e igualmente grande debajo y un pequeño punto más distal. Las nervaduras son negruzcas y hay rastros de manchas oscuras en la segunda célula cubital a 1/2 y 2/3. El grupo de manchas hialinas está bordeado de color más obscuro.

En el ala posterior hay rastros de una línea irregular basal y otra postmediana de color pardo. Las orlas son de color pardo oscuro.

La faz inferior es de un color pardo oscuro, la base el ala anterior y su borde interior más claros y el diseño de puntos y manchas hialinos igual al de la faz superior. La mitad basal del área costal y la base del ala anterior con pelos amarillentos. Debajo de los puntos

subapicales se encuentra un punto pequeño oscuro, y hay un guión oscuro en el área clara del margen interior a 2/3.

En el ala posterior se ve claramente líneas oscuras basal, postbasal y postmediana y el borde del ala es del mismo color. En la base de la proyección caudal hay una mancha redondeada oscura. El pliegue anal es claro.

Holotipo ♂ de Misiones, Argentina, en mi colección.

Pellicia genoptila (Burm). (Fig. 2).

1878. *Hellas* (en error por *Helias*) *gonoptila* Burmeister, Descr. Phys. Rép. Arg. 5: 260.
1933. *Pellicia gonoptila* Hayward, Rev. Soc. Ent. Arg. 5: 232.

Aprovecho esta oportunidad para dar un dibujo de los genitales de *gonoptila* Burmeister.

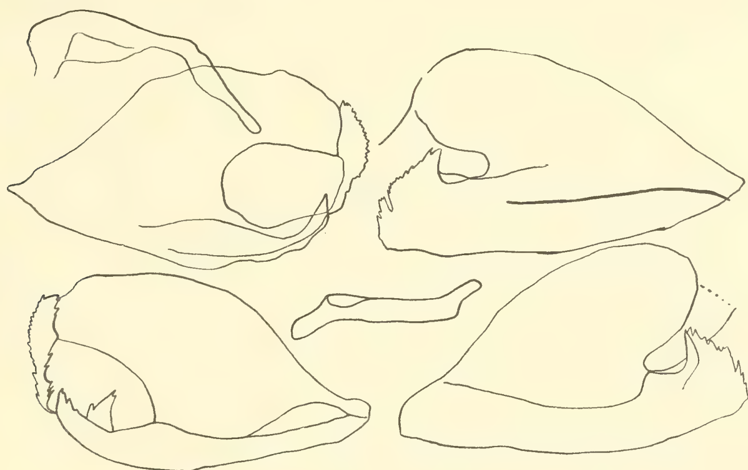


FIG. 2. — Genitalia de *Pellicia gonoptila* Burm. (Argentina).

Pellicia costimacula H. S.

1870. Herrich Schaffer, Corr-Bl. Zool-Min. Ver. Regensb. p. 160.

Expansión alar variable entre 33-35 mm.

Area costal y basal de las alas de color gris-violáceo en forma que las fajas oscuras son más resaltantes que en las demás especies de este género. La faja basal es débil y fina, la mediana ancha cuadrada y se extiende desde la costa del ala anterior hasta la mediana, sin unirse con la faja postdiscal que es angulada agudamente en su

parte superior. Las fajas basal y postmediana son continuadas en el ala posterior y la faja mediana de esta ala es completa. El borde de ambas alas es oscuro.

En la faz inferior el color de fondo es más claro con un leve brillo purpúreo y hay una área clara en el ápice del ala anterior. Además, el borde inferior del ala anterior y la mitad inferior del ala posterior son claros y las fajas del ala posterior son en forma de una serie de puntos obscuros en la parte clara del ala. Hay un dibujo de los genitales del macho en *Biol. Centr. Amer. Rhop.* 2.

Patria. — Desde Méjico hasta la Argentina, bastante común. En la Argentina se le ha hallado en Misiones.

Pellicia hersilia nov. (Fig. 3).

Expansión alar 26 mm.

El color de fondo es gris violeta. En el ala anterior se ven rastros de una faja oscura basal y hay una distinta faja postbasal. A $^1/_2$



Fig. 3. — Genitalia de *Pellicia hersilia* Hayw. (Holotipo ♂ Argentina).

costa hay otra faja más ancha que une en el disco del ala con la línea oscura antemarginal. Esta última línea es interrumpida hacia el ápice del ala donde está unida con la costa a $^3/_4$ por un puntito oscuro. El margen del ala es oscuro con rastros de una fina línea del color de fondo.

En el ala posterior hay un puntito oscuro en la célula y desde la base de la costa en forma curva hasta $^1/_2$ margen anal, hay una línea gruesa y oscura, sobrepuesta sobre la cual se encuentra un guión del color de fondo entre el punto de nacimiento de M3 y la analis inferior. Las orlas son de pardo oscuro.

La faz inferior es de color pardo, salpicada con escamas grises,

el diseño igual al de la faz superior, pero indistinto, el borde interior del ala anterior más claro.

Las válvulas de los genitales de los machos son prácticamente simétricas.

Holotipo ♂ de Metán y paratipo ♂ de Orán, Provincia de Salta, Argentina (leg. Kohler, x. 1935), en mi colección. Un paratipo ♂ « Argentina » en col. Mus. Arg. Ciencias Naturales.

Pellicia herse nov. (Fig. 4).

Expansión alar 24 mm.

Parduzco, los bordes del ala anterior algo más claros que el disco del ala. Hay fajas oscuras basal, mediana y postmediana, pero tan poco resaltantes que se puede distinguirlas solamente con dificultad.



Fig. 4. — Genitalia de *Pellicia herse* Hayw. (Holotipo ♂. Argentina).

La faz inferior es algo más clara, el borde interno del ala anterior más claro que el color de fondo. En el ala anterior no se nota diseño ninguno y en el ala posterior se puede apenas distinguir las fajas oscuras. Las orlas del color de fondo.

Holotipo ♂ de Misiones, Argentina, en la colección del autor.

Pellicia hertha nov. (Fig. 5).

Expansión alar 25 mm.

Color de fondo parduzco con rastros indistintos de fajas basal, mediana y postmediana de un color más oscuro. El margen de ambas alas, como también las orlas, de pardo oscuro.

La faz inferior de color pardo más claro, el borde interno del ala anterior claro, casi blanco, y se encuentra una manchita de escamas claras en el ápice del ala. También hay escamas claras en las nervaduras radiales a $^1/_2$ costa.

El ala posterior se aclara hacia el ángulo anal que es grisáceo, en forma que las fajas sobresalen en esta parte del ala.



Fig. 5. — Genitalia de *Pellicia hertha* Hayw. (Holotipo ♂. Argentina).

Las válvulas de los genitales de los machos son muy ligeramente asimétricas.

Holotipo ♂ de Santa Ana en Misiones, Argentina, en la colección del autor.

Pellicia hermione nov. (Fig. 6).

Expansión alar 27 mm.

El color de fondo es parduzco con un muy leve tinte violeta. El diseño de fajas oscuras transversales consta de fajas basal, mediana y postmediana y será probablemente imposible separar esta especie de muchas otras de este género, salvo por un examen de sus genitales. El borde de ambas alas oscuro, pero con una hilera de puntos internervales más claros. Las orlas algo más claras que el color de fondo y hay una distinta línea marginal oscura.

En la faz inferior el borde interno del ala anterior es claro.

Holotipo ♂ de Santa Fe, Argentina, en mi colección.

Pellicia hebe nov. (Fig. 7).

Extensión alar 34 mm.

Es muy parecida a la especie *costimacula* H. S., de la cual se puede separar solamente por un examen de sus genitales.



Fig. 6. — Genitalia de *Pellicia hermione* Hayw. (Holotipo ♂. Argentina).



Fig. 7. — Genitalia de *Pellicia hebe* Hayw. (Holotipo ♂. Argentina).

El color de fondo es gris-violeta y el diseño de fajas es igual al de *costimacula* aunque algo menos marcado. El borde del ala anterior y mitad distal del ala posterior más bien parduzco. En su faz inferior también es igual a la especie *costimacula*.

Holotipo ♂ de Puerto Aguirre en Misiones, Argentina, en mi colección.

Pellicia alicus (Schaus) (Fig. 8).

1902. *Staphylus alicus* Schaus, Proc. U. S. Nat. Mus. p. 433.

Expansión alar 26 mm.

Color de fondo pardo oscuro con un leve matiz violeta. Hay en ambas alas una faja oscura postbasal y otra postmediana y una hilera de puntos oscuros antemarginales.

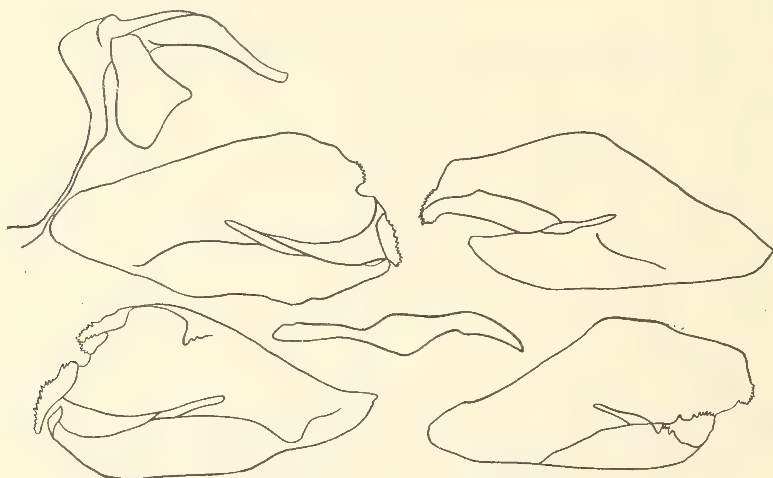


Fig. 8. — Genitalia de *Pellicia alicus* Schaus. (Argentina).

En la faz inferior el borde interno del ala anterior es del color de fondo y no más claro.

Patria. — Brasil y Argentina (Misiones), en mi colección. Del Perú, Uruguay y Bolivia en la colección del Museo Argentino de Ciencias Naturales.

Pellicia (?) **alicoides** nov. (Fig. 9).

Expansión alar 26 mm.

Difícilmente separable de *Pellicia alicus* Schaus, salvo por la falta del pincel de pelos en el ala posterior.

Color de fondo parduzco, la base de ambas alas más oscura, las orlas apenas más claras.

Hay una faja mediana y otra postdiscal y una hilera de puntos o lúnulos submarginales de un pardo más oscuro en ambas alas, las dos fajas distintas en la mitad superior del ala anterior y poco resaltantes en el resto de las alas donde también son irregulares. Esta irregularidad de las alas, formadas más bien por una serie de manchas, da a las alas una apariencia algo marmoreada en dos tonos de pardo.

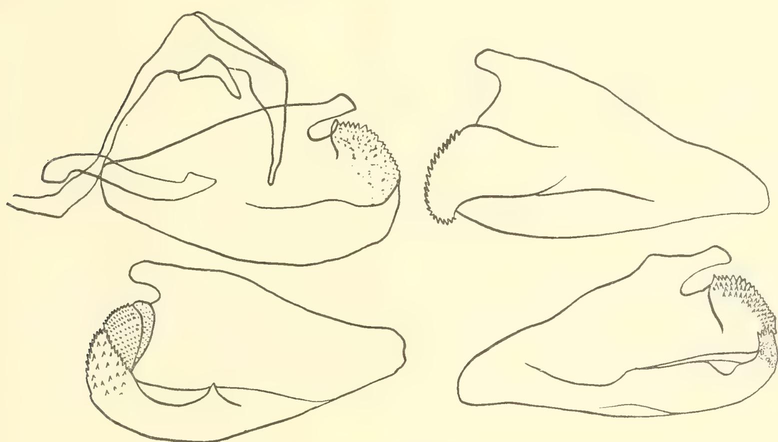


FIG. 9. — Genitalia de *Pellicia* (?) *alicoides* Hayw. (Holotipo ♂. Paraguay).

La faz inferior es igual, el borde interno del ala anterior más claro.

Holotipo ♂ de Mbuveva en Paraguay; allotipo ♀ de Misiones (Argentina) y dos paratipos ♂♂ de Paraguay y Misiones, todos en mi colección.

Esta especie no pertenece al género *Pellicia*, como está descripta, pero sigo a Bell (*Amer. Mus. Novitates* N° 914, 1937, *damon, phintias, achates*) al colocarla en *Pellicia*, de la cual difiere solamente en no tener el pincel de pelos en la costa del ala posterior y el subcostal de esta ala hinchada. Será probablemente necesario más adelante formar un nuevo género con estas especies, que por falta del pliegue costal en sus machos, no pueden entrar en *Gorgopas*, y por falta del pincel de pelos en las tibias traseras no pueden ser colocadas en *Eracon* o *Mycteris*.

Carrhenes leada Btlr. (Fig. 10).

1870. Butler, Trans. Ent. Soc. Ldn. p. 516.

Expansión alar entre 30-34 mm.

Algo parecida a la especie *Eudamides ozema* Butler, generalmente bastante desprovista de escamas, el diseño gris-amarillento sobre fondo blanco. Por lo general hay una mancha oscura apical más bien resaltante, en la cual se encuentran tres puntitos hialinos.



Fig. 10. — Genitalia de *Carrhenes leada* Butler. (Argentina).

Patria. — Costa Rica hasta Paraguay y en la Argentina de Misiones. El dibujo de los genitales ha sido hecho de los ejemplares argentinos.

Timochares trifasciata Hew.

Nueva procedencia: Anta. Provincia de Salta (leg. Kohler).

Polites vibex (Hbn.).

Nueva procedencia: Territorio del Río Negro (leg. Kohler).

Ochlodes pohli (Bell).

1932. *Augiades pohli* Bell, Bull. Brooklyn Ent. Soc. 27 (3): 136-7, Pl. 13, fig. 4 (genitalia).

♂ Cabeza, tórax y abdomen con pelos amarillos.

El color de fondo es amarillo-anaranjado, el ápice y borde del ala anterior y área subcostal, borde externo y borde anal del ala posterior negros. En el ala anterior hay una línea negra sobre la mediana que está unida con la faja negra irregular (llevando el estigma en los machos) que corre paralela al borde oscuro. Las nervaduras

en el área basal son negras. En la faz inferior el color de fondo es amarillo, el disco del ala anterior y su borde interno siendo negruzcos. El área subcostal es de amarillo vivo. El ala posterior lleva una hilera curva postmediana de máculas más claras que el color de fondo. Las orlas del ala anterior pardas, salvo en el ángulo interior, donde se las encuentra amarillas. Del ala posterior amarillas.

♀ El área amarilla del macho es muy reducida y en forma de máculas divididas entre sí por las nervaduras negras. La base de ambas alas es casi completamente negra y el área subcostal del ala anterior es amarilla.

Exp. alar ♂♂ 30-31 mm., ♀♀ 31-32 mm.

Patria. — Brasil y Argentina. En la Argentina de Misiones y de La Rioja.

Género *Lerodea* Scudder.

1872. *Lerodea* Scudder, Rept. Peabody Acad. 1871, 80 (59). Orthotipo *Hesperia eufala* Edwards.

1872. *Cymaenes* Scudder, loc. cit. 82 (61). Orthotipo *Cobalus tripunctus* Herrich Schaffer.

1900. *Megistias* Godman, Biol. Centr. Amer. Rhop. 2 p. 571, Orthotipo *Hesperia tripunctata* Latreille.

Las especies *eufala, tripunctus* y *tripunctata* son cogenéricas, por lo cual las especies colocadas en *Megistias* en Hayward, *Rev. Soc. Ent. Arg.* 6: 159-163, 1934, y trabajos subsiguientes, deben ser transferidas al género *Lerodea.*

Lerodea lepta nov.

Expansión alar 30 mm.

El color de fondo es pardo algo aceitunoso, las orlas más claras.

En el ala anterior hay tres puntitos subapicales de forma curva, la concavidad hacia el ápice del ala, los puntos aumentándose en tamaño desde la costa hacia adentro del ala. En el disco del ala hay tres puntos, uno chico hialino y cuadrado en el ápice de la tercera célula mediana, otra igual, pero más grande, en el ápice de la primera célula cubital, ambos de color blanco y un tercer punto en el medio de la segunda célula cubital, algo más amarillento.

En la faz inferior el color de fondo es pardo claro, el disco del ala anterior negruzco, el diseño como en la faz superior, pero el punto discal inferior (amarillento) falta. El área costal hasta $1/2$ con algunos pelos de color ocre.

En el ala posterior hay una hilera curva de máculas algo más claras que el color de fondo desde $^1/_2$ costa hasta el medio de la segunda célula cubital. Estas máculas llevan un borde apenas más orcuros que el color de fondo.

Holotipo ♂ y allotipo ♀ de Tucumán, Argentina, en mi colección.

Lerodea zama nov. (Fig. 11).

Expansión alar 26 mm.

Color de fondo pardo negruzco, las orlas más claras, el disco del ala posterior con unos largos pelos amarillentos.

El diseño del ala anterior consta de un puntito alargado en el fin de la célula y otro en el medio de la segunda célula cubital, ambos ligeramente amarillentos, y tres puntos blancos hialinos subapicales. Estos tres puntos subapicales son de forma ligeramente curvada

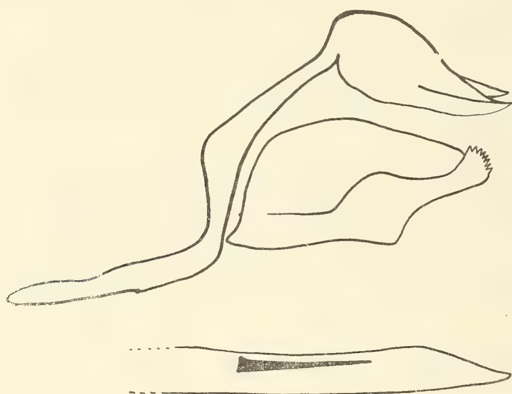


Fig. 11. — Genitalia de *Lerodea zama* Hayw. (Holotipo ♂. Argentina).

(concavidad distad), los tres puntos siendo subiguales. Hay además dos manchitas iguales en el disco del ala, una chica en el ápice de la célula mediana inferior y la otra mucho más grande frente del ápice de la célula cubital superior.

En la faz inferior el color del ala anterior es de pardo vivo, la mitad superior cubierta con pelos y escamas de color ocre, especialmente en la radialis y la mediana, donde casi forman una línea de este color. El diseño es igual al de la faz superior. El color del ala posterior es más bien pardo negruzco con un ligero matiz gris-violeta y con una faja mediana oscura apenas indicada y con manchas

más pardo café cerca de la base de la célula radialis y en el borde de la segunda célula cubital, pero estas manchas muy indistintas.

Palpos y pectus de un color blanco-ocre, antenas parcialmente anilladas blancas en la unión de cada artejo.

Holotipo ♂ del Río Ochuna en Tucumán (Argentina) en mi colección.

Lerodea albinotata nov. (Fig. 12).

♂ Expansión alar 27 mm.

El color de fondo de la faz superior parduzco sin diseño, las orlas ligeramente más claras.

En la faz inferior el ala anterior es parduzco en el disco y algo más claro en el área subcostal y en el borde externo. Hay indicaciones de un guión claro en el medio de la segunda célula cubital.

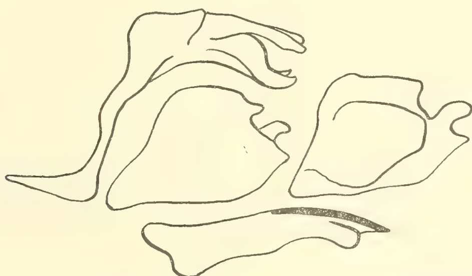


Fig. 12. — Genitalia de *Lerodea albinotata* Hayw. (Holotipo ♂. Paraguay).

El ala posterior es algo más grisácea con un puntito claro en el fin de la célula y una hilera curva postdiscal de puntos claros chicos, terminando en uno mucho más grande frente del borde anal.

♀ Tengo a la vista una hembra que es aparentemente de esta especie, en la que los puntos claros de la faz inferior del ala posterior son más marcados. Además en el ala anterior en la faz inferior, se nota un diseño de pequeñísimos puntos claros, dos subapicales y dos en el disco del ala, el inferior de estos dos de forma alargada (verticalmente) y el guión claro en la segunda célula cubital está bien indicado. De otro modo, en la faz superior de esta ala se encuenta solamente indicaciones del punto subapical inferior, siendo esta faz, aparte de esto, sin diseño. Su expansión alar es igual a la del macho.

Dado las diferencias entre el diseño del macho y hembra que

tengo a la vista, es probable que el diseño de puntos sea variable en esta especie, y que en algunos machos se encuentre este diseño.

Holotipo ♂ del Paraguay, allotipo ♀ de Misiones y un paratipo ♀ del Paraguay, todos en mi colección.

Lerodea uniformis nov. (Fig. 13).

Expansión alar 26 mm.

El color de fondo de la faz superior es parduzco más bien salpicado con pelos y escamas de un pardo amarillento, dando al insecto la apariencia de ser pardo claro. Sin diseño. Las orlas más claras, más grisáceas. La faz inferior de un tono más claro, aclarándose ligeramente hacia el borde exterior de ambas alas. Sin diseño.



Fig. 13. — Genitalia de *Lerodea uniformis* Hayw. (Holotipo ♂. Argentina).

Holotipo y paratipo ♂♂ de Misiones en mi colección.

Lerodea violacea nov. (Fig. 14).

Expansión alar 25 mm.

El color de fondo de la faz superior es pardo negruzco con un matiz algo oliváceo en algunos ejemplares. El disco del ala posterior es algo más oscuro. Las orlas del color de fondo. Las alas sin diseño.

En la faz inferior el color de fondo es igual, pero un poco más claro, el borde interno del ala anterior claro.

Las áreas subcostal y apical del ala anterior y el borde de ambas alas con un brillo violáceo.

Palpos con pelos amarillentos, antena con una ancha anilla ama-

rillenta antes de la maza, la parte ventral del apículus también de este color.

Holotipo ♂ de Loreto, Misiones (leg. Ogloblin) y un paratipo ♂ del mismo Territorio en la colección del autor.

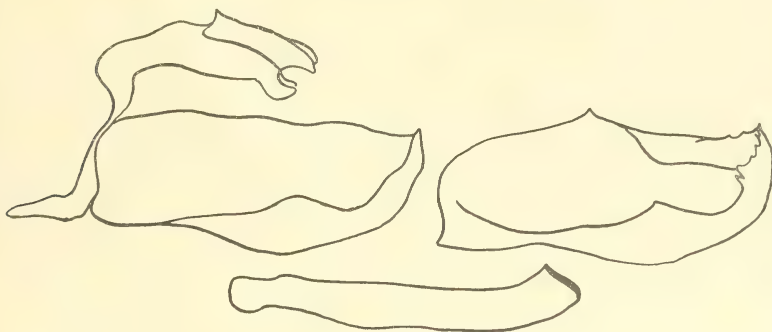


Fig. 14. — Genitalia de *Lerodea violacea* Hayw. (Holotipo ♂. Argentina).

Lerodea olivacea nov. (Fig. 15).

Expansión alar 26 mm.

El color de fondo es parduzco y las alas son bien salpicadas con escamas y pelos de color olivo, dando al insecto un color oliváceo. Las orlas son del color de fondo. No hay diseño salvo por una pequeña mancha oscura en el borde del ángulo anal del ala posterior.



Fig. 15. — Genitalia de *Lerodea olivacea* Hayw. (Holotipo ♂. Argentina).

El color de fondo y apariencia general de la faz inferior es igual al de la faz superior, pero algo más claro.

Holotipo ♂ de El Dorado, Misiones (Argentina) en mi colección.

« *Prenes* » *nero* F. fa. *syvicola* H. S.

Nueva procedencia: Anta, Provincia de Salta (leg. Kohler).

Thespieus moneraspernatus nov. (Fig. 16).

Expansión alar 44 mm.

Es parecida en su maculación y diseño a la especie *aspernatus* Draudt (*Seitz, Macrolep.* 5: 952, 1923), y es probable que esté confundida con esta especie en algunas colecciones.

Difiere de *aspernatus* en lo siguiente: Los puntitos subapicales en vez de ser casi subiguales aumentan en tamaño hacia adentro del ala y en vez de tener sus bordes proximal y distal derechos y



Fig. 16. — Genitalia de *Thespieus moneraspernatus* Hayw. (Holotipo ♂. Argentina).

paralelos el punto costal es distad a los otros dos, por lo cual los dos bordes forman una curva (concavidad distad). El punto doble celular es en *moneraspernatus* más basad que en *aspernatus* y en la hilera de puntos discales el superior es grande y bien marcado (generalmente chico o faltando en *aspernatus*), el tercer punto es más grande, más cuadrado y menos triangular, y el punto inferior es el más chico (no así en *aspernatus*).

En el ala posterior las máculas discales son más del doble del tamaño de las de *aspernatus*. Todos los puntos discales del ala anterior y las máculas del ala posterior son completamente hialinos, sin tener escamas de color blanco o amarillento. Como en *aspernatus* los pelos del tórax, abdomen y base de las alas son de color

verdoso y hay un pincel de pelos blanquizcos en el pliegue abdominal de la especie aquí descripta.

En la faz inferior el ala anterior es de fondo más oscuro y el ápice es bisecado por una gruesa línea clara que forma una continuación de la hilera oblicua de puntos hialinos discales. En *aspernatus* el área clara en el ápice del ala es paralela al borde y no se une con la hilera de puntos discales. El punto inferior de la hilera oblicua es menos difuso que en *aspernatus*.

En el ala posterior el área subcostal es más clara que en *aspernatus* y el diseño pardo oscuro no llega a la costa. La hilera de máculas discales se extiende hasta el margen en forma de una línea blanquizca y estas máculas son bordeadas distalmente pardo-rojizo oscuras (en *aspernatus* solamente las máculas inferiores son así bordeadas). El área basal con un diseño de líneas blancas muy parecido a la especie *xarippe* Butler.

Las orlas como en *aspernatus*, pero el límite entre las áreas pardo y blanco distinto y no graduado.

Hay otras ligeras diferencias, notablemente el color más oscuro del área anal de la faz inferior en la nueva especie.

En cuanto a los genitales de los machos, son distintos y constantes, y para permitir la apreciación de estas diferencias, se da el dibujo de ambas especies.

Se puede separar *moneraspernatus* de otras especies vecinas por la coloración de los pelos del tórax, abdomen y base de las alas y por tener la maculación completamente hialina y no blanquecina o amarillenta).

Holotipo ♂ y paratipo ♂ de El Dorado, Misiones (Argentina) en mi colección. Esta especie vuela con toda seguridad en el Paraguay (costa del Alto Paraná) y en el Brasil (costa del Alto Uruguay, distante de El Dorado unos 80 Km.).



FIG. 17. — Genitalia de *Thespieus aspernatus* Draudt. (Brasil).

Tirynthia ornata nov. (Fig. 18).

Expansión alar ♂ 32 mm.

Color de fondo pardo negruzco, las orlas más claras, el disco del ala posterior con rastros de una hilera mediana de máculas amarillas. El diseño del ala anterior consta de tres puntos blancos hialinos subapicales, el primero a $^2/_3$ costa de forma lineal, el segundo igual, pero más corto, el inferior todavía más corto, más bien un punto, algo más distad. En el disco del ala hay un grupo de cuatro manchitas blancas hialinas, dos en el fin de la célula una arriba de la otra, algo alargadas, otra más redondeada en el ápice de la célula mediana inferior y la otra en forma de un guión vertical en la primera célula cubital directamente debajo el punto de nacimiento de Cu^1. En línea con las manchitas en las células cubital superior y mediana inferior y hacia el ápice del ala hay un área clara amarillenta.

El color de fondo de la faz inferior es más bien gris aceituna y el diseño oscuro es algo confuso. El disco y borde interior del ala anterior es negruzco y el diseño de puntos hialinos se repite, con la adición de una manchita blanca subcostal arriba de las dos manchas

lineales en el fin de la célula y con un largo guion blanco en la célula cubital inferior.

Además los puntos subapicales están extendidos distalmente con escamas blancas.

En el ala posterior el área basal es oscura con indicaciones de un punto claro subcostal y un punto claro redondeado en el medio del área oscura. El área anal es también oscura, clara hacia la base

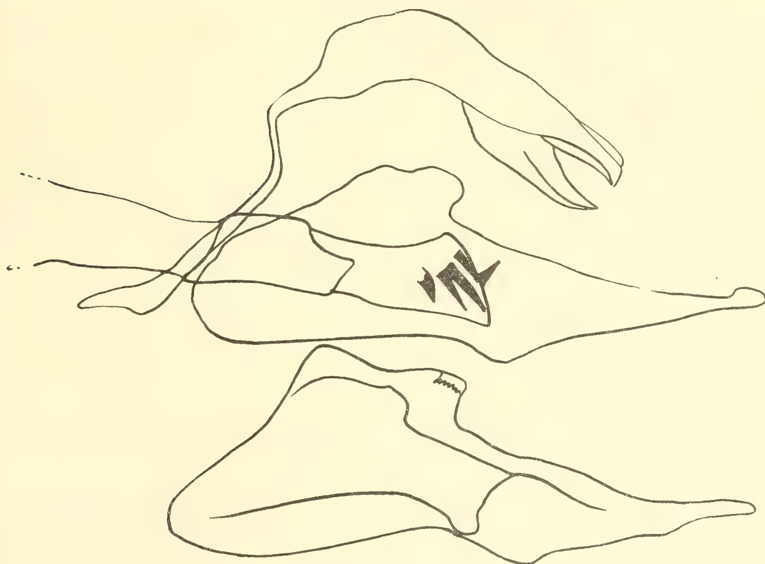


Fig. 18. — Genitalia de *Tirynthia ornata* Hayw. (Holotipo ♂. Argentina).

de las dos células anales, esta área clara separa la parte oscura basal de la parte oscura anal. Hay una hilera antemarginal de seis guiones internervales oscuros y una fina línea marginal del mismo color.

Palpos y pectus y pelos de la femora blancos, las tibias y tarsos pardos.

Coloco esta especie en *Tirynthia* por ser el género al que, en mi opinión, más cerca corresponde.

Holotipo ♂ en mi colección, de Misiones, Argentina. Allotipo ♀ y un paratipo ♂ en col. Mus. Arg. de Ciencias Naturales de la misma procedencia.

Cobalus cocalus nov. (Fig. 19).

Expansión alar 30 mm.

Color de fondo pardo café. En el ala anterior hay dos puntitos amarillentos subapicales y dos indistintos puntitos similares en el disco del ala en los ápices de las células mediana inferior y cubital superior.



Fig. 19. — Genitalia de *Cobalus cocalus* Hayw. (Holotipo ♂. Argentina).

El color de fondo de la faz inferior es parecido al de la faz superior, un poco más amarillento; los puntos claros más resaltantes, el borde interno del color de fondo y no más claro.

El ala posterior es un poco más oscura y hay una mancha postmediana algo más clara que el fondo. Las orlas son del color de fondo, un poco más claras hacia el ángulo interno del ala anterior.

Holotipo y paratipo ♂♂ en mi colección de Misiones, Argentina.

Cobaloides nov. gen (Fig. 20).

Antenas la mitad del largo de la costa, de 40 segmentos de las cuales 20 forman una masa grueza con apículo corto y poco recurvado.

Palpos con el primer y tercer artejos subiguales, el segundo 1 $^1/_2$ veces el primero, erguidos.

Tibias de las patas anteriores con un mechón de pelos; de las patas medianas con un par de espolones y una línea de espinitas cortas, tarsos de estas patas con espinas cortas; tibias de las patas traseras con dos pares de largos espolones y tres pares de espinas cortas, además en la parte dorsal numerosas espinas cortas, los tarsos de estas patas con una hilera de espinas cortas.

Alas anteriores con Cu^2 más cerca de Cu^1 que de la base del ala; Sc hinchada en su base y Cu^1 deprimida en su medio.

Alas posteriores algo alargadas en el ángulo anal, M3 y Cu^1 nacen muy cerca una de la otra y Cu^2 cerca de Cu^1.

El estigma de los machos consta de una línea sobre el lado inferior de la mediana entre el punto de nacimiento de Cu^1 y cerca del punto de nacimiento de Cu^2, otra línea corta sobre el lado superior de Cu^2 y una tercera línea larga sobre la analis.

Genotipo *Cobaloides argus* nov.

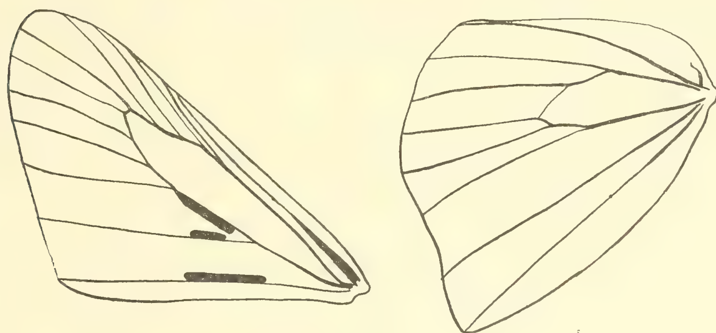


Fig. 20. — Nervadura del género *Cobaloides* Hayw.

Cobaloides argus nov. (Fig. 21).

♂ Expansión alar 38 mm.

Color de fondo parduzco. El diseño del ala anterior consta de ocho puntos o manchas hialinas ligeramente amarillentas. Hay tres puntos lineales subapicales, el inferior algo más grande y algo distad de los otros. En el fin de la célula hay un doble punto en forma de dos guiones y se encuentra en el disco del ala una hilera de tres manchas, la primera frente del ápice de la célula M^3, la segunda y la más grande frente del ápice de la célula Cu^1, ambas cuadradas, y la tercera, menos hialina, más amarillenta, más chica, en el medio de la segunda célula cubital.

Las orlas son más claras que el color de fondo, salvo hacia el ápice del ala anterior.

La faz inferior es de un color pardo gris salpicado con gris-lila en el ápice del ala anterior y sobre el ala posterior. El disco del ala anterior negruzco, el diseño igual al de la faz superior salvo que la mancha inferior de la hilera mediana es más grande, más difusa, blanca, y hay un área más clara en el fondo y con borde distal

oscuro entre los puntos subapicales y la primera mancha de la hilera mediana. La mitad basal del área costal es clara.

En el ala posterior hay un doble punto oscuro basal y una hilera curva mediana de seis puntos redondeados oscuros ligeramente anillados más claros, el tercer punto desde la costa más bien doble. En la curva formada por esta hilera como también en las células anales, hay menos escamas gris-lila formando así áreas más oscuras. En algunos ejemplares se puede notar una indistinta mancha o punto claro en el fin de la célula.

♀ Expansión alar 40 mm.

Difiere del macho por tener la maculación más grande.

En ambos sexos los palpos son blancos y la maza de las antenas es de color herrumbre.

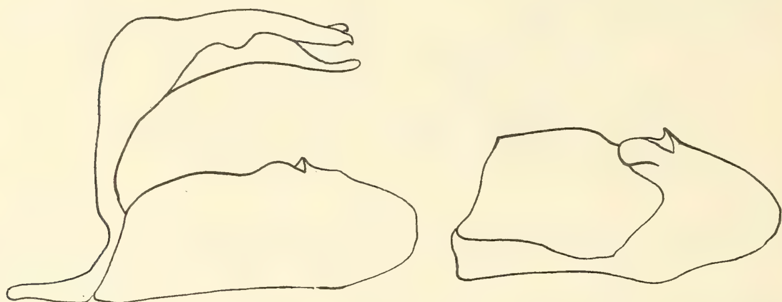


Fig. 21. — Genitalia de *Cobaloides argus* Hayw. (Holotipo ♂, Paraguay).

Holotipo ♂ y allotipo ♀ de Villarrica en el Paraguay (leg. Jorgensen), ambos en mi colección. He capturado esta especie también en varias partes del Territorio de Misiones (Argentina), en el Alto Paraná.

Eutychide hialinus Bell.

1930. Bell, Journ. N. Y. Ent. Soc. 38: 152, fig. 6 (genitalia).

Expansión alar 30-31 mm.

Color de fondo pardo oscuro con un tono algo purpúreo. En el ala anterior se encuentran uno o dos puntitos subapicales y tres en el disco del ala en los ápices de las células M^3 y Cu^1 y en el medio de la célula cubital inferior. Hay rastros de una hilera curva de puntos amarillos en el disco del ala posterior. Las orlas algo más claras que el color de fondo.

El color de fondo de la faz inferior pardo gris claro, el disco del ala anterior negruzco, el diseño de puntos hialinos igual al de la faz superior, pero algo más extenso, especialmente el punto en el medio de la segunda célula cubital que es difuso. En el disco del ala posterior hay una hilera curva de guiones (poco visibles en algunos ejemplares) y todas las alas tienen un brillo liláceo.

Patria el Brasil y Misiones en la Argentina.

Phanes cumbre Schaus (Fig. 22).

1902. Schaus, Proc. U. S. Nat. Mus. p. 445.

Expansión alar 27 mm.

Color de fondo pardusco. En el ala anterior hay tres puntitos subapicales blancos hialinos y tres en el disco en los ápices de la tercera célula mediana, y primera cubital y la otra en el medio de la segunda célula cubital. Este último punto es muy reducido (a veces falta), y el punto en la primera célula cubital es el más grande.

La faz inferior es más clara, el área costal del ala anterior y el disco del ala posterior con un leve tono rojizo.



Fig. 22. — Genitalia de *Phanes cumbre* Schaus. (Argentina).

En el fin de la célula del ala posterior hay un puntito claro y una hilera de otros puntos iguales en el disco del ala.

Patria. — El Brasil y Río Ochuna en Tucumán (Argentina).

Phanes triumviralis nov. (Fig. 23).

Expansión alar 27 mm.

Hay tres especies de *Phanes* tan parecidas en su maculación, que es prácticamente imposible separarlas a simple vista. Estas tres especies son *cumbre* Schaus (menconadas más arriba), la especie aquí descripta, y una tecerra especie de que no tengo machos disponibles para describirla.

La especie *cumbre* es conocida en Santa Catharina (teste Bell) y Petrópolis (Schaus) en el Brasil y en la Argentina del Río Ochuna, Tucumán.

La especie *triumviralis* la tengo de Paraguay y de Puerto Aguirre en Misiones, y la tercera especie vuela también en el norte deMisiones.



Fig. 23. — Genitalia de *Phanes triumviralis* Hayw. (Holotipo ♂. Argentina).

La especie *triumviralis* difiere de *cumbre* en que los puntitos hialinos subapicales están más bien en línea recta, siendo ligeramente en línea curva en *cumbre*. Aparte de estos, no hay diferencias que se puedan apreciar.

Holotipo ♂ de Puerto Aguirre en Misiones (Argentina) y allotipo ♀ de Villarrica (Paraguay, leg. Jorgensen), ambos en mi colección.

Un ♂ y una ♀ paratipos de Misiones en la col. Mus. Arg. de Ciencias Naturales.

Vistigma gen. nov. (Fig. 24).

Antenas un poco más largas que 1/2 costa, de 44 artejos, el apículo recurvado y más o menos 1/3 del largo de la maza, que es de 26 artejos en total.

Segundo artejo de los palpos un poco más corto que los subiguales primer y tercer artejos.

Tibias anteriores con un mechón de pelos y sin espinas. Tibias y tarsos medianos con espinas, las tibias con un par de largos espolones, tibias traseras con dos pares de espolones y los tarsos correspondientes con espinas.

Cu^2 del ala anterior nace equidistante de la base del ala y del punto de nacimiento de Cu^1, M^2 más cerca de M^3. que m^1. El estigma del macho en forma de un IV o VI, la línea recta sobre la nervadura Cu^2 en su lado superior y el V en el ángulo formado por esta nervadura y la mediana en la primera célula cubital. En el ala posterior

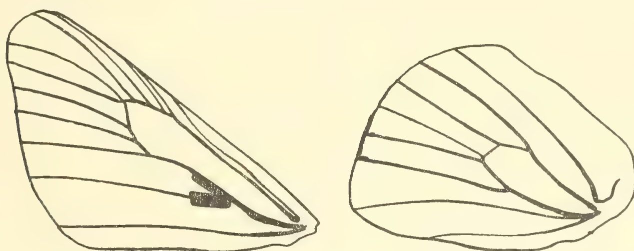


Fig. 24. — Nervaura del género *Vistigma* Hayw.

M^3 y Cu^1 nacen cerca una de la otra y Cu^2 a $^2/_3$ de la distancia entre la base del ala y Cu^1.

Genotipo *Vistigma xanthobasis* nov. Este género es vecino de *Phanes*.

Vistigma xanthobasis nov. (Fig. 25).

♂ Expansión alar 32 mm.

Color de fondo parduzco, el área subscostal del ala anterior en su mitad basal con pelos dorados; las orlas algo más claras que el color de fondo.

El diseño del ala anterior consta de un puntito diminuto, claro en el fin de la célula, tres puntos subapicales, el costal muy chico o, a veces, falta; el segundo y tercero lineales. En el disco del ala hay tres manchas más bien cuadradas, en el ápice de la tercera célula mediana, frente del ápice de la primera célula cubital y en el medio de la segunda célula cubital. Entre esta hilera de manchas y los puntos subapicales hay dos muy insignificantes puntitos adicionales. Todos estos puntos y manchas son amarillentos y hialinos.

El color de fondo de la faz inferior es un poco más claro, la base del ala anterior negruzca, el área costal, una mancha entre los puntos subapicales y las manchas discales y una faja distad a la hilera de manchas discales de color más bien herrumbre-rojizo. El margen del ala de color amarillento. El diseño de puntos y manchas igual al de la faz superior.

En el ala posterior la base del ala, área costal, un punto redondeado en el fin de la célula y una hilera antemarginal de puntos nternervales de color herrumbre rojizo sobre un fondo amarillento.



Fig. 25. — Genitalia de *Vistigma xanthobasis* Hayw. (Holotipo ♂ Argentina).

Palpos y pectus grises, faz inferior de la maza de la antena amarilla.

♀ Expansión alar 35 mm.

Difiere del macho por tener las manchas discales hialinas blancas en vez de ser amarillas.

Holotipo ♂ de Puerto Bemberg, allotipo y paratipo ♀♀ de Puerto Aguirre (ambos en Misiones, Argentina), en mi colección, capturados por mí en Diciembre-Marzo, 1933-34. Hay también un paratipo ♂ de la misma procedencia y fecha en la col. Mus. Arg. de Ciencias Naturales.

Phlebodes bella nov. (Fig. 26).

♂ Expansión alar 25 mm.

El color de fondo es amarillo anaranjado, la base de ambas alas algo negruzco, especialmente en el ala anterior.

En el ala anterior hay una faja oscura (negra) oblicua a $^3/_4$ costa que se extiende hasta el medio de la analis (sin llegar al borde interno). Esta faja es ligeramente extendida hacia la base del ala sobre la mediana y sobre la radialis y distalmente en forma de una mancha en la segunda célula mediana, a veces llegando a unirse con el borde oscuro. El ápice del ala (uniéndose en la costa con la faja oblícua oscura) y borde del ala, negros; el borde más ancho hacia el ángulo interno. La célula analis más bien negruzca.

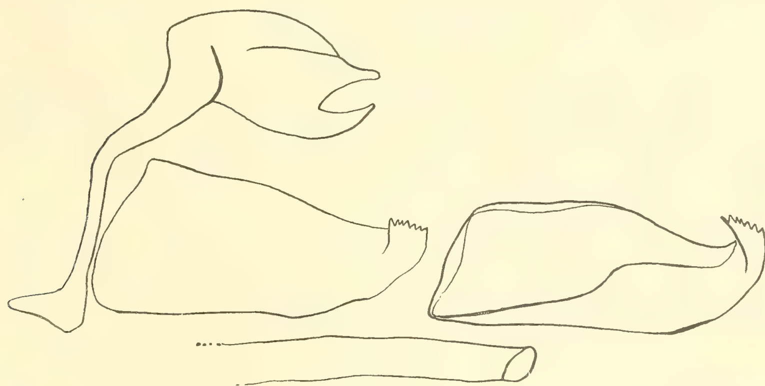


Fig. 26. — Genitalia de *Phlebodes bella* Hayw. (Holotipo ♂ Argentina).

En el ala posterior las áreas costal, marginal y el borde anal son negros y el área basal oscura se extiende dentro del disco sobre las nervaduras. Las orlas son más bien grisáceas en el ala anterior (más oscuras en el ápice) y anaranjadas en el ala posterior.

En la faz inferior la mitad superior del ala anterior es negruzca, sobre cuyo color la faja amarilla resalta. Las áreas costal y apical son amarillentas, este color interrumpido por una línea negra en Sc hasta $^1/_2$ célula y todo, salvo la célula y una manchita subapical, muy salpicado con color herrumbre. Distad a la mancha amarilla subapical hay un puntito de color herrumbre.

En el ala posterior hay una mancha amarilla redondeada postdiscal y dos puntos iguales debajo, las células anales de color negruzco bordeado con una línea amarilla clara en la segunda célula

cubital y con el margen anal pardo café oscuro. El resto del ala de color de fondo amarillento bien salpicado con color herrumbre rojizo, que en la mitad discal del ala forma numerosos puntitos.

♀ La hembra difiere del macho en tener el diseño negro un poco más reducido, especialmente en el ala posterior, pero la diferencia es poco marcada.

La especie se coloca cerca de *silvicultrix* Hayward.

Holotipo y un paratipo ♂♂ y allotipo y un paratipo ♀♀ en mi colección y un paratipo ♂ y paratipo ♀ en la colección Breyer, todos del Río Ochuna, Tucumán, Argentina. Un ♂ paratipo en la col. Mus. Arg. de Ciencias Naturales.

Género *Eprius* Godman.

1901. *Epeus* Godman, Biol. Centr. Amer. Rhop 2: 601, Haplotiplo *Epeus veleda* Godman. (nombre preocupado por *Epeus* Kuwert 1896).
1901. *Eprius* Godman, *loc. cit.* p. 741, Diatipo *Epeus veleda* Godman.

El margen proximal del pliegue anal del ala posterior con largos pelos. Antenas largas con una maza larga; artejo final de los palpos largo y erguido. El estigma del macho formado por dos líneas longitudinales en la mediana.

Eprius veleda Godm. (Fig. 27).

1901. *Epeus veleda* Godman, Biol. Centr. Amer. Rhop. 2: 601.
1901. *Eprius veleda* Godman, loc. cit. p. 741.

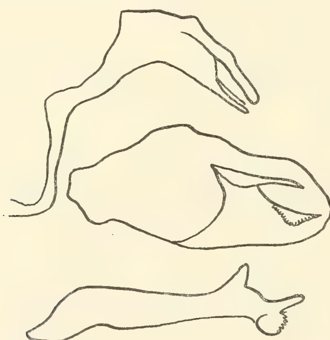


FIG. 27. — Genitalia de *Eprius veleda* Godm. (Argentina).

Expansión alar, 20 mm.

Una mariposita de color de fondo pardo negruzco y sin diseño.

La faz inferior del mismo color salpicado con pelos amarillos. La base de la maza de las antenas es amarillenta.

Dado la patria de este insecto, es muy curioso que haya sido capturado en la Argentina, pero parece que la determinación es exacta por tener la coloración de *veleda* y sus genitales no demuestran alguna diferencia.

Patria. — Méjico hasta Panamá y en Trinidad. Los dos ejemplares argentinos que tengo en mi colección son de procedencias de Tucumán y Misiones.

Callimormus simplicius nov. (Fig. 28).

Expansión alar variable entre 22-25 mm.

Color del fondo pardo café oscuro, las hembras algo más grisáceas. En algunos ejemplares hay rastros de tres manchas discales amarillentas en forma de una hilera oblicua. Las orlas del color de fondo.



Fig. 28. — Genitalia de *Callimormus simplicius* Hayw. (Holotipo ♂. Paraguay).

En la faz inferior el ala anterior es de color parduzco y hay rastros de tres puntos subapicales y otro chico en el fin de la célula, de un color algo más claro (grisáceo). Las nervaduras son más claras hacia el margen. En el ala posterior el color de fondo es igual y las nervaduras más claras, y hay una faja clara que cruza el ala en forma agudamente angulada desde $^2/_3$ costa hasta el medio del margen anal, formando el ángulo (concavidad basad) entre M^1 y M^3. En esta faz hay en ambas alas una fina línea oscura marginal.

Holotipo ♂ del Paraguay y allotipo ♀ del Chaco, Argentina, en mi colección, y dos ♀♀ paratipos de Corrientes (Argentina) en la colección Breyer.

Género *Artines* Godm.

1901. Godman, Biol. Centr. Amer. Rhop. 2: 608. Orthotipo *Thracides aepitus* Geyer.

Antenas largas, más de la mitad del largo de la costa; palpos

largos y erguidos; estigma del macho de forma sagital y situado en el ángulo formado por la mediana y Cu'.

Ala posterior con largos pelos en el borde anterior del pliegue abdominal.

Artines odilia (Plotz) (Fig. 29).

1883. *Apaustus odilia* Plotz, Exot. Schmett. 20, Hesp. Tab. 734.

Expansión alar 24 mm.

Color de fondo pardo negruzco. En el ala anterior hay cuatro puntitos amarillos hialinos subapicales en línea recta y una hilera de cuatro en el disco del ala, el superior nada más que un grupo reducido de escamas amarillas, el inferior alargado hacia la base del ala y también de escamas y los otros dos grandes y hialinos en los ápices de las células mediana inferior y cubital superior.

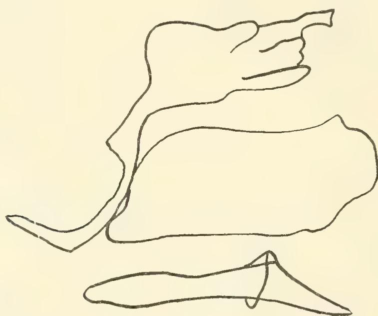


Fig. 29. — Genitalia de *Artines odilia* Plotz. (Argentina).

En el disco del ala posterior hay una mancha amarilla algo excavada en su lado proximal.

El ala anterior en su faz inferior más clara en el área subcostal y apical y con el diseño de la faz superior repetido; faltan los puntos discales superior e inferior.

El ala posterior es de color de fondo amarillo claro con dos puntos oscuros grandes y varios pequeños en el disco del ala y con una serie de líneas o guiones oscuros internervales antemarginales. Hay también una hilera irregular postmediana de puntos más claros que el color de fondo y uno o dos puntos iguales en el disco del ala.

Patria. — Brasil y en la Argentina, Iguazú en Misiones.

Artines fastus nov. (Fig. 30).

Expansión alar 25 mm.

El color de fondo de la faz superior negro aterciopelado. En el ala anterior, el área subcostal hasta $^2/_3$ amarilla y hay tres muy insignificantes puntos subapicales amarillos seguidos en forma curva por algunas escamas amarillas para unirse con dos manchas hialinas postdiscales, el inferior la más grande. Estas manchas son más bien claras en su centro y amarillas hacia las márgenes. La célula cubital inferior amarilla desde la base hasta debajo del medio de la mancha postdiscal inferior.



Fig. 30. — Genitalia de *Artines fastus* Hayw. (Holotipo ♂. Argentina).

En el ala posterior hay una mancha amarilla en el disco y los pelos largos en el lado discal del pliegue abdominal son también amarillos. Las orlas de ambas alas amarillas en los ángulos inferiores y oscureciéndose hacia los ápices.

La faz inferior negruzca y muy salpicada con escamas de color olivo (salvo en el disco y en el borde interno del ala anterior). En el ala anterior el área subcostal hasta $^1/_2$ costa y la célula, más amarillentas; los puntitos subapicales apenas visibles, las dos manchas postdiscales resaltantes.

En el ala posterior hay dos manchitas blancas discales (anilladas más oscuras) y unos puntos oscuros antemarginales.

Holotipo ♂ en mi colección de Puerto Aguirre, Misiones, Argentina.

Concordia, 31 de Julio de 1938.

RESTOS HUMANOS SUBFÓSILES DE MENDOZA

Por CARLOS RUSCONI

1. - Antecedentes

Mi reciente viaje al valle de Uspallata, realizado en compañía del personal del Museo de Historia Natural de Mendoza (14 a 16 de Abril de 1938), fué con el objeto de concluir con una parte de la explotación de varios túmulos prehispánicos descubiertos en una excursión anterior.

Durante mi última permanencia me ha sido posible visitar varias zonas arqueológicas y entre las cuales figura un lugar donde existían restos humanos, según una persona de allí que tuvo la deferencia de indicármelos. Pocos minutos después llegábamos al sitio pudiendo comprobar que aquella noticia era exacta. De inmediato comencé a levantar todos los trozos óseos, anotando los detalles de su posición en el terreno porque desde el primer momento me di cuenta que se trataba de vestigios mucho más antiguos que los descubiertos en los túmulos de otro lugar de Uspallata y en los cuales me fué posible levantar una treintena de individuos de diferentes edades (Rusconi, 1938, p. 203 y sig.). Mientras éstos muestran casi en su totalidad la tortura de la deformación craneana artificial, aquel en estado subfósil y que motiva este artículo, no se advierte vestigio alguno de dicho proceso y luego que muestra características anatómicas sensiblemente distintas.

2. - El yacimiento

El lugar donde se encuentran los restos humanos está situado a unos 400 metros a la izquierda del camino Internacional a Chile y más o menos a igual distancia del río Uspallata. Ellos se hallaban en la parte alta de unas barrancas de un pequeño río seco pero a unos setenta centímetros de hondura de la superficie del suelo. Casi todos los huesos habían caído a la base de la barran-

ca por efecto de la erosión, pero el lugar exacto me fué fácil averiguarlo por haber recogido los restantes *in situ*. Varios centenares de metros al norte se encuentra un pequeño cerrillo de rodados y en cuya parte superior descubrimos ese mismo día los restos de un Pukará. El examen de toda esa zona, fué sin embargo muy ràpido debido a la niebla y llovizna fría que caía intermitentemente.

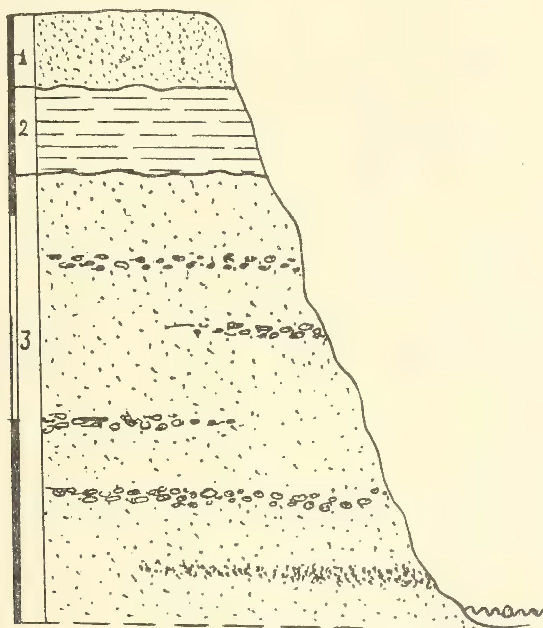


FIG. 1. — Corte geológico obtenido en la margen del río Uspallata y sobre el camino internacional a Chile. Los restos humanos fueron hallados en el espesor de la capa Nº 2.

3. - Condiciones geológicas

La región del yacimiento humano forma la parte baja del valle de Uspallata y sus terrenos superficiales están constituídos de materiales grisáceos, parduscos, pulvurulentos, alternados con capas de rodados, de arenas, etc. Los cortes geológicos que se obtienen a poca distancia entre si, pueden ser más o menos diferentes por el hecho de que las capas en cuestión aparecen con espesores variables y pueden no existir en lugares muy próximos. De cualquier modo ofrezco un corte obtenido en la proximidad del río Uspa-

llata y sobre el camino Internacional a Chile, distante varios centenares de metros al Oeste del hotel de la localidad (figura 1):

1º de 0 a 0,50 centímetros. Terreno arcilloarenoso pulvurulento, de color grisáceo; contiene cierta cantidad de *humus* y en la parte superior se ven vestigios de alfarerías, esquirlas, etc.

2º de 0.50 a 1 metro. Terreno arcilloso y más liviano en proporción a la masa debido a la presencia de numerosos canalículos radiculares. Tiene una coloración grisácea con tono rojizo. Se encuentra muy estratificado y es de origen palustre. Por su aspecto general, dicha capa semeja mucho al platense de la provincia de Buenos Aires. Los restos humanos los recogí en la parte superior de un terreno muy similar al descripto.

3º de 1,00 a 3,00 metros. Terreno de aspecto loesoide, algo arenoso, de color rojizo claro. En su espesor se ven numerosas camadas de rodados del tamaño de un huevo de gallina, y en otros trechos son depósitos de arena de color rojizo que lo interrumpen.

0, Nivel del río Uspallata que corre allí de N. a S.

4. - Descripción

Se trata de un cráneo con su mandíbula y distintos huesos del esqueleto de un individuo fenemino de unos veinte años de edad. pero que fué hallado en numerosos fragmentos. Luego fueron unidos y parcialmente reconstruído el cráneo por el taxidermista del Museo, señor P. Save. Los huesos muestran una coloración amarillo pajiza acercándose a la de los fósiles que se extraen de la parte superior del piso bonaerense de la provincia de Buenos Aires. Sin embargo, considero a dichos restos como de edad un poco más reciente, platense más o menos y desde luego de época holocénica. Pertenecen a la colección del Departamento de Antropología del Museo de Historia Natural « Juan C. Moyano », de Mendoza.

Vista de lado. — La frente es bastante abovedada sobre todo en la línea media y mucho más que cualesquiera de los cráneos indígenas recogidos en los túmulos ya citados (figura 2). La parte más prominente del occipucio se encuentra en el opistio.

El perfil facial tiene una perpendicular hacia adelante poco acentuada. Los cigomáticos son relativamente robustos. El contorno general del cráneo semeja mucho más al de Malacara 2, (*Homo sinemento* Amegh.). (Ameghino 1910, p. 1-6; Hrdlicka, 1912, p. 272,

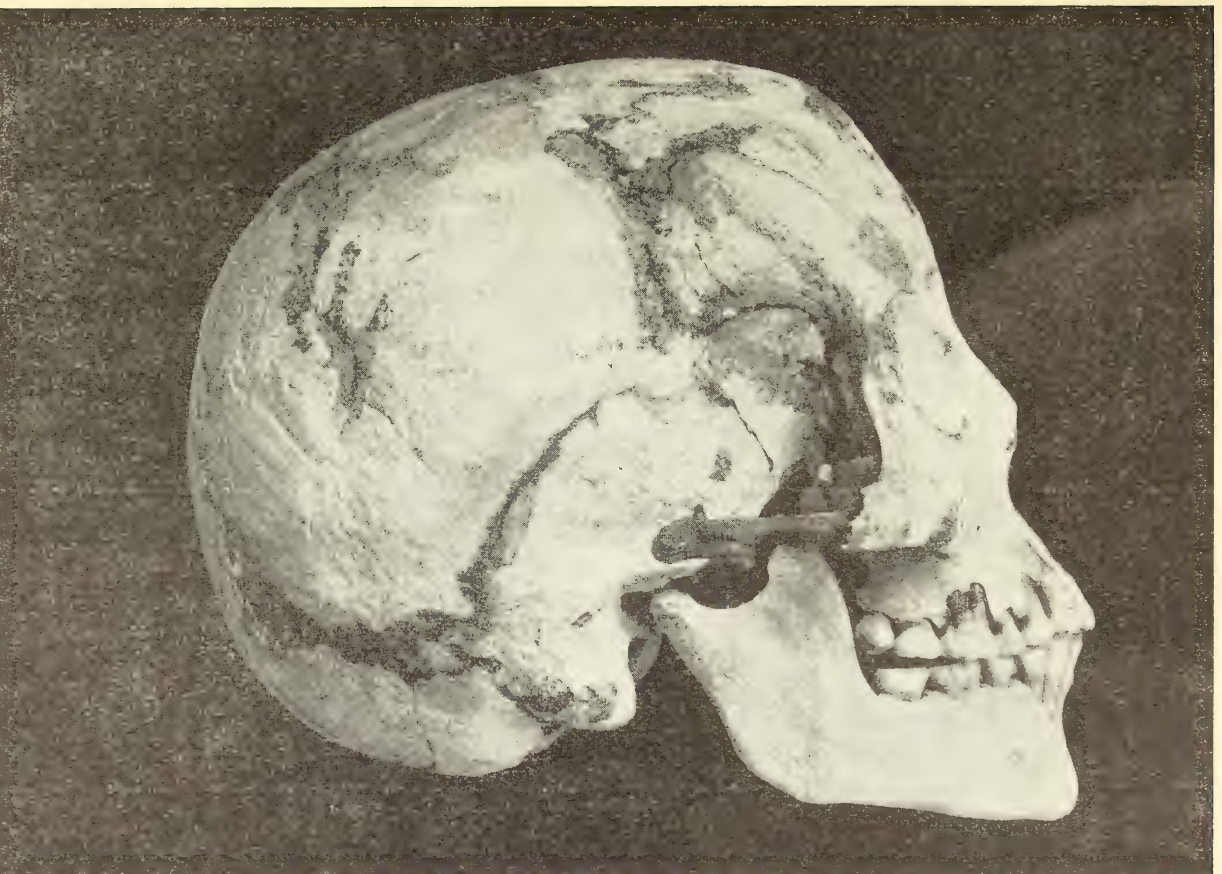


Fig. 2. — Individuo femenino ♀, subfósil, (An. 259) hallado en Uspallata. Excursión Rusconi. Abril 15-1938.

lám. 33), que a otros cráneos de la serie fósil como los de Necochea, La Tigra o los subfósiles de Santiago del Estero (Rusconi, 1935, p. 143, lám. V; Castellanos, 1938).

Vista de frente. — Los arcos superciliares son poco aparentes pero la glabela es bastante abultada (figura 3). El borde alveolar avanza poco con respecto al borde inferior de las fosas nasales. Los malares se encuentran avanzados en comparación a muchos cráneos de los túmulos ya recordados. Las fosas orbitales son de figura cuadrangular; el borde superior de la órbita tiene mayor grado de curvatura que en la mayoría de los cráneos indígenas citados, y también con los de Viluco.

Vista inferior. — La arcada dental afecta la forma parabólica; su paladar es profundo. Los cóndilos occipitales muestran su forma normal; los agujeros pre y postcondiloideos tienen bastante amplitud. El *foramen ovale* no es muy grande y el *for, spinosum* está parcialmente abierto en el lado de la sutura esfenopetrosa. El *for. magnum* tiene màs longitud que anchura. El proceso y la fosilla faríngea son apenas perceptibles.

Vista posterior. — Entre el *torus transversus* y el *lambda* hay una zona plana situada hacia el lado derecho que no puede ser debido a una deformación artificial sino más bien a un caso congénito; pues el cráneo no muestra indicios de haber sido deformado, como ocurre esto último con la mayoría de los cráneos de los túmulos ya mencionados de Uspallata.

Vista superior. — El cráneo recuerda la figura brisoide de Sergi (figura 4). Hay además una pequeña asimetría en la zona del occipucio que atribuyo a un caso congénito. No se advierten huesos wormianos fontanelarios y suturales como ocurre por el contrario en casi todos los cráneos deformados de los tútumlos de Uspallata y de otros lugares del país.

Mandíbula. — Aun cuando el mentón es algo pronunciado, sin embargo, se encuentra detrás de un àngulo recto cuya línea horizontal toca el borde alveolar incisivo y del penúltimo molar. Las protuberancias mentonianas laterales son poco destacadas, pero el borde mentoniano inferior del frente de la sínfisis muestra una cara recta y no curva y en forma de herradura. La incisura le-



FIG 3. — Individuo femenino, subfósil (An. 259), hallado en Uspallata. Exc. Rusconi, Abril 15 de 1938.

murínica está debilmente desarrollada de modo que todo el borde inferior de la mandíbula es casi rectilíneo.

La rama ascendente se encuentra bastante inclinada hacia atrás. Trazando una línea horizontal que corra por debajo de toda la rama, y la otra en sentido perpendicular, que toque, primero con la concavidad anterior de la rama ascendente situada detrás y arriba del último molar; y segundo una línea que coincida con el vertex del *processus coronoideus,* resulta que su abertura es de 133 grados. Esta gran abertura de arco y por consiguiente inclinación hacia atrás de la rama ascendente debe atribuirse en gran parte a la edad del individuo, puesto que ocurre así también con los indígenas descubiertos en los túmulos de Uspallata. Detrás de la apófisis coronoidea se advierte un *proc. rectro-coronoïdeus* bien manifiesto. El cóndilo mandibular de la rama derecha es algo más corto que el de la opuesta. La protuberancia interna de los referidos cóndilos es siempre màs abultada que la del lado externo. La incisura sigmoidea describe una línea en simicírculo.

Por la cara posterior o interna se advierte que la *fovea sublinguale* no es bien definida y de la *fossa digastrica* hay solamente vestigios. El *proc. geni* tiene 2 milímetros de longitud. La *spina* de *Spix* presenta el vertex truncado y el *sulcus mylohiohydeus* es poco excavado.

Forámenes craneanos. — Existe un *supraorbitale* izquierdo y otro derecho; un *foramen infraorbitale* a cada lado; un *for. malaris* izquierdo y dos en el lado derecho; un *for. mastoideus* izquierdo mientras que el del lado opuesto falta por accidente; un *for. postcondyloideus* derecho dentro de la fosa respectiva, mientras que el del lado opuesto falta por accidente.

Suturas. — La petroescamosa se halla rota; la infraorbital se encuentra abierta en toda su longitud; la metópica igualmente abierta.



Fig. 4. — El mismo individuo (An. 259) visto de arriba

Medidas de los dientes superiores

Inc. 1. — Diámetro transverso	8 m/m.	
Inc. 2. — Diámetro transverso	6,5	»
Canino. — Diámetro transverso	7,5	»
P. 3. — Diámetro anteroposterior	6,	»
Diámetro transverso	8,4	»
P. 4. — Diámetro anteroposterior	7,	»
Diámetro transverso	9,	»
M. 1. — Diámetro anteroposterior	10,	»
Diámetro transverso	11,	»
M. 2. — Diámetro anteroposterior	9,	»
Diámetro transverso	10,5	»
M. 3. — Diámetro anteroposterior	8,5	»
Diámtro transverso	10,	»
Espacio ocupado por toda la dentadura	57,	»
Espacio ocupado por los dos premolares	13,	»
Espacio ocupado por los tres molares	27,5	»

Dientes inferiores

Inc. 1. — Diámetro transverso	5,	»
Inc. 2. — Diámetro transverso	6,	»
Canino. — Diámetro transverso	7,	»
P. 3. — Anteroposterior	6,2	»
Transverso	7,	»
P. 4. — Diámetro anteroposterior	6,2	»
Diámetro transverso	7,8	»
M. 1. — Diámetro anteroposterior	10,4	»
Diámetro transverso	11,	»
M. 2. — Diámetro anteroposterior	10,5	»
Diámetro transverso	10,2	»
M. 3. — Diámetro anteroposterior . . . . (alvéolo)		
Espacio ocupado por los tres molares	13,	»

Huesos del esqueleto. — Además del cráneo, he levantado diversos restos del esqueleto del mismo individuo que consisten en: Atlas completo no presenta anomalía digna de ser señalada, como ocurre por el contrario con aquellos procedentes de los túmulos de Uspallata los que en su mayoría muestran anomalías o asimetrías diversas. La amplitud máxima entre los labios externos de las facetas articulares para los cóndilos occipitales es de 45 milímetros, y de solo 41 entre las facetas que articulan con el áxis.

El áxis es normal. Las cinco vértebras cervicales son igualmente normales.

La porción diafisiana del húmero es proporcionalmente muy gràcil y bastante recta. Hay trosos de escápulas y otros vestigios óseos de menor importancia aún.

Medidas craneanas

Longitud basal	100	m/m.
Diámetro anteroposterior máximo	170	»
Diámetro anteroposterior iniaco	168	»
Diámetro transverso máximo	128	»
Altura basilo bregmática	115	» ap.
Altura aurículo bregmática	180	»
Anchura frontal mínima	91	»
Anchura frontal máxima	104	» ap.
Diámetro bimastoideo (en el vertex)	88	»
Diámetro bicigomático	113	» ap.
Diámetro nasio basilar	95	»
Diámetro alvéolo basilar	90	»
Diámetro nasio alveolar	67	»
Altura nasal	46	»
Anchura nasal	19	»
Anchura interorbitaria	—	»
Anchura orbitaria	38	»
Altura orbitaria	36	»
Diámetro naso-sinfisio	100	»
Flecha de la curva alveolar	—	»
Longitud de la bóveda palatina	—	»
Anchura de la bóveda palatina	43	»
Altura órbito alveolar	37	»
Longitud del foramen occipital	30	»
Ancho del foramen occipital	—	»
Curva sagital	345	»
Curva transversal	288	»
Curva horizontal	477	»
Capacidad cúbica	—	»

Medidas mandibulares

Anchura bicondílea	110	»
Anchura bigoníaca	84	»
Longitud de la rama ascendente	52	»
Anchura mínima de la rama ascendente	30	»
Anchura máxima de la rama ascendente	37	»
Altura sinfisiana	34	»
Altura del cuerpo mandibular (debajo mol. 2)	21	»
Espesor máximo del cuerpo mandibular	17	»
Grados del ángulo mandibular	—	»

Indice craneal	75,2 »
» facial total	97,3 »
» facial superior	59,2 »
» orbitario.	94,71 »
» nasal	41,30 »

De acuerdo a los índices indicados, el cráneo humano subfósil tiene las siguientes características: Es dolicocéfalo con tendencia a subdolicocéfalo por su índice craneal. Es Hiperleptoprosopo, por su índice facial total. Mesoseno por su índice facial superior. Hipsiconco o megacemo por su índice orbitario y Leptorrino por su índice nasal.

BIBLIOGRAFIA

Ameghino, F., *Descubrimientos de dos esqueletos humanos fósiles en el pampeano inferior del Moro,* en *Congreso Científico Internacional Americano,* pp. 16, Buenos Aires, 1910.

Castellanos, A., *Nuecos restos del hombre fósil y de Hornos de tierrra cocida en Santiago del Estero,* en *Publicaciones del Inst. de Fisiología y Geología,* pp. 1-33, Rosario, 1938.

Hrdlicka, A.,*Early Man in South America,* en *American Etnology,* Bull. 52, Wáshington, 1912.

Rusconi, C., *Restos humanos fósiles procedentes de la provincia de Santiago del Estero,* en *Revista Argentina de Paleontología y Antropología,* vol. I, pp. 135-161, Buenos Aires, 1935.

Rusconi, C., *Viajes arqueológicos por Uspallata,* en *Revista Geográfica Argentina,* vol. X, nº 60, pp. 203-206, Buenos Aires, 1938.

UNA POSIBLE INFLUENCIA ANTROPÓGENA SOBRE EL AUMENTO DE LA NUBOSIDAD

POR EL DR. WALTER KNOCHE

Para la formación de nubes se requiere no solamente un estado de saturación o, generalmente de sobresaturación, sino también la existencia de núcleos de condensación. El grado de la sobresaturación, — en la mayoría de los casos menos de 10 % — depende aproximadamente del tamaño de los iones, respectivamente de las partículas, y naturalmente también de su constitución: la condensación del vapor se determina a veces por el aumento de la tensión de vapor sobre una superficie curva, y otras veces por la disminución de la presión del vapor de la substancia diluída.

Lo que nos interesa en este estudio, no es tanto la parte física del fenómeno sino más bien el aspecto geográfico, es decir el origen de los núcleos de condensación. Hasta hace poco, se aceptó que los núcleos de condensación en su gran mayoría se formaban sobre la superficie de los océanos. W. Findeisen ([1]) hizo resaltar que estas partículas no son partículas de sal oriundas del mar, sino que generalmente tienen origen terrestre. Los recuentos que se efectuaron a bordo y en las costas, han comprobado que el número de núcleos fué tanto mayor, cuanto más tiempo el viento había pasado por la superficie del agua. Además la cantidad absoluta de núcleos sobre el océano llegó en un caso dado hasta solamente 2 por cm^3 cuando en un aire puro ([2]) continental siempre existen algunos miles de partículas que cerca de regiones industriales aumentan a varios cientos de miles.

Los núcleos de condensación son generalmente substancias higroscópicas y algunas veces líquidas (p. e. SO_4) que de por sí ya absorbe agua con humedades relativas más bajas que 100 %.

Pero si existe un estado de sobreenfriamiento, éstas partículas líquidas de substancias que disminuyen el punto de congelación, no pueden provocar una sublimación de agua, es decir la formación

de hielo. En este caso se necesitan como núcleos de condensación, partículas sólidas. Estas, sin considerar el polvo de meteoritos, deben tener un origen terrestre, es decir, un polvo finísimo (arena, cristales de cuarzo) ([3]).

Findeisen observa con razón que por lo menos en Europa los núcleos de condensación, esenciales para la formación de nubes, tienen su origen en los procesos de la combustión industrial, los que producen una cantidad extraordinariamente grande de tales partículas. Así existe efectivamente una influencia antropógena. Esta influencia realmente debe aceptarse con mayor convicción y — no solamente para la Europa — sino para casi todos los continentes sin tomar en cuenta el transporte sobre largas distancias por el mismo movimiento de las masas aéreas. Se ha observado que p. e. los productos de la combustión de las algas para la fabricación del iodo, fueron transportados por el viento desde las costas de la Bretaña hasta la Europa central ([4]). Cuando estas fábricas dejaron de existir en la costa francesa, se observó en Alemania un empobrecimiento marcado del suelo y del pasto, en su contenido de iodo y hasta en las glàndulas tiroides del ganado. Así el hombre tuvo una influencia preponderante sobre el clima iódico.

Ahora bien, que no solamente la industrialización y ante todo el tráfico motorizado, hace progresos en casi todas las zonas de la tierra y que en todas partes existe por lo menos la combustión para el uso doméstico, debemos considerar también los incendios de bosques y de estepas; éstos producen aproximadamente la misma cantidad de partículas higroscópicas no solamente líquidas sino también sólidas (hollín, ceniza) ([5]). En total se producen por combustión en la tierra anualmente más o menos fuera de 8000 millones de toneladas de CO_2, 2 mil millones de agua (o mejor dicho de soluciones débilmente ácidas) y 70 millones de elementos sólidos ([6]). No solamente los núcleos de condensación tienen generalmente un origen antropógeno, sino en parte las partículas sólidas de sublimación. Los incendios intencionales de la vegetación arriba mencionados, junto con un pastoreo excesivo del ganado y la agricultura, ante todo en forma de monocultura industrial, han llevado en escala progresiva a la estepización y al desierto vastas zonas de la tierra en todos sus continentes.

La influencia del hombre sobre la denudación, respectivamente sobre el aumento de la fuerza del viento y el transporte de las suspensiones ha sido observado en forma drástica en los EE. UU. ([7]). En menos de 15 años la erosión por el viento ha destruído la tierra

del « Middle West » a pesar que los « Great Plains » pertenecen solamente a las zonas semi-áridas de la Tierra. Teniendo presente que el mismo Sahara tiene en parte un origen antropógeno ([8]) y que el Harmattan del Sudán y los alisios del desierto transportan hasta distancias enormes (Mar Obscuro del Atlántico) el polvo de cuarzo junto con las cenizas de los incendios de sabanas se debería reconocer que el hombre es un productor potente en forma directa o indirecta, de los suspensoides que se encuentran en la atmósfera.

Siendo los núcleos de condensación o de sublimación un factor importantísimo para la formación de nubes, y hasta cierto punto de las mismas precipitaciones, debemos admitir que en mayor escala aún de lo que Findeisen indica, el hombre debe tener en forma acelerada una influencia bien marcada sobre el estado coloidal de la atmósfera, el aumento de la nubosidad y de las precipitaciones.

Esta influencia antropógena naturalmente se combina con la macroclimática; pero aceptamos con Gillman ([9]) que el efecto humano es màs importante que el efecto macroclimático. Debido a la brevedad de las observaciones metereológicas no es posible de apreciar en forma exacta la actuación del hombre sobre los acontecimientos de la naturaleza. Sabemos que existe una periodicidad de más largos y de más cortos intervalos en la historia del clima. Pero solamente debemos recordar el hecho de que el hombre presenta una « singularidad » en la historia de nuestro planeta.

BIBLIOGRAFIA

(1) WILHELM FINDEISEN, *Entstehen die Kondensationskerne an der Meeresoberflaeche? Met. Ztschr. H.* 7, 1937, pp. 377-379.

(2) A. WIGAND,, *Ann. d. Hydr. u. mar. Met.* 58, 212, 1930.

(3) W. FINDEISEN, *Die kolloidmetereologischen Vorgaenge bei der Niederschlagsbildung. Met. Ztschr. H.* 4, 1938, pp. 121-133.

(4) H. CAUER, *Chemisch-bioklimatische Studien in der Bretagne. Ref. Biokl. Beibl. H.* 1, 1938, p. 40. (*Biochem. Ztsch.*, 1937, p. 186).

(5) W. KNOCHE, *Der Einfluss von Vegetationsbraenden auf die Witterung. Met. Ztschr. H.* 7, 1937, pp. 244-257.

(6) W. KNOCHE, *Algunos apuntes sobre la producción del anhidridocarbónico antropógeno. An. de la Soc. Cient. Arg.* julio 1938, pp. 41-46.

(7) MAJOR R., A. BAGNOLD, *The transport of sand by wind. The Geogr. Journ.* May 1937, p. 422.

(8) W. KNOCHE, *Die Entstehung der Wueste Sahara, Forsch, un Fortsrhr.* Nº 2, 1936.

(9) C. GILLMAN, *Die vom Menschen beschleunigte Austrocknung von Erdraeumen. Ztschr. d. Ges. f. Erdk. z.* Berlín, H. 3-4, 1937

BIBLIOGRAFIA

FOLLETOS RECIBIDOS EN LA ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS

POR C. C. D.

Actualités Scientifiques et Industrielles. Folletos (16 $^1/_2$ cm × 25 $^1/_2$ cm) editados por Hermann & Cía., París. Número de páginas y precios variables. Se detallan a continuación los últimos recibidos, siguiendo la numeración consecutiva.

N° 552 y 585. — HOSTELET (GEORGES), *Les Fondements expérimentaux de l'Analyse Mathématique des Faits Statistiques. Le Concours de l'Analyse Mathématique à l'Analyse expérimentale des Faits Statistiques.* 2 folletos de 70 páginas cada uno; precio, 15 francos cada uno; 1937.

Fascículos II y III de la serie titulada « Le Progrès de l'Esprit » dirigida por León Brunschwicg, miembro de la Academia de Ciencias Morales y Políticas; Profesor de la Facultad de Ciencias de París; El autor es profesor de la Facultad del Hainaut y ex director del Instituto de Sociología de Bruselas.

El primero de estos folletos trae, desarrollada, una exposición hecha en el Instituto Internacional de Estadística, en su sesión tenida en Atenas. La primera parte se refiere a los fundamentos: caracteres de los hechos estadísticos y sus índices numéricos; el concurso de las matemáticas al análisis de dichos hechos; los modos de producción de éstos y las nociones correlativas de causalidad y de contingencia. La segunda parte trata la Causalidad, Probabilidad y Azar. Al final trae las Conclusiones. Dice que mucho han de desear los estadísticos que los matemáticos se esfuercen en explicar las condiciones que deben realizar los hechos estadísticos, para que el empleo de tal o cual fórmula de estadística matemática sea experimentalmente legítima.

El segundo folleto reproduce y completa las respuestas dadas por el autor a las objeciones u observaciones que le fueran formuladas a las tesis sostenidas en el primer folleto. Completa, pues, a éste, sin exigir, imperiosamente, la lectura del mismo.

Está también dividido en dos partes: la primera trata la deficiente discriminación de las diligencias del espíritu científico, sus caracteres y resultados. La otra parte se extiende sobre la insuficiente discriminación, y elaboración ficticia de las ideas afectadas a los hechos.

Nº 562. — CABRERA (B.), *Dia et Paramagnétisme et Structure de la Matière.* 80 páginas; 20 francos; 1937.

Fascículo I de la serie « Exposés sur la Théorie de la matière », dirigida por el autor, director del Instituto Nacional de Física y Química de Madrid.

El autor presenta el cuadro de las ideas que han servido de guía a sus trabajos personales sobre el tema, así como al de sus colaboradores. En una introducción recuerda los fundamentos teóricos de la configuración del átomo, y la vinculación entre la configuración electrónica de los diversos átomos y el paramagnetismo; luego, en dos capítulos, el diamagnetismo y el paramagnetismo. Trae, por último, la bibliografía del tema.

Nº 563. — LA BARRE (JEAN), *Les Régulations Hormonales du Métabolisme Glucidique.* Un folleto de 92 páginas; 20 francos; 1937.

Constituye el nº VIII de la serie « Nutrition », dirigida por Emilio F. Terroine. El autor es profesor de la Facultad de Medicina de Bruselas.

Después de recordar, en una introducción, las causas extra endocríneas de las perturbaciones glicémicas (pues tanto en el hombre como en lo animales la concentración del azúcar en la sangre puede variar por la influencia de numerosos factores, de suerte que deben tenerse en cuenta los fenómenos de absorción y eliminación que en las condiciones fisiológicas pueden intervenir para modificar la glícero regulación), entra el autor en materia desarrollando el tema en nueve capítulos y una bibliografía nutrida; y así se ocupa sucesivamente de: la constante glicémica del medio humoral; las glándulas endocríneas que intervienen en la regulación glicémica; el páncreas, la glándula tiroide, las glándulas paratiroideas, la hipófisis y las glándulas genitales, en la regulación glicémica.

Unas consideraciones generales preceden la bibliografía.

Nº 565. — HACHTROUDI MOSHEN, *Les Espaces d'Elements à conexion projective normale.* 85 páginas; 20 francos; 1937.

El autor es doctor en ciencias. Cartan ha demostrado que la noción de un espacio de elementos lineales de conexión proyectiva normal puede definir las invariantes puntuales de una ecuación diferencial $y'' = f(x, y, y')$, de segundo orden, problema que, así planteado, viene a ser una geometrización de una ecuación diferencial general de segundo orden.

En este folleto el autor busca generalizar el problema tratado por Cartan. Así lo expresa en una Introducción. Después de lo cual desarrolla su trabajo en tres capítulos: el primero trata los espacios de elementos planos de tres discusiones; el segundo, el caso del espacio puntual, y el tercero los espacios de elementos planos de n dimensiones y los espacios no-holónomos. Termina con un índice bibliográfico.

Nº 569. — JUENEHOMME (W.), *Calculs des Equilibres physico-chimiques, à l'acide des données de la spectroscopie.* 92 páginas; 20 francos; 1937.

Es el fascículo XIII de « Exposés de Physique moléculaire », dirigida por Victor Henri, profesor de la Universidad de Lieja.

El autor se propone poner los progresos de la espectroscopia al alcance de los prácticos de laboratorio o de la industria; al efecto, recuerda las nociones clásicas de la termodinámica, con numerosos ejemplos, algunos de ellos calculados *in extenso.* Para los especialistas se detiene sobre los principios del método, y principales dificultades que suelen surgir; y también sobre la generalización hecha a las moléculas orgánicas, realizada en trabajos recientes.

Justifica ese programa recordando que la espectroscopía permite actualmente la completa resolución de problemas prácticos entre los cuales el cálculo de los equilibrios en fase gaseosa.

El libro contiene una introducción, seis capítulos, cuatro apéndices, una bibliografía y una tabla de las notaciones empleadas. Los seis capítulos se ocupan respectivamente de: Recuerdo de nociones de termodinámica; generalidades sobre el método estadístico; relaciones generales de los gases perfectos, hidrógeno y sus isótropos, suma de estados de diversos átomos y moléculas, crítica de la 3ª ley de la termodinámica.

Nº 570. — VALIRON (GEORGES), *Sur les Valeurs exceptionelles des Fonctions méromorphes et des leurs dérivées.* 55 páginas; 18 francos; 1937.

Constituye el fascículo IX de la serie « Exposés sur la théorie des fonctions », dirigida por Paul Montel.

Después de una Introducción explicativa del objeto de este estudio — que comporta una demostración del llamado « teorema de Miranda », presentado bajo un nuevo aspecto, así como una completa demostración de los resultados del autor y de ciertas generalizaciones debidas a Chi Tai Cuang — el profesor de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Paris Georges Valiron entra en materia y hace su exposición en cinco capítulos que se ocupan, respectivamente, de las nociones sobre las familias normales; método de Miranda; teorema general sobre el comportamiento de una función holomorfa en un círculo; generalizaciones del teorema de Schottky, caso de las funciones holomorfas; y, finalmente, el caso de las funciones holomorfas y extensiones diversas.

Nº 571. — VASILESCO (FLORIN), *La Notion de Capacité.* 52 páginas; 15 francos; 1937.

Es el fascículo X de la serie indicada en la noticia que precede. El autor es profesor en Montpellier. Trata, sucesivamente, los siguientes temas:

La noción clásica de capacidad y su extensión por Wiener; generalización de La Vallée Poussin. Definiciones geométricas de Fekete, Polya y Sezqo; extensión de la noción a potenciales generalizados por Frostman; estudio de la noción por La Vallée Poussin. Conjuntos de capacidad nula; propiedades características. Bibliografía.

Precede una Introducción, de la que transcribimos algunos párrafos:

« La noción de capacidad es una extensión de la clásica de *capacidad electrostática de un conductor*, hecha a los conjuntos de puntos; extensión que ha podido realizarse mediante el problema de Dirichlet. Es fundamental para el Análisis, y gracias a ella ha sido posible obtener resultados de finitivos concernientes al estudio de la solución del problema de Dirichlet generalizado, en la frontera del dominio dentro del cual ha sido definido; de las singularidades de las funciones armónicas; de la unicidad de esas funciones, de la extensión del método llamado « del barrido » en el caso de los dominios los más generales cuando se da una repartición de masa general, la función de Green según la primera concepción de éste como potencial de masas, las funciones de variable compleja, etc. ».

N° 574. — Bedeau (F.), *Théorie et Technique du Bruit de Fond* (*effets schottky et thermique*). 95 páginas con figuras; 25 francos; 1937.

Es el fascículo I de la serie « Radioéléctricité » (telecomunicaciones y televisión) dirigida por el autor, jefe de trabajos en la Facultad de Ciencias de París.

Después de una Introducción entra el profesor Bedeau en materia. En la primera parte del trabajo trata la teoría del ruido de fondo; en la segunda trata la práctica del mismo.

Es sabido que aun cuando un poste receptor de ondas radioeléctricas esté encerrado dentro de una jaula de Faraday y que ninguna señal esté aplicada en los límites del circuito de entrada, el alto parlante deja oír una especie de zumbido confuso: es el ruido de fondo. Se trata de determinar la causa del mismo, y a ello se esfuerza el autor. Al final, una bibliografía.

Nos. 576 y 577. — Giaja (J.), *Homéothermie et Thermorégulation.* Dos folletos de unas 70 páginas cada uno y algunas figuras; 15 francos cada uno; 1938.

Fascículos IX y X de la serie « Nutrition », dirigida por Emilio F. Terroine, profesor de la Facultad de Ciencias de Estrasburgo, director del Instituto de Fisiología general. El autor es profesor de la Universidad de Belgrado.

El primer tomo está consagrado a la homeotermia. Homeotermos son los animales que conservan temperatura constante. En la primera parte de este primer folleto, el autor se ocupa del significado de la homootermia, del medio térmico, del nivel de la temperatura de estos homeotermos, de la temperatura crítica inferior y superior, y del campo de acomodación. La segunda parte se ocupa de metabolismo basal.

El segundo tomo se ocupa de la termorregulación: química, física. El metabolismo químico, y la termorregulación; el alcohol y la termogénesis, la termorregulación y la ontogenia, las perturbaciones de la termorregulación, y otros tópicos por el estilo, así como la bibliografía, son las materias de los capítulos subsiguientes.

Nº 578. — VALLÉE POUSSIN (C. DE LA), *Les Nouvelles Méthodes de la Théorie du Potentiel et le problème généralisé de Dirichlet.* 48 páginas; 15 francos; 1937.

Se trata del fascículo II de la serie de Publicaciones del Instituto Matemático de la Universidad de Estrasburgo.

Una introducción se refiere al problema simple de Dirichlet y al método llamado de la barredura o « del barrido »; luego al problema generalizado del mismo Dirichlet. Trata luego las funciones de conjunto e integral generalizada de Stieltjes; luego el potencial newtoniano; la Capacidad: capacidad nula, teoremas de unicidad. Signo de la integral de energía. El principio del número. El barrido. Los puntos irregulares y el problema generalizado de Dirichlet. Por último, el ensanchamiento de las condiciones de continuidad en la frontera.

Nº 579. — RANDOIN (LUCIE), *Vues actuelles sur le Problème de l'alimentation, avec Tables de Composition des aliments.* 130 páginas; 25 francos; 1937.

La autora es doctora en ciencias y directora del Laboratorio de Fisiología de la Nutrición en la « Ecole pratique de Hautes-Etudes », etc.

Las tablas que agrega, traen el tenor en sustancias energéticas, en elementos minerales y en vitaminas de las sustancias alimenticias así como los valores y el sentido del equilibrio « acidez-alcalinidad », y los valores de la relación calcio-fósforo. Estas tablas ocupan unas 50 páginas del texto. Lo restante de éste, después de una Introducción, trae los datos fisiológicos actuales del problema de la alimentación: necesidades de principios energéticos o no, sustancias elementales fundamentales, específicamente indispensables; el equilibrio alimenticio; la alimentación de otrora; la del final del siglo XIX y principios del XX; la alimentación en la actualidad; la orientación actual de las ideas en la higiene alimenticia, y la creciente preocupación por la salud pública. Al final, unas conclusiones y la bibliografía del tema. En aquéllas, observa que el ideal de la higiene alimenticia actual es unir los pueblos en el común deseo de suprimir el hambre, hacer retroceder los sufrimientos y obtener una armonía general en todas las manifestaciones del esfuerzo humano.

INDICE GENERAL

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN EL TOMO CENTÉSIMO VIGÉSIMO SEXTO

VARIAS

NECROLOGÍA

BIBLIOGRAFÍA

SOCIOS ACTIVOS

Abrines, Héctor Aníbal
Aguilar, Félix
Albizzati, Carlos M.
Alessi, Juan M.
Alvarez, Raúl J.
Alvarez de Toledo, Belisario
Allende Lezama, Luciano P.
Anastasi, Camilo
Anchorena, Juan E.
André, Enrique de
Andrioletti, Juan Luis
Añón Suárez, Vicente
Aparicio, Francisco de
Aráoz Alfaro, Gregorio
Arce, Manuel J.
Armani, Aquiles
Arnaudo, Silvio J.
Avila Méndez, Delfín
Bado, Atilio A.
Bachmann, Ernesto
Baglietto, Eduardo E.
Balbiani, Atilio
Baliani, Luis M.
Bancalari, Agustín
Bandoni, Alfredo J.
Barabino Amadeo, S.
Bargna, Juan L.
Barilari, Mariano J.
Barral Souto, José
Barrancos, Leónidas A.
Becke, Alejandro von der
Berrino, Juan B.
Bertino, José Carlos
Besio Moreno, Nicolás
Bianchi Lischetti, A.
Biggeri, Carlos
Blaquier, Juan
Boaglio, Santiago
Bolognini, Héctor
Bonanni, Cayetano A.
Bontempi, Luis
Bordas, Alejandro F.
Bordenave, Pablo E.
Borzacov, Vladimir
Borruat, Luis A.
Borzi, Ana María
Bosch, Gonzalo
Bosisio, Anecto J.
Bottaro, Juan C.
Bozzini, Luis (h.)
Briano, Juan A.
Buich, Raúl
Bunge, Juan C.
Buontempo, Guillermo
Burkart, Arturo
Busso, Eduardo B.
Butty, Enrique
Buzzo, Alfredo
Caillet Bois, Teodoro
Calandra, Raúl E.
Canale, Humberto
Canal Feijoo, Bernardo
Capelli, Pedro F.
Carabelli, Juan José
Carbia, Rómulo D.
Carbone, Esteban
Carbonell, José J.
Cárcova, Enrique de la
Carelli, Antonio
Carelli, Humberto H.
Caride Massini, Pedro
Carman, Ernesto
Carrea, Juan Ubaldo
Casacuberta, Antonio
Castellanos, Alberto
Castello, Manuel F.
Castiñeiras, Julio R.
Celasco, Juan L.
Ceppi, Héctor
Cernuschi, Félix
Clos, Enrique C.
Cock, Guillermo E.
Coni Bazán, F. A.
Curti, Orlando P.
Curutchet, Luis
Chanourdie, Enrique
Chizzini Melo, Aníbal F.
D'Ascoli, Lucio
Dassen, Claro C.
Dasso, Héctor
Dasso, Ricardo L.
De Cesare, Elías A.
De Fina, Armando L.
De la Ini, Juan E.
Dellepiane, Luis J.
Deulofeu, Venancio
Díaz, Emilio C.
Dieulefait, Carlos E.
Doello-Jurado, Martín
Dobranich, Jorge W.
Domínguez, Juan A.
Dubecq, Raúl E.
Dueñas, José
Duhau, Luis
Dupont, Enrique
Durañona y Vedia, A.
Durrieu, Mauricio
Escudero, Antonio
Escudero, Pedro
Faré, Santo S.
Fernández, Alberto J.
Fernández Díaz, A.
Fernández Long, S.
Figini, Angel
Figuerero, Hernando W.
Fischer, Gustavo Juan
Flores, Emilio M.
Floriani, Luis
Florit Carlos J.
Fossa Mancini, E.
Franceschi, Alfredo
Fürnkorn, Divico A.
Gadda, Carlos Manuel
Galmarini, Alfredo G.
Gando, Alfredo R.
Gandolfi Herrero, Augusto
Gandolfo, José S.
Gascón, Alberto
Gaspar, Fernando L.
Géneau, Carlos E.
Gerardi, Donato
Ghigliazza, Sebastián
Giagnoni, Bartolomé E.
Giannone, José
Gradín, Carlos
Grieben, Arturo
Gutiérrez, Ricardo J.
Haussler, Emilio
Herbin, Luis A.
Hermitte, Enrique
Herrera Vegas, M.
Herzer, Bernardo
Hickethier, Carlos F.
Hofmann, Herbert
Hortal, José Angel
Houssay, Bernardo A.
Hoyo, Arturo
Igartúa, Luis María
Irigoyen, Luis H.
Isetta, José
Ivanissevich, Ludovico
Jorge, José M.
Jakob, Cristofredo
King, Diarmid O.
Kinkelin Pelletán, J. C. de
Knoche, Walter
Kraglievich, Nicolás T.
Krapf, Eduardo
Labarthe, Julio
Lagunas, Simón
La Menza, Francisco
Laporte, Luis B.
Larco, Esteban
Lasso, Alfredo L.
Latzina, Eduardo
Ligniéres, Roberto
Lizer y Trelles, C. A.
Lombardi, Alberto
Loudet, Osvaldo
Loyarte, Ramón G.
Lugones, Arturo M.
Llauró, José
Mac Donagh, E. J.
Magnin, Félix J.
Magnin, Jorge
Mainini, Carlos
Mallol, Emilio
Mamberto, Benito
Marcó del Pont, E.
Marchionatto, Juan B.
Maresca, Antonio J.
Martignone, Eduardo
Marotta, F. Pedro
Marotta, R. Armando
Mata, Leopoldo
Méndez, Julio
Meoli, Gabriel
Meoli, Humberto
Mercau, Agustín
Meriggi, Juan C.
Mermoz, Francisco A.
Molfino, José F.
Molina Carranza, L.
Molle, Clotilde C.
Montes, Vicente E.
Moragues Bernat, Jaime
Moreno, Evaristo V.
Nágera, Juan José
Natale, Alfredo
Natale, Ernesto
Negrete, Lucia
Negri, Mario L.
Nielsen, Juan
Oliveri, Alfredo B.
Ortega Belgrano, Raúl
Ortiz, Aníbal A.
Ortiz de Rosas, Jorge
Otamendi, Gustavo
Ottonello, Héctor
Páez, José María
Page, Franklin Nelson
Paltoví y Oliveras, A.
Parodi, Edmundo
Parodi, Lorenzo R.
Parodi, Rodolfo
Pasman, Raúl G.
Pasman, Rodolfo E.
Pastore, Franco
Paz Anchorena, José M.
Pérez Hernández, A.
Perrone, Cayetano
Pestalardo, Agustín
Pini, Aldo S.
Platz, Hubert
Podestá, Juan Carlos
Posadas, Carlos
Quinos, José Luis
Quinterno, Bruno F.
Quiroga, Pedro R.
Raimondi, Alejandro
Raffo, Bartolomé M.
Ramaccioni, Danilo
Ramallo, Carlos M.
Ratto, Héctor R.
Rebuelto, Antonio
Rebuelto, Emilio
Recce, William Asher
Repetto, Blas Angel
Repossini, José
Ringuelet, Emilio J.
Rissotto, Atilio A.
Rivarola, Rodolfo
Robles, Angel A.

Rodríguez Aravena, S.
Rodríguez, Germinal
Rodríguez, Miguel
Roffo, Angel H.
Roffo, Juan
Roldán, Raimundo
Romero Brest, Enrique
Rokotnitz, Otto
Rospide, Juan
Rossell Soler, Pedro
Ruata, Luis E.
Ruíz Moreno, Isidoro
Ruiz Moreno, Adrián
Rumi, Tomás J.
Sabaria, Enrique
Salomón, Hugo
Sánchez, José Ricardo
Sánchez, Gregorio L.
Sánchez Díaz, Abel
Sánchez Sorondo, M. G.
Sanromán, Iberio
Santángelo, Rodolfo
Sarhy, Juan F.
Sarrabayrouse, Eugenio
Savon, Marcos A.
Schnack, Benno J.
Schulz, Guillermo
Selva, Domingo
Selzer, Samuel
Sesma,, Angel
Sheahan, Juan F.
Silva, Leónidas L.
Simonoff, Miguel
Simons, Hellmut
Siri, Luis
Sobral, Arturo
Solari, Emilio F.
Solari, Miguel A.
Sordelli, Alfredo
Soler, Frank L.
Spinetto, David J.
Spota, Víctor J.
Storni, Segundo R.
Taiana, Alberto F.
Taiana, Jorge
Tarragona, José
Tello, Eugenio
Torre Bertucci, Pedro
Torello, Pablo
Tossini, Luis
Trelles, Rogelio A.
Trucco, Sixto E.
Valeiras, Antonio
Valentini, Argentino
Valentinuzzi, Máximo
Vallebella, Colón B.
Vanossi, Reinaldo
Varela, Rufino
Varela Gil, José
Vecchi, Arístides de
Vela Huergo, Julio
Verdaguer, Juan
Veyga, Francisco de
Vidal, Eduardo
Vignati, Milcíades A.
Villalobos D., C.
Vignaux, Juan C.
Vinardell, Alberto
Volpatti, Eduardo
Wainer, Jacobo
Wauters, Carlos
Wernicke, Raúl
White, Guillermo J.
Williams, Adolfo T.
Wysztelewski, W. de
Zamboni, Agustín
Zappi, Enrique V.
Zavalla, Carlos M.
Zuloaga, Angel M.

SOCIOS ADHERENTES

Bazzanella, José
Cotlar, Mischa
Devoto, Carlos Alberto
Ferramola, Raúl
Folcini, Martín L. G.
García, Eduardo D.
Goyena, Ricardo J.
Gorchs, Agustín C.
Laclau, Juan Pedro
Magne de la Croix, P. A.
Mailhos, Luis E.
Milesi, Emilio Angel
Quevedo Capdevila, Eduardo A.
Recoder, Roberto F.
Repetto, Cayetano
Rusconi, Carlos
Sadosky, Manuel
Somonte, Eduardo
Vistalli, Alina M.
Wechsler, Wolf

CASAS ADHERENTES

Angel Estrada y Cía.
Benvenuto y Cía.
Lutz, Ferrando y Cía.
Hijos de Atilio Massone
Otto Hess, S. A.
T. Gr. "Tomás Palumbo"
Jacobo Peuser, S. A. Ltda.

SOCIO VITALICIO

Huergo, Eduardo María

MIEMBROS PROTECTORES DE LA ORGANIZACION DIDACTICA DE BUENOS AIRES

Anchorena, Juan E.
Besio Moreno, Nicolás
Tornquist, E. y Cía. (Lda.)

SECCION CORDOBA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Juan Olsacher; Vice-presidente, Dr. Miguel Fernández; Vice-presidente, Ing. Daniel A. García; Secretario de actas, Dr. Guillermo V. Stuckert; Secretario de correspondencia, Prof. Tulio Mácola; Tesorero, Sr. Bernardo Pilotto; Pro-tesorero, Dr. Carlos C. Hosseus; Vocales: Ing. Clodoveo Pascualini; Ing. Jorge E. Bobone; Ing. Luis Chechi; Ing. Ambrosio L. Taravella; Dr. Federico Padula; Dr. José Carlomagno; Dr. Meade L. Zimmer; Sr. Enrique Sparn.

SOCIOS ACTIVOS

Aguiar, Henoch D.
Bobone, Jorge E.
Brandan, Ramón A.
Broglia, Alberto A.
Buteler, Jesús E.
Camilloni, Carlos
Carlomagno, José
Chaudet, Enrique
Checchi, Luis
Deheza, Eduardo
Esteban, Fernando
Fernández, Miguel
Fontana, Lorenzo P.
García, Daniel
Godoy, Salvador A.
Gordillo, Pedro N.
Hosseus, Carlos Curt
Larrauri, Agustín C.
Mácola, Berardo A.
Mácola, Tulio
Mirizzi, Pablo Luis
Ninci, Raúl T.
Olaf Lützow, Holm
Olsacher, Juan
Padula, Federico
Pasqualini, Clodoveo
Peláez J. Gambastiani de

Pilotto, Bernardo
Ponce Laforgue, Carlos
Rothlin, Edwin
Schmiedecke, Augusto
Sparn, Enrique
Stuckert, Guillermo V.
Taravella, Ambrosio L.
Trebino, Natalio
Urciolo, Victorio
Vercello, Carlos
Yadarola, Mauricio L.
Zimmer, Mesde L.

SECCION SANTA FE

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Gustavo A. Fester; Vice-presidente, Dr. José Piazza; Secretario de correspondencia, Ing. Quím. Francisco A. Bertuzzi; Secretario de actas, Ing. Quím. José Cruellas; Tesorero, Ing. Quím. Enrique Virasoro; Vocal 1º, Ing. José Babini; Vocal 2º, Prof. Rolando Hereñú; Vocal suplente 1º, Prof. Julio Salaber; Vocal suplente 2, Ing. Quím. Guillermo Berraz; Encargado de Biblioteca y Canje, Ing. Quím. Rodolfo Rouzaut; Encargado de Publicaciones, Ing. José Babini.

SOCIOS ACTIVOS

Anadón, Leónidas
Ariotti, Juan Carlos
Babini, José
Benet, Pedro José
Berraz, Guillermo
Bertuzzi, Francisco A.
Bonazzola, César J.
Borzone, Rodolfo
Bossi, Celestino
Caballero, Martín A.
Cerana, Miguel
Claus, Guillermo
Cohan, Marcos
Courault, Pablo
Crouzeilles, A. L. de
Cruellas, José
Christen, Carlos
Christen, Rodolfo G.
Damianovich, Horacio
Falco, Federico
Fester, Gustavo A.
Frenguelli, Joaquín
Gollán, Josué (h.)
Gschwind, Eduardo P.
Hereñú, Rolando
Hotschewer, Curto
Juliá, Tolrá Antonio
Kleer, Gregorio
Lachaga, Dámaso A.
Mai, Carlos
Mántaras, Fernando
Marelli, Hipólito
Martino, Antonio E.
Montpellier, Luis Marcos
Mounier, Celestino
Muzzio, Enrique
Nigro, Angel
Niklison, Carlos A.
Oliva, José
Peresutti, Luis
Piazza, José
Piñero, Rodolfo
Pozzo, Hiram J.
Ragonese, Arturo E.
Reinares, Sergio
Rouzaut, Rodolfo
Salaber, Julio
Salgado, José
Santini, Bruno L. P.
Schivazappa, Mario
Simonutti, Atilio A.
Tissembaum, Mariano
Urondo, Francisco E.
Virasoro, Enrique

SECCION MENDOZA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Juan B. Lara; Vice-presidente, Ing. Agr. José Raúl Ponce; Secretario, Ing. Agr. Julio Tolosa (h); Tesorero, Ing. Cayetano C. Piccione; Bibliotecario, Sr. Adrián Ruíz Leal; Vocales: Dr. Eduardo Carette; Dr. Mario Bidone; Ing. Alfredo Rosenthal; Sr. Manuel Tellechea; Ing. Agr. Rafael E. Pontis.

SOCIOS ACTIVOS

Alurralde, Juan Carlos
Anzorena, Jacinto
Ayala Castagnino, G.
Basso, Germinal
Benegas, Raúl
Bidone, Mario
Borsani, Carlos Pablo
Burgoa, Pedro A.
Carette, Eduardo
Castillo, José
Croce, Francisco M.
Espinosa, Norberto A.
Flor Alvarado, José M.
Gabrielli, Francisco J.
Galeano, Edgardo
García, José Federico
Godoy Vergelin, G.
Gomensoro, José N.
Granzella, Sinibaldo
Guevara, José R.
Guiard, Ricardo
Jofré, Alberto L.
Lara, Juan B.
Lucero, Braulio G.
Lugones, Manuel G.
Magistretti, Guillermo
Maneschi, Ernesto
Maroso, José Angel
Maveroff, Aquiles
Mayorga, Santiago C.
Miyara, Salomón
Navarro Correas, José A.
Paganotto, Juan P.
Pelaia, Dante
Piccione, Cayetano C.
Ponce, José Raúl
Pontis, Rafael E.
Richard, Alfonso E.
Rosales, Ranulfo S.
Rosenthal, Alfrado
Ruíz, Aníbal
Ruíz Leal, Adrián
San Martín, José Benito de
Serra, Luis Angel
Silvestre, Tomás
Stura, Angel C.
Tellechea, Manuel
Tolosa, Julio (h)
Toso, Juan F.
Villanueva, Miguel Angel

SECCION LA PLATA

COMISION DIRECTIVA

Presidente, Dr. Carlos A. Sagastume; Secretario, Ing. Adolfo P. Grissi; Tesorero, Dr. Carlos Teobaldo; Vocales: Dr. Hilario Magliano, Dra. Juana Cortelezzi; Ing. Juan Sabato; Dr. Federico E. Christmann.

SOCIOS ACTIVOS

Alsina Fuertes, Fidel
Amarante, Pedro C.
Angli, Jerónimo
Arroyo Basaldúa, Víctor M.
Basualdo, Washington S.
Bauer, Conrado
Bonet, Luis A.
Canals Frau, Salvador
Cortelezzi, Juana
Crespi Gherzi, Rodolfo A.
Christmann, Federico E
Daló, Héctor R.
Ferrari, Obdulio J. F.
Gascón, Jorge
Gershánik, Simón
Giovambattista, Humberto
Grisi, Adolfo P.
Loedel Palumbo, Enrique
Mc Loughlin, Rogelio P.
Magliano, Hilario
Marmonti, Angel
Massimino, Blas
Méndez, José D.
Micheletti, Luis A.
Nico, Raúl
Oliva, Virgilio
Paternosto, Pedro G.
Pera, Tomás Carlos
Platzceck, Ricardo P.
Rodríguez, Marcelo R. N.
Sabato, Juan
Sáez, Francisco A.
Sagastume Berra, A. E
Sagastume, Carlos A.
Scheggia, Eduardo R.
Teobaldo, Carlos
Toranzos, Fausto L.
Trejo, César A.
Ucha Udabe, Manuel
Vucetich, Danilo C.
Wilkens, Alejandro

SOCIOS CORRESPONDIENTES

Aguilar y Santillán, R.	México
Alvarez, Antenor	Sgo. del Estero
Amaral, Afranio de	San Pablo (Br.)
Avendaño, Leónidas	Lima
Bachmann, Carlos J.	Lima
Bodenbender, Guillermo	Córdoba
Bolívar, Ignacio	Madrid
Bonarelli, Guido	Gubbio (It.)
Borel, Emile	París
Bragg, William Henry	Londres
Bruch, Carlos	Olivos (B. A.)
Cabrera, Blás	Madrid
Campos Porto, Pablo	Río de Janeiro
Carabajal, Melitón M.	Lima
Darmois, Eugenio	Nancy (Fr.)
Darmois, Georges	París
Dávila, Rubén	Santiago (Ch.)
Escomel Edmundo	Arequipa (P.)
Fiebrig, Carlos	Munich (Al.)
Fontecilla Larrain, Arturo	Santiago (Ch.)
Fort, Michel	Lima
González del Riego, Felipe	Lima
Greve, Germán	Santiago (Ch.)
Guinier, Philibert	Nancy (Fr.)
Hadamard, Jacques	París
Hauman, Luciano	Bruselas
Hernández, Juvenal	Santiago (Ch.)
Hijar y Haro, Luis	México
Janet, Pierre	París
Jiménez de Asúa, Luis	Madrid
Keiper, Guillermo	Berlín
Kinart, Fernando	Amberes
Lahille, Fernando	Tarn (Fr.)
Langevin, Paul	París
Levi Civita, Tulio	Roma
Lobo, Bruno	Río de Janeiro
Mardones, Francisco	Santiago (Ch.)
Molina, Enrique	Concepc. (Ch.)
Monjaráz, Jesús E.	México
Moretti, Gaetano	Milán
Oliver Schneider, Carlos	Santiago (Ch.)
Pereira d'Andrade, Lencastre	Nova Goa (I.
Perrin, Tomás G.	México
Perrine, Carlos D.	Córdoba
Pi y Suñer, Augusto	Barcelona
Porter, Carlos E.	Santiago (Ch.)
Reyes Cox, Eduardo	Santiago (Ch.)
Rowe, Leo S.	New York
Shepperd, William R.	Wáshington
Tello, Julio C.	Lima
Valle, Rafael H.	México
Vélez, Daniel M.	México
Villarán, Manuel V.	Lima
Vitoria, Eduardo	Barcelona
Volterra, Vito	Roma






SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES
3 9088 01357 3167